This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES

Vermischtes.

Einleitung

zur

Berechnung der Leibrente

und

Anwartſchaften

die vom Leben und Tode einer oder mehrer

Perſonen abhangen

mit

Tabellen zum practiſchen Gebrau

von

Joh. Nicol. Tetens

Profeſſor der Philoſophie und Mathematik zu Kiel.

Leipzig

bey Weidmanns Erben und Reich.

1785.

HG8793
T4

Vorrede.

Bey der in Deutschland ziemlich bekannt gewordenen Veränderung mit der Calenbergischen Wittwencasse fiel es mir als eine Pflicht zu, mit dem Theil der Arithmetik, der in dieser Einleitung vorkommt, mich näher zu befassen. Es kamen gleich anfangs bey jenem Geschäfte verschiedene Fragen vor, über die Anwendbarkeit der allgemeinen Mortalitätstabellen, über die Grösse des Risico der Casse, und andere, die sehr in Betracht gezogen werden mussten, und die ich nirgends erörtert fand. Man sieht nicht besser, was der Theorie noch fehlt, als wenn man sie zur Anwendung bringen soll. Da ich darüber aus war, diese Puncte zu untersuchen, kam ich auf manches andere, was mir auch nicht unerheblich schien, und so entstund endlich der Gedanke, eine eigene Einleitung zu entwerfen, in der

am füglichſten und am kürzeſten angebracht werden konnte, was ich glaubte zu dem bisher bekannten zuſetzen zu können.

Ueber den Nutzen dieſer Berechnungsarten etwas zu ſagen, iſt jetzo unnöthig. Der Erfolg hat zu ſehr gezeiget, wie gefährlich hierin Rechnungsfehler ſind. Ich glaube, man kann erwarten, daſs man in Zukunft ſie noch weit mehr nutzen werde, als bisher geſchehen iſt. Jedes Land, und jede anſehnliche Stadt kann, wenn man will, eine eigene Wittwen- und Wayſencaſſe, ſogar eine eigene allgemeine Verſorgungsanſtalt haben, und zwar durch freywillige geſellſchaftliche Verbindungen ohne Beläſtigung des gemeinen Weſens. Es kommt nur darauf an, daſs die Ideen von dieſen Inſtituten in einem und dem andern Puncte noch etwas berichtiget, noch mehr aber, daſs die richtigen Ideen davon verbreitet werden. Man hat vorher zu viel davon erwartet. Da dieſe eitlen Hoffnungen getäuſchet ſind, ſo mag man vielleicht jetzo zu wenig aus ihnen machen. Mit wenig oder nichts ſich oder den Seinigen reichliche Verſorgung verſchaffen zu können, das geht nicht an, und wer das glaubt heraus gerechnet zu haben, kann ſicher ſeyn, daſs er ſich geirret. Aber mehr Verſorgung

gung ſich oder den Seinigen auf Lebens- und Todesfälle zu verſichern, als durch eigene Aufſparung des dazu beſtimmten Geldes möglich iſt, das geht an, dadurch, daſs man dieſs Geld, als verloren für ſich ſelbſt, für andere hingiebt, in dem Fall, daſs der Umſtand nicht eintritt, bey dem man für ſich oder für die Seinigen die Verſorgung von nöthen hat. Dieſs iſt das weſentliche Wohlthätige, das in der Natur dieſer Anſtalten liegt. In ſo ferne, als jeder dabey eine Summe wagt, die am Ende für ihn unnütz ausgegeben ſeyn kann, wird etwas aufs Spiel geſetzt. Aber ſoll das ein Spiel heiſsen, ſo hat es das Eigene, daſs nur der verliert, der des Gewinns nicht bedarf, und daſs dagegen der gewinnet, dem der Gewinn unentbehrlich iſt. Hier iſt der Verlierende der Glücklichere. Auſser der Beruhigung, ſo lange der Erfolg nicht entſchieden hat, gegen den Mangel auf den ſchlimmern Fall gedeckt zu ſeyn, hat er am Ende, wenn für ihn am beſten entſchieden iſt, nur zur Verſorgung anderer verloren.

In England hat man dieſe Renten-Berechnungen lange gekannt. *Halley*, dem wir ſo manche nützliche Erfindung zu verdanken haben, kam am Ende des vorigen Jahrhunderts ſchon darauf. *Hugenius*

hatte vor ihm Probabilitäten zu berechnen gelehret. Seine Grundſätze wandte *Halley* auf die in Ordnung gebrachte Sterberegiſter an, und fand die Grundſätze zur Berechnung der Leib- und Wittwenrenten. Einige nennen ſeine Methode noch die *Halleyiſche*, was eben ſo billig iſt, als wenn man den bekannten Lehrſatz in der Geometrie den Pythagoräiſchen nennt: allein einige, die ſie ſo nannten, thaten es aus Mangel an eigener Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit, und wollten ſie dadurch als eine ſolche aufſtellen, die auf *Halleys* Anſehen beruhen möge. Dabey iſt doch die Erinnerung nicht undienlich, daſs ſie diejenige ſey, die in der Natur der Sache lieget, die nothwendig aus dieſer folget, und ſo eine, auf die jeder, wenn nicht nothwendig kommen muſs, doch am erſten kommen wird, und auch jeder wirklich gekommen iſt, der nach richtigen Grundſätzen eine geſucht hat.

Nach *Halley* hat *Moivre*, ein bekannter groſser Mathematiker, die Theorie etwas weiter gebracht. Er führte die Hypotheſe vom *gleichförmigen Abſterben* ein, um die Rechnungen zu erleichtern. Dieſer Hypotheſe kann man nun zwar nicht folgen, ſie weicht zu weit von der Erfahrung ab, allein man muſs

muſs ſie doch kennen. Sie iſt, zumahl mit *Simpſons* Veränderung, in manchen Hinſichten als Näherungsmethode ſehr brauchbar. *Moivre* machte aus den einzelnen Aufgaben ein Ganzes, und ſo zu ſagen, ein Syſtem, das nun mehr im allgemeinen, auch mit Anwendung der höhern Mathematik, konnte bearbeitet werden.

Faſt mehr noch als *Moivre* hat nach ihm *Simpſon* hinzugeſetzt. Die Moivriſche Hypotheſe machte er durch eine ſinnreiche Veränderung brauchbar. Die Verbindungsrente lehrte er durch eine Approximationsmethode zu finden, die mit vielem Scharfſinn ausgedacht war, und weil ſie ungemein kurz iſt, mit Nutzen gebraucht werden kann, ob ſie gleich die Wehrte nicht völlig genau angiebt. Er zeigte auch, wie die übrigen, vom Ueberleben einer Perſon über mehrere andere abhangenden, Anwartſchaften zu berechnen ſind. Darinn war *Moivre*, der einen Anfang gemacht hatte, gar nicht auf die rechte Spur gekommen. Dieſs würde als ein zweytes Stockwerk in dieſer Wiſſenſchaft anzuſehen ſeyn, wenn *Simpſon* nicht auch hier bloſs bey Approximationen wäre ſtehen geblieben. Soll man ſich damit begnügen, ſo muſs man es doch in ſeiner Gewalt haben, jedesmal zu

beſtimmen, bis wie weit die Abweichung von dem völlig richtigen gehen könne. Auch darinn lieſs er eine Lücke. Aber überhaupt iſt es hier unnöthig bloſse Approximationen zu ſuchen, da ſich Methoden angeben laſſen, die völlig zutreffen, und weniger mühſam ſind als jene. Die wichtigſte Schrift von *Simpſon*, die hieher gehört, ſcheinet auswärts am wenigſten bekannt geworden zu ſeyn. *Fontana* und *Florencourt* führen ſeine *Doctrine of Annuities and Reverſions* an, die 1742 gedruckt iſt, aber in ſeinen *Sel & Exerciſes for the young Proficients in the Mathematicks.* London 1752 8. findet ſich ein Theil, unter der Aufſchrift. *of the Valuation of Annuities, for ſingle and joint Lives.* Dieſs iſt die vorzüglichſte, ganz claſſiſche Schrift, die ich meyne, in der er ſelbſt einiges in ſeiner vorgenannten *Doctrine of Annuities* verbeſſert, und ſeine beſten Erfindungen gelehret hat.

Von den neuern brittiſchen Schriftſtellern in dieſer Materie ſind mir nur *Morgan* und *Price* als ſolche bekannt geworden, die etwas vorzügliches und etwas eigenes geleiſtet haben. In der allgemeinen Theorie bleiben beyde bey *Simpſon* ſtehen. *Morgan* hat eine doppelte Berechnungsart der Renten gewieſen, die allerdings vielen Wehrt hat. Doch ſcheint Herr

Doct.

Doct. *Price*, der sie mit Recht sehr empfiehlt, ihr etwas zu viel Vorzüglichkeit zuzuschreiben. Ich habe sie nicht so leicht und kurz gefunden, dass ich nicht Gründe gehabt, noch auf eine andre zu denken, und diese jener vorzuziehen. Man mag selbst vergleichen und urtheilen. Hr. Doct. *Price* hat, zumahl in der vierten Ausgabe seiner *Observations on reversionary Payments, in 2 Bänden* 1783. manche eigene für die Praxis erhebliche Bemerkungen gemacht.

Im Jahr 1750 als *Simpsons* oben erwähnte *Select Exercises* herauskamen, schien man in Deutschland noch nicht einmal die Elemente dieser Rechnungen zu kennen. Wittwen- Wayfen- und Todten-Cassen hatten wir. Aber welche? Alle auf Gerathewohl, oder nach einem ohngefähren, just in diesen Materien am öftersten trüglichen Ueberschlag entworfen, ohne richtige Grundsätze, oder gar gegen sie, die denn auch den Erfolg gehabt haben, den so übel berechnete Projecte gewöhnlich haben. Darüber brauchen wir nun eben nicht zu erröthen. Denn solche practische Thorheiten sind auch bey unsern Nachbaren jenseits des Meers vorgefallen. Sie haben Versorgungsanstalten, die nahe so fehlerhaft sind, als die fehlerhaftesten der unsrigen, und die von jüngerm

Dato

Dato sind, als die Schriften, woraus sie sich eines bessern hätten belehren können. Vernunft in Büchern ist auch bey ihnen noch nicht Vernunft in Praxis. Was aber befremden könnte, ist dieſs, daſs wir in Deutschland in der Wissenschaft selbst zurück blieben, wir, die wir doch sonst so sehr geschäftig sind, neue auswärts erfundene Kenntnisse bey uns zu verpflanzen. Erst 1760 trug *Euler* seine Berechnungsart der Wittwenrenten vor. — Sie ward als eine neue Erfindung angesehen, und gewiſs hatte der groſse Mann sie auch aus sich selbst; aber sie war nichts weniger, als neu, sie war die nämliche Methode nach den Mortalitätstafeln zu rechnen, die den Engländern längst bekannt gewesen war. Seit dieser Zeit haben wir nun ein Studium daraus gemacht. Die Herren *Seyberth*, *Kritter*, *Lambert*, *Fuſs*, *Oeder*, *Lous*, *Bugge* und *Florencourt* haben mit Scharfsinn und mit Nutzen darinn gearbeitet. Wir können sagen, daſs wir in den Theilen, die zunächst zu unsern Bedürfnissen gehören, den Britten gleich sind, und wenn mans genau nehmen wollte, in einem oder dem andern sie übertreffen. Aber wollen wir gerecht seyn, so müssen wir gestehen, daſs noch in keinem deutschen Buch *Simpson* eingeholet sey, und daſs

auch

practiſchen Methoden, und die etwas ſchweren Beweiſe der Sätze, die nicht unmittelbar, oder nahe aus den erſten Elementen folgen, und andere weiter führende Betrachtungen enthalten. Hier kann einiges bloſse Speculation zu ſeyn ſcheinen. Aber ich bitte den, der es dafür hält, nur näher es anzuſehen. Man wird viel öfterer finden, daſs es nicht weit genug gehe, als daſs es zu weit gehe. Die kürzeſte Praxis erfordert jedesmal die meiſte Theorie.

Aber auch bey denen, die bloſs zum practiſchen Gebrauch dieſe Einleitung nutzen wollen, ſetze ich voraus, daſs ihnen die Elemente der allgemeinen Arithmetik, die mit Buchſtaben rechnet, ſo weit wenigſtens geläufig ſind, daſs ſie Ausdrücke in Buchſtaben oder Formeln leſen, und darnach rechnen können. Ich habe ſie mit Oeconomie zu brauchen geſucht. Jedes neue Zeichen, was nicht nöthig iſt, und nicht merklich erleichtert, iſt eine Laſt fürs Gedächtniſs, die man ihm nicht aufbürden muſs. Viele Buchſtabenzeichen ſind da, wo ſie für die ſtehen, die ſie gerne haben, entbehrlich für andere, die ſie nicht zu gebrauchen wiſſen. Ihrer mich gänzlich zu enthalten, alles mit Worten der gemeinen Sprache und mit den gewöhnlichen Zahlen zu ſagen, und zu beweiſen,

beweisen, war nicht wohl möglich, wenigstens mir nicht, ohne in eine Weitläuftigkeit zu gerathen, die ich selbst nicht hätte ausstehen können.

Hier komme ich in Versuchung noch ein Wort mehr zu sagen über einen Gedanken, den einsichtsvolle und verdiente Männer geäusert haben, dass man nämlich beym Vortrag dieser Rechnungsarten sich aller algebraischen Zeichen enthalten könne, und der Gemeinnützlichkeit der Sachen wegen, solle. Es ist viel richtiges in dieser Maxime. Nur, deucht mich, sey es nöthig, sie mit Sorgfalt zu bestimmen, wenn sie nicht so mifsleiten soll, wie der Hang zur Popularität in den Wissenschaften. Den schätze ich sehr, sehe ihn als einen Vorzug unserer Zeit an, liebe ihn auch in der Mathematik. Aber kann mans läugnen, dass er wohl gelenket und in bestimmte Gränzen gehalten werden müsse, wenn nicht Selbstgenügsamkeit an seichten Elementarkenntnissen und Geringschätzung des gründlichen Wissens durch ihn veranlasset werden soll? Hat man nicht auch in der Mathematik diese Folgen zu befürchten?

Gemeinnützliche Kenntnisse, sagt man, sollten auch gemeinfaslich gemacht werden. Viele Personen, die mit Zahlen gut rechnen, sind nicht geübt

im Gebrauch der Buchſtaben. Ihnen kann alles begreiflich gemacht werden, und ſie können ſichs ſelbſt begreiflich machen durch eigenes Nachdenken und Rechnen: aber wenn Buchſtaben gebraucht werden, ſo iſt der Anſchein von Algebra da, womit ſie ſich nicht abgeben, wenns auch am Ende leichtfaſslich genug ſeyn möchte. Ich geſtehe, ich bin nicht überzeugt von der Gültigkeit dieſes Grundes. Verſchiedene Beyſpiele ſind mir vorgekommen, die hieher gehören, aber ich habe kein einziges gefunden, was nicht den Wunſch bey mir beſtätiget hat, daſs es ein Grundſatz ſeyn möge, niemanden als einen gebührenden Richter über practiſche, zu dieſem Fach gehörige, Sachen zu erkennen, der nicht die allgemeine Arithmetik, die mit Buchſtaben rechnet, in ſeiner Gewalt habe. Iſt davon etwan die Frage, ob nicht die Grundſätze, worauf die practiſchen Rechnungen beruhen, und die allgemeine Methode des Verfahrens jemanden begreiflich gemacht werden können, ohne algebraiſche Zeichen? Darüber iſt kein Zweifel. Dieſs kann geſchehen, wenn man will, auf die populärſte Art, durch eine philoſophiſche Darſtellung und Vergleichung bekannter Allgemeinbegriffe, wozu kein Calcul erfordert wird, weder der mit

Buch-

Buchſtaben, noch der mit Zahlen. So eine Kenntniſs hat auch für ſich einen groſsen Wehrt. Sie ſetzet diejenigen, die ſelbſt nicht rechnen können oder wollen, und oftmals auch nicht ſollen, in den Stand, zu beurtheilen, welchen von denen, die gerechnet, aber verſchiedene Reſultate gefunden haben, ſie mit Sicherheit trauen können. Noch mehr. Iſt nur das der Zweck, jemanden ſo weit zu führen, daſs die Richtigkeit der von einem andern gegebenen Vorſchriften einleuchte, um deſto ſicherer dieſe zu befolgen, ſo geſtehe ich gerne, das gehe füglich an, ohne ihm irgend etwas in algebraiſchen Formeln vorzulegen. Und das iſt wiederum etwas nützliches. Aber wohl zu merken, das alles iſt noch nicht wahre wiſſenſchaftliche Kenntniſs, nicht die durchs Ganze reichende volle Einſicht, die jemanden fähig macht, entweder ſelbſt Entwürfe zu erfinden, oder nur fremde, die nicht ſchon gegen die erſten Grundſätze anſtoſsen, in ihren einzelnen Theilen zu verfolgen, und zu prüfen. So eine vollſtändige Theorie, als nur eigentlich zur Anwendung gebracht werden kann, gewähren jene Anfangskenntniſſe hier nicht, ſo wenig als irgend anderswo. Und dieſe vollſtändige Theorie, die mehr als ein Halbwiſſen iſt,

ob auch die gefaſst werden könne von dem, der nicht allgemeiner die Beziehungen von Gröſsen denken und ausdrücken kann, als es mittelſt der gewöhnlichen Ziffern angeht? Iſt das die Frage, ſo möchte ich faſt die Möglichkeit läugnen. Man mache den Verſuch. Als vor einigen Jahren die Unbeſtehbarkeit der vormaligen Calenbergiſchen Wittwencaſſe anfieng einzuleuchten, und nun die groſse Aufgabe vorlag, wie ihr zu helfen ſey, fanden ſich verſchiedene würdige Männer mit ihrem Rath, mit Vorſchlägen und Projecten ein. Es war erſichtlich, daſs es ihnen an Rechnungsgeſchicklichkeit mit Zahlen nicht gefehlet habe, ſo wenig als an natürlichem Scharfſinn. Aber es war bey einigen auch auffallend, wie ſehr die Unbekanntſchaft mit den allgemeinen Zeichen ihre Einſicht zurück gehalten hatte. Davon liegt, deucht mich, ein Grund in der Natur der Sache. Nichts iſt gefährlicher als zu einſeitige Begriffe, aus einzelnen Geſichtspuncten gezogen. Wie leicht wird ein Verhältniſs von Gröſſen überſehen, worauf am Ende viel oder alles ankommt, wenn man nicht im Allgemeinen die Sachen überſieht? Allgemeine Begriffe erfodern aber allgemeine Zeichen. Wer die letztern nicht hat, in

diesen sich nicht ausdrücken kann, kann auch die Sache nicht in ihrer gehörigen Allgemeinheit vergleichen, ist also, bewahrt ihn nicht ausserordentlicher Scharfsinn und Aufmerksamkeit, allen den Fehltritten in seinem Raisonnement ausgesetzt, auf die zu eingeschränkte Begriffe hinleiten. Der Mann, der die Kunst erfunden hat, anstatt der Zahlen-Ziffern die allgemeinen Buchstaben-Zeichen zu setzen, hat dem menschlichen Verstande Flügel angesetzet. Wer diese nicht gebrauchen kann, muss dann natürlich öfters zurück bleiben, wo es doch nöthig war, weiter zu kommen. Die Erfahrung bestätiget diesen psychologischen Grund. Wer sind die Erfinder von den mancherley Planen von Wittwen- Waysen- und Todtencassen und dergleichen gewesen, womit das Publicum getäuscht ist? Lauter gute Zahlenrechner, aber keine Algebraisten, die durch Hülfe der allgemeinen Arithmetik die Sache im Allgemeinen hätten berechnen können.

Und dann kommt, wie ich meyne, noch dieß in Betracht. Kann es irgend einem Kopf, der im Stande ist, so einen Zusammenhang von Schlüssen durchzusehen, als die practischen mathematischen Wissenschaften erfordern, auch nur im geringsten mühsam

ſeyn, ſo viel von allgemeinen Zeichen und von der allgemeinen Rechenkunſt ſich bekannt zu machen, als dazu erfordert wird? Wer die Sachen erlernen kann, ſollte die Zeichen nicht erlernen können? Die nothwendigen nämlich, welche die Sachen erfordern, und welche nicht eingeſchränkter ſeyn müſſen als die bezeichneten Begriffe; denn ſonſt weiſs ich wohl, daſs man faſsliche Sachen durch den Ausdruck, aber durch den mit Worten ſo gut als durch den mit algebraiſchen Zeichen, dunkel und ſchwer machen könne. Hat es Beyſpiele gegeben, zumahl in der Arithmetik, wovon hier die Rede iſt (wie man mich hat verſichern wollen, wobey ich aber immer fragen möchte, ob nicht Schein mit untergelaufen ſey?) hat es wirklich Beyſpiele gegeben, daſs nämlich Männer alles begriffen haben in Zahlen, aber nichts, wenns in Buchſtaben ausgedruckt war, ſo weiſs ich dieſs nur aus einer gewiſſen Zärtlichkeit der Phantaſie zu erklären, die beym Anblick algebraiſcher Zeichen muthlos wird, weil ſie alles für ſehr ſchwer anſieht, was dahin gehört. Und wenn das iſt, ſo ſehe ich nicht, was daran gelegen ſey, wenn man nichts thut, dieſe Schwäche zu hegen oder zu nähren. *)

Was

*) Dieſe Vorrede war ſchon zum Abdruck fertig, als ich Hrn.

Was die Tabellen betrifft, die dieſer Einleitung angefüget ſind, ſo habe ich ſolche und ſo viele zuſammen genommen, als eine allgemeine Einleitung, die zu allen Arten von Verſorgungsanſtalten und auch näher für die Praxis ſeyn ſollte, zu erfordern

 ſchien.

Hrn. Hofrath *Karſtens* im vorigen Jahr herausgekommene *Theorie von Wittwencaſſen ohne Gebrauch algebraiſcher Rechnungen* ertheilt. Das iſt ein ſehr nützliches und empfehlungswürdiges Buch. Wenn ich behauptet hätte, daſs die Grundſätze der Theorie, und was zunächſt zu ihrer brauchbaren Anwendung gehört, ohne algebraiſche Zeichen nicht richtig, gründlich und bis dahin vollſtändig gelehret werden könnten, ſo würde ich hier durch ein Beyſpiel widerleget ſeyn. Allein das, was ich wirklich behauptet habe, wird durch dieſs Beyſpiel völlig beſtätiget. Einem Mann wie Hr. *Karſten* war es leicht, ſich in den gehörigen Geſichtspunct zu ſtellen, und alles in ſeiner Allgemeinheit zu überſehen. Ich glaube aber, er werde mir eingeſtehen, daſs derjenige, der dieſe ſeine Theorie durchſtudiret hat, nun zwar nach ihm einſehen werde, daſs ſie richtig ſey, allein doch auch noch mehr von des Verfaſſers algebraiſchen Rechenkunſt beſitzen müſſe, um in ähnlichen Fällen mit ſo viel Scharfſinn und Richtigkeit einen Plan zu prüfen, ich will nicht einmal ſagen, von neuem zu entwerfen, als Hr. *Karſten* es gekonnt hat. Das iſt der Mittelpunct der Frage. Ich weiſs kein Beyſpiel, daſs jemand mit Nutzen in dieſem Fach gearbeitet habe, der nicht mehr als bloſs mit Zahlen rechnen können.

ſchien. Anfangs hatte ich nur die zu der *Süſsmilchiſchen* von Hrn. *Baumann* corrigirten Mortalitätstafel gehörigen, wie Herr von *Drateln* ſie berechnet hat. Nachher fand ich in der vierten Ausgabe von des D. *Price* vorerwähnten *Obſervations &c.*, auch diejenigen, die ſich auf die *Northamptoner* und auf die *Schwediſche* Tafel beziehen, die ich nun nicht glaubte weglaſſen zu dürfen. Darüber wird Herr D. *Price*, wie ich hoffe, mir keinen Vorwurf machen. Denn die Käufer, welche ſein Buch diesſeits des Meers haben würde, wird er ohnedieſs haben. Er hat noch immer manches Eigene, was auch allgemein brauchbar iſt, und wer die Verſorgungsanſtalten in England kennen lernen will, kann es nicht entbehren. Die Zins- und Zeitrenten-Tabellen ſind gleichfalls von Herrn von *Drateln*. Dieſem vortrefflichen Manne habe ich überhaupt vieles bey dieſer ganzen Arbeit zu danken. Ich bin ihm das öffentlich zu ſagen ſchuldig. Er hat mich mit ſeiner groſsen Rechnungsfertigkeit unterſtützt, ſo oft ichs gewünſcht habe, und auch mit ſeinen Einſichten, die ſehr weit ſich verbreiten. Als Schriftſteller iſt er nicht bekannt, wenigſtens nicht ſehr bekannt, denn ſonſt hat er

einige

einige kleine Aufsätze geschrieben. Es müsste ihm leicht gewesen seyn es zu werden, wenn er seinen Kopf und sein ausserordentliches mathematisches Genie dazu hätte anwenden wollen. So aber lebt und arbeitet er unermüdet mehr für andere in practischen Geschäften, mit einer so edlen als seltenen Uneigennützigkeit, die zuweilen gar Sorglosigkeit für sich selbst zu seyn scheinen kann. Freylich bey so vieler nützlichen Geschäftigkeit kann er dann auf Schriftstellerruhm Verzicht thun.

Nach meiner ersten Ankündigung sollten zu dieser Einleitung noch einige besondere Abhandlungen hinzukommen, die näher die eigentlichen Wittwencassen angehen. Aber ich fand nachher, dass dieser Band dadurch zu stark werden würde. Sie sollen in einem eigenen Bande als ein Anhang zu diesem nachfolgen. Es sind ohne dieß noch einige mehr hinzugekommen, als ich Anfangs im Sinn hatte.

Da das Buch zu Leipzig gedruckt werden müssen, so würde ich der Druckfehler wegen unruhig gewesen seyn, wenn nicht der Herr Doct. *Gehler* daselbst die Güte gehabt, die Revision des Abdrucks

zu übernehmen. Aus einigen Probebogen ſehe ich, mit welcher vorzüglichen Sorgfalt er die Correctur beſorge, und befürchte alſo keine verunſtaltende Fehler. Ganz ſie zu vermeiden iſt bey dieſer Art von Schriften beynahe unmöglich. Die übrig bleiben, ſollen am Ende angegeben werden.

Erſtes

Erſtes Capitel.

Von Zeitrenten.

Erſter Abſchnitt.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

Von *Renten*, *Zeitrenten*, *Lebensrenten* überhaupt. §. 1.

Vom *Grundcapital* und *Zinsfuſs*. §. 2.

Anwachs eines Capitals durch Zinſen und Zinſen von Zinſen. Vom *Diſcontiren*. §. 3 — 5.

Von *halb-* *viertel-* und $\frac{1}{n}$*tel jährlichen* Zinſen. §. 6 — 12.

Berechnung der *Jahrrenten*. §. 12 — 17.

Von Renten auf *kleinere Termine*. §. 18 — 22.

Umänderung der Renten auf gewiſſe Termine in andere auf eine andere Zahl von Terminen. §. 23. 24.

Von *aufgeſparten* Renten. §. 25 — 29.

Zweyter Abſchnitt.

Von veränderlichen Zeitrenten.

Von *veränderlichen* Zeitrenten, inſonderheit ſolchen, die *in einem geometriſchen Verhältniſſe* wachſen ſollen. §. 30 — 32.

Von Renten, welche nach einem *arithmetiſchen Verhältniſſe* ſteigen. §. 33 — 36.

Zuſätze

zu dem erſten Capitel.

Anwachs eines Capitals durch *augenblickliche* Zinſen. §. 1 — 6.

Baarer Wehrt einer *Rente von augenblicklichen Terminen*. §. 7 — 13.

Wehrt einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen *wachsenden Jahrsrente* 1. §. 14.

Allgemeine Formeln für *veränderliche Zeitrenten*, die *nach Potenzen der natürlichen Zahlen* wachsen. §. 15—22.

Dergleichen Formeln für *augenblickliche* Renten. §. 23—25.

Zweytes Capitel.

Erster Abschnitt.

Von unveränderlichen Leibrenten.

Von *einfachen Leibrenten und Verbindungsrenten* überhaupt. §. 37.

Allgemeine Gründe der Leibrentenrechnung. §. 38—40.

Die *Altersergänzung*. §. 41.

Von *Mortalitätstafeln*, und insonderheit denen, die hier beygebracht sind. §. 42—46.

Mittlere Lebensdauer. §. 47—51.

Von der *wahrscheinlichen Lebensdauer*. §. 52—55.

Practische Methoden die *mittlere Lebensdauer* und die *Leibrenten* nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen. §. 56—58.

Eine andere Art zu rechnen, bey der aus dem *Wehrt der Erbschaft* der Wehrt der Leibrente gefunden wird. §. 59.

Noch eine Methode mit einer leichten Vorrichtung. §. 60. 61.

Von *Morgans* doppelter Rechnung. §. 62.

Methoden die nur *Näherungen* sind.

Rechnung nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben*. §. 63.

Art die Leibrente mittelst der *Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer* zu finden. §. 64.

Berechnung nach einem von *Süssmilchs* Tafel wenig abweichenden Gesetz der Sterblichkeit. §. 65. 66.

Verän-

Veränderung in dem Wehrt der Leibrente, wenn auch die unvollendeten Lebensjahre gerechnet werden. §. 67.

Vom Wehrt der Leibrenten bey *halbvierteljährlichen* und andern *terminlichen Hebungen*. §. 68.

Wie aus einer Leibrente für ein gewiſſes Alter dieſelbe für ein älteres und jüngeres gefunden werde. §. 69 — 72.

Wie aus Leibrenten nach einem *Zinsfuſs* andere nach einem andern gemacht werden. §. 73. 74.

Zweyter Abſchnitt.

Von veränderlichen Leibrenten.

Wehrt der Leibrente, die in einem *geometriſchen* Verhältniſſe ſteiget. §. 75. 76.

Wehrt *der arithmetiſch nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Leibrenten*. §. 77 — 81.

Dritter Abſchnitt.

Von aufgeſchobenen, aufhörenden und aufgeſparten Leibrenten.

Was dieſs überhaupt für Leibrenten ſind. §. 82.

Berechnung der *aufgeſchobenen Leibrenten*. 83 — 87.

Wie aus aufgeſchobenen Leibrenten die Wehrte der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen ſteigenden Leibrenten zu finden. §. 88. 89.

Von *aufhörenden* Leibrenten. §. 90. 91.

Von *aufgeſparten Leibrenten*. 92 — 95.

Von mehreren und *durch die Ruhe wachſenden Leibrenten*. 96. 97.

Vierter Abſchnitt.

Von dem Wehrt der Erbſchaft.

Der Wehrt der Erbſchaft, oder einer beym Tode zahlbaren Summe, oder die *Aſſeranz des Lebens*, *Einſatz in Todtencaſſen.* §. 98 — 100.

Critik des Hrn. Dr. *Price* über die gewöhnliche Art zu rechnen, und Vertheidigung der letztern. §. 101. 102.

Zuſätze

zu dem zweyten Capitel.

Von Leibrenten.

Beweiſe der Sätze in §. 49. von der *mittlern Lebensdauer.* §. 1. 2.

Zu §. 59. *vom Wehrt der Erbſchaft.* §. 3.

Zu §. 60. 61. betreffend die Methoden die Wehrte der Leibrenten zu finden. §. 4 — 7.

Beweis der Sätze von *Moivriſchen Leibrenten.* §. 8.

Zu §. 65 und 66. von den Formeln für die *mittlere Lebensdauer* und die Leibrente nach der *veränderten Süſsmilchiſchen Tafel.* §. 9. 10.

Von der *Sterblichkeitslinie.* §. 11.

Von der Verſchiedenheit der *mittlern* und der *wahrſcheinlichen Lebensdauer.* §. 12.

Zuſatz zu §. 67. §. 13.

Von *halb-* *vierteljährlich-* und *augenblicklich zahlbaren Leibrenten.* §. 14 — 18.

Von Renten, die nach einer *geometriſchen Reihe* ſich verändern. §. 19.

Von *arithmetiſch* oder gleichförmig *wachſenden Renten.* §. 20 — 26.

Zuſatz zu §. 101. betreffend die Berechnung *der Wehrte der Erbſchaft.* §. 27.

Drittes Capitel.

Erſter Abſchnitt.

Von der mittlern Dauer des Zuſammenlebens zwoer Perſonen.

Wie überhaupt die Zahl der von den anfänglichen *Paaren noch übrig gebliebenen* für jedes Jahr zu berechnen. §. 103.

Wie die Zahl der *getrennten Paare*, und der *ganz ausgeſtorbenen* zu finden. §. 104. 105.

Halleys Vortrag dieſer Lehren. §. 106 und 107.

Von *der mittlern Dauer des Zuſammenlebens*, des *Ueberlebens* und des *Ganzausgeſtorbenſeyns*. §. 100 — 114.

Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben. §. 115 — 117.

Wie mittelſt einer Hülfstabelle die *Verbindungsdauer* leicht gefunden werde. §. 117 — 122.

Wie auch die *Wehrte der gleichförmig wachſenden Leibrenten* mittelſt eben derſelben Tabelle gefunden werden.

Wie aus einer gegebenen Verbindungsdauer eine andere für zwo ältere oder jüngere gefunden werde. §. 123. 124.

Zweyter Abſchnitt.

Von den Verbindungsrenten zwoer Perſonen.

Baarer Wehrt der *Verbindungsrenten zwoer Perſonen.*

Wehrt des Ueberlebens, der *Wittwenrenten bey Eheleuten*. 125 — 131.

Methode die Verbindungsrenten mittelſt einer Hülfstabelle leicht zu finden. §. 132. 133.

Wehrt der *Verbindungsrenten* nach der Hypotheſe vom *gleichförmigen Sterben*. §. 134 — 136.

Morgans doppelte Rechnung für die Verbindungsrenten. §. 137.

Verglei-

Vergleichung der Verbindungsrente mit einer einfachen Leibrente. §. 138.

Umänderung der Verbindungsrenten in ähnliche nach einem andern Zinsfuſs. §. 139.

Wie aus gegebenen Verbindungsrenten die für ältere und jüngere Perſonen gefunden werden. §. 140 — 146.

Von *aufhörenden* und *aufgeſchobenen Verbindungsrenten.* Von *vorſchuſsweiſe*, von *halb-* und *vierteljährlich* und *augenblicklich* zu zahlenden *Verbindungsrenten.* §. 146. 147.

Wie *gleichförmig wachſende Verbindungsrenten* zu berechnen. 148. 149.

Dritter Abſchnitt.

Vom Zuſammenleben dreyer und mehrerer Perſonen.

Von der *Verbindungsdauer und von dem Wehrt der Rente* auf die Verbindung von *drey* Perſonen. §. 150. 151.

Berechnungsart derſelben. §. 152 — 154.

Aus gegebenen Verbindungsrenten für drey Perſonen andere für gleich ältere und gleich jüngere zu finden. §. 155 — 157.

Berechnung dieſer Rente nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben. §. 158. 159.

Wie durch die *Subſtitution eines einfachen mittlern Lebens ſtatt zweyer anderer*, ſo wohl die Dauer der Verbindung, als die Rente auf ſolche bey drey und mehr Perſonen zu finden ſey. §. 159 — 163.

Wie dieſs Verfahren zuverläſsiger werde. §. 164. 165.

Zuſätze

zum dritten Capitel, zum erſten Abſchnitt.

Von der Dauer des Zuſammenlebens zweyer Perſonen.

Zuſätze zu §. 113. betreffend die Correction der auf *ganze* Jahre berechneten Verbindungsdauer. §. 1 — 5.

Die

Die *mittlere Verbindungsdauer* nach der (Cap. I. §. 65.) *veränderten Süssmilchischen Tafel.* §. 6.

Beweis der Methode in §. 121. mittelst der beygebrachten Hülfstabelle die *Verbindungsdauer* zu berechnen. §. 7.

Wie aus einer gegebenen Verbindungsdauer zwoer Personen eine andere für zwo Personen gefunden werde, davon Eine um ein Jahr jünger ist, als in dem ersten Fall. §. 9.

Zusätze
zum zweyten Abschnitt.
Von den Verbindungsrenten zwoer Personen.

Beweis einer im §. 131. erwähnten Methode diese Rente zu berechnen. §. 10.

Beweis der Methode in §. 132. §. 11.

Von dem Wehrt der Verbindungsrenten nach der *Hypothese vom gleichförmigen Sterben* §. 12 — 16.

Wie aus gegebenen Verbindungsrenten für zwo Personen andere berechnet werden für zwo andere, davon Eine um ein Jahr jünger ist, als die erstern, zu finden §. 17.

Von der Correction der auf ganze Jahre berechneten Verbindungsrenten. §. 18.

Vergleichung der Verbindungsrente für zwo Personen mit einer Leibrente für eine Person, deren Lebensdauer so gross ist, als jener beyden Verbindungsdauer. §. 19. 20.

Von *gleichförmig wachsenden Verbindungsrenten für zwo* Personen. §. 21 — 25.

Zusätze
zum dritten Abschnitt.
Vom Zusammenleben dreyer und mehrerer Personen.

Beweis des im §. 152. gewiesenen Verfahrens die Verbindungsrente für *drey* Personen zu suchen. §. 26.

Von dem Wehrte der Verbindungsrenten für drey Perſonen *nach der geänderten Süſsmilchiſchen Tabelle.* §. 27 — 29.

Allgemeine Formeln für die Wehrte der Verbindungsrente von *drey* und mehreren Perſonen, nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben. §. 30 — 34.

Von den *gleichförmig wachſenden Verbindungsrenten* unter denſelben Bedingungen. §. 35 — 37.

Sätze und Formeln zum Beweis der Methode *durch die Subſtitution eines einfachen mittlern Lebens ſtatt zwey verbundener*, die Wehrte bey mehreren Perſonen zu finden. §. 38 — 45.

Viertes Capitel.

Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartſchaften.

Erſter Abſchnitt.

Von der Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens.

Geometriſche Vorſtellung der Art, wie die Zahl der nach Jahren *noch beſtehenden*, ingleichen der nach Jahren *getrennten* und *ganz ausgeſtorbenen Paare* gefunden werde. §. 166.

Eben dieſes *arithmetiſch.* §. 167.

Wahrſcheinlichkeit des *Ueberlebens* und des *Zugleichſterbens, und andere*, mit jenen nicht zu verwechſelnde, *Wahrſcheinlichkeiten.* §. 168 — 171.

Wie die Wahrſcheinlichkeit gefunden werde, daſs eine Perſon die andere *überlebe*, auf *ganze* Jahre berechnet. §. 172 — 176.

Wie ſie zu berechnen, wenn *überhaupt* die Eine länger leben ſoll als die andere. §. 177.

Zweyter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften im Fall des Ueberlebens.

Der jetzige Wehrt einer beym Tode einer Perſon zahlbaren Summe, unter der Bedingung, daſs eine andere jene überlebe. §. 178—185.

Von der Methode des *Moivre* und *Simpſon.* § 186.

Anwartſchaft auf eine beym Tode des *Längſtlebenden* von zwoen Perſonen zahlbare Summe. §. 187. 188.

Der Wehrt des Ueberlebens auf eine andere Art ausgedrückt als im Cap. III. §. 127. §. 189.

Dritter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften, die von dreyer Perſonen Leben abhangen.

Drey verſchiedene Claſſen der hieher gehörigen Aufgaben. §. 191.

Anwartſchaft auf eine Leibrente, die vom Leben oder Tode *zwoer* andern Perſonen abhängt: von *Waiſenpenſionen*, u. ſ. f. §. 192—199.

Die zwote Claſſe von Aufgaben. §. 200.

Von der *Wahrſcheinlichkeit, daſs drey gegebene Perſonen in einer beſtimmten Folge nach einander ſterben.* §. 201—209.

Wehrt der Erbſchaft, welche an eine gewiſſe Folge im Sterben unter drey Perſonen gebunden iſt. §. 210—218.

Inſonderheit wenn der *Erblaſſer zuletzt* ſterben ſoll, die beyden andern *in einer beſtimmten Folge* unter ſich ſchon vorher geſtorben ſeyn ſollen. §. 219—221.

Dritte Claſſe von Aufgaben, *vom Wehrt der Anwartſchaft auf eine Leibrente*, welche die Bedingung hat, daſs die zwo andern Perſonen in einer *beſtimmten Folge* geſtorben ſind. §. 222.

Zusätze

zum vierten Capitel.

Vom Ueberleben und davon abhängenden Anwartschaften.

Von der *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens einer Person* über eine andere, *auf Augenblicke* berechnet. §. 1—3.

Vom *Wehrt der Anwartschaft auf eine Erbschaft im Fall des Ueberlebens* einer über die andere. §. 4. 5.

Beweis des 52sten Satzes vom Wehrt des Ueberlebens einer Person über eine andere. §. 6.

Beweis des 58sten Satzes im §. 202. von der Wahrscheinlichkeit des *Zuerststerbens* einer Person aus drey gegebenen. §. 7. 8.

Beweis des 62sten Satzes im §. 207. betreffend den Wehrt der Anwartschaft aus einer Erbschaft von einer Person, im Fall *sie zuerst* stirbt von drey gegebenen Personen. §. 9. 10. 11.

Ein Zusatz zum §. 212. betreffend die *Summe der Reihe, welche die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens einer Person* über eine andere ausdruckt. §. 12.

Beweis zu §. 220. von der Anwartschaft auf eine beym Tode einer Person zahlbare Summe, welche *die zweyte im Sterben* ist; *unter drey* gegebenen. §. 13.

Beweis zu §. 218. vom Wehrt einer Anwartschaft auf eine *beym Tode der unter dreyen zuletzt sterbenden Person.* §. 14.

Beweis der Auflösung der Aufgabe im 65sten Satze §. 15—18.

Wie ohne die Hypothese vom gleichförmigen Absterben diese Aufgabe aufzulösen sey. §. 19. 20.

Beweis der Auflösung der Aufgabe im 66sten Satze. §. 21. 22.

Fünftes Capitel.

Von den Renten auf das längſte Leben.

Erſter Abſchnitt.

Von der Dauer des längſten Lebens aus mehreren Perſonen.

Die *mittlere Dauer des Längſtlebenden aus zweyen.* §. 223 — 225.

Wahrſcheinlichkeit, *daſs von Zweyen Einer nach gewiſſen Jahren noch lebe.* §. 226. 227.

Anmerkung über die Beſtimmung der *hiſtoriſchen Wahrſcheinlichkeit bey der Uebereinſtimmung mehrerer Zeugniſſe, oder bey ihrem Widerſpruch.* §. 228.

Das längſte Leben unter dreyen. §. 229. 230.

Ein Zweifel gegen die Beſtimmung des längſten Lebens wird gehoben. §. 231.

Allgemeine Beſtimmung des *längſten Lebens.* §. 232.

Noch eine andere Beweisart derſelben. §. 233.

Die Dauer des Ueberlebens des Längſtlebenden. §. 234 — 237.

Zweyter Abſchnitt.

Von Renten auf die Dauer des längſten Lebens.

Beſtimmung dieſer Rente auf *zwo* und *drey* Perſonen. §. 238 — 242.

Von *geſellſchaftlichen Renten*, die dem Längſtlebenden unter *zwo* und *drey* Perſonen ganz zufallen. §. 243 — 246.

Grundſatz der Tontinen. §. 247. 248.

Zuſätze

zu dieſem fünften Capitel.

Beweis zu §. 230 und 232. betreffend die *allgemeine Methode, die Dauer des Längſtlebenden zu finden.* §. 1. 2.

Methode des *Hrn. Fontana.* §. 3.

Bestimmung der Zeiten, in denen mehrere Personen nach und nach abgehen, im allgemeinen. §. 4—7.

Insonderheit bey Personen, die alle von gleichem Alter sind. §. 8—10.

Dauer des Ueberlebens einer bestimmten Person über andere, und Bestimmung *der Zeiten, wie die Verbindungen aufhören*, worinn diese bestimmte Person begriffen ist. §. 11—14.

Allgemeine Ausdrücke für die *Rentenwehrte auf die Dauer des Längstlebenden* und auf das *Ueberleben.* §. 15. 16.

Beweis des Satzes in §. 247. von *gesellschaftlichen Renten*, und *des Grundsatzes bey Tontinen.* §. 17—20.

Verzeichniss der Tabellen.

Tab I. Wehrte, wozu ein *Capital* 1. nach Jahren, durch Zinsen und Zinsen von Zinsen anwächst, oder *Wehrte von* r^x.

Tab II. Baarer Wehrt einer nach Jahren zahlbaren Summe 1. oder, *Werthe von* $\frac{1}{r^x}$.

Tab. III. Baarer Wehrt einer Jahrrente 1. auf gewisse Jahre. (Wehrte von *S.* $\frac{1}{r^x}$).

In der ersten Tabelle stehen die Wehrte auch für 2 Pr. C., in der zweyten und dritten die für 6 Pr. C. Aus einer Zahl in der ersten findet man leicht die dazu gehörige in der zweyten, und umgekehrt. Daher kann es bey solchen Zinsen, die nicht so häufig vorkommen, schon genügen, wenn nur eine von diesen beyden Tabellen nach einem gewissen Zinsfuss berechnet ist.

Tab. IV. Die *Süssmilchische Sterblichkeits-Tafel*, nach der Berichtigung des Hrn. *Baumanns in der vierten Ausgabe der göttl. Ordnung.* 1775.

Tab. V. Die *Northamptoner Sterblichkeits-Tafel.* Aus Hrn. *Dr. Price Observat. on reversion. Paym.* Vol. II. vierte Ausgabe. 1782.

Tab.

Tab. VI. Die *Schwedische Sterblichkeits-Tafel von Wargentin.* Aus Dr. *Price.*

Tab. VII. Die *Sterbens-Ordnung der Rentenirer* nach *Deparcieux.* Wie Hr. *Florencourt* sie eingerichtet hat.

Tab. VIII. Die *Halleyische Sterblichkeits-Tafel* aus Breslau.

Tab. IX. Die *Londoner Sterblichkeits-Tafel* nach *Simpson.*

Tab. X. Die Sterbensordnung nach *Kerseboom* aus *Holland* und *Westfriesland.*

Tab. XI. Die Sterbensordnung nach Hrn. *Baumanns* Tafel aus der *Churmark.*

Tab. XII und XIII. Die Ordnung des Sterbens für *die beyden Geschlechter*, jedes *besonders*, nach *Wargentin*, nebst der *mittlern Lebensdauer.*

Tab. XIV. Sterbensordnung für *Ehemänner* und *Ehefrauen besonders*, nach Hrn. *Kritter*, vom 20sten Jahr an, nebst der *mittlern Lebensdauer.*

Tab. XV. Die *mittlere Lebensdauer* nach den vornehmsten Sterblichkeits-Tafeln.

Tab. XVI. *Leibrenten* nach der *Süssmilchischen* Tafel nach dem 3, 4 und 5. Procent-Fuss.

Auch *ihr Werth in Procenten.*

Tab. XVII. *Leibrenten* nach der *Northamptoner* Tafel, auf 3, 4, 5 Procent.

Tab. XVIII. *Leibrenten* nach der *Wargentinischen* Tafel auf 4 und 5 Procent.

Tab. XIX. *Leibrenten* nach *Deparcieux*, auf 5 Procent.

Tab. XX. *Leibrenten* für die *verschiedenen Geschlechter* nach *Wargentin*, auf 4 und 5 Procent.

Tab. XXI. Wehrt der beym Tode einer Person zahlbaren Summe 1. Zinsen zu 4 Procent.

Tab. XXII und XXIII. Die *mittlere Dauer der Verbindung zweyer Personen*; imgleichen die mittlere Dauer des

Seite 53 Zeile 3 ſtatt $\frac{3^2}{1^2}$ ſoll ſtehen $\frac{3^3}{1^3}$.

— 58 — 13. 14. 18. 19 iſt L ſtatt K, und K ſtatt I zu ſetzen.

— 64 — vorletzte, ſtatt $p'^{m+1}\frac{p}{r^x}$ muſs ſtehen $p'^{m+1} — \frac{p}{r^x}$

— 95 — 14 ſtatt r^{a+5} ſoll ſtehen r^a.

— 96 — 12 ſtatt $\frac{r^a S}{A}$ muſs ſtehen $\frac{r^{x-1} S}{A}$.

— 100 — 7 ſtatt $\frac{\frac{a}{-}A}{A : r^x}$ ſoll ſtehen $\frac{\frac{a}{-}A}{A . r^x}$.

— 104 — 13 ſtatt *Warwicher* lieſs *Worwicher*.

— 109 — 18 ſtatt 4,8197 muſs ſtehen, 5, 8197

— 113 — 16 ſtatt $\frac{1}{2}\int(66 - a))$ muſs ſtehen $\frac{1}{2}\int(66 - a)^2)$

— — — 17 ſtatt 85,25 lieſs 85.5

— 115 — 1 und 2 ſtatt $\frac{7}{7^x}$ lieſs $\frac{1}{8}$.

— 156 — 9 und 11 ſtatt p ſetze man P.

— 159 — 13 ſtatt $+\int\frac{1}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}$ ſetze man $+\frac{1}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}$

— 162 — 2 ſtatt *Dieſs giebt* muſs ſteh. *ſo giebt dieſs.*

— — Z. 4 ſtatt $\frac{\frac{a}{-}A - x\delta}{\frac{a}{-}A}$ muſs ſteh. $\frac{\frac{a}{-}A - x\,d}{\frac{a}{-}A}$

— — ſtatt $\frac{x(\delta - \frac{1}{2}\delta)}{\frac{a}{-}A}$, muſs ſteh. $\frac{x(d - \frac{1}{2}\delta)}{\frac{a}{-}A}$.

— — 12 ſtatt $+\frac{x(x-1)\delta'}{2}$ m. ſt. $-\frac{x(x-1)\delta'}{2}$.

— 163 Z. 2 iſt hinzuzuſetzen hinter $\frac{1}{2}$: *wo auch das letzte Jahr und die Ergänzung* $\frac{1}{2}$ *mitgenommen iſt.*

Seite

Seite 164 *Zeile* 4 ſtatt $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{-A.r^{66-a}}$ m. ſt. $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{-A.r^{66-a}}$ ...

— 173 — 7 ſtatt $\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^2 A}{r^{\frac{1}{2}}}$ muſs ſteh. $\frac{1}{4} \frac{\Delta^2 A}{r^{\frac{1}{2}}}$.

— 175 — 17 ſtatt $\frac{1}{2} \frac{1}{4} : \frac{-A}{r^1}$ m. ſt. $\frac{1}{2} : \frac{1}{A} \cdot \frac{-A}{r^1}$

— 176 letzte Zeile ſtatt $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}} \lambda \overline{a}\right.$,

muſs ſtehen $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \lambda \overline{a}$.

— 179 Z. 11 ſt. $\frac{-2A' + \frac{2}{4}\Delta - A}{r^{1\frac{1}{4}}}$, m. ſt. $\frac{-2A + \frac{2}{4}\Delta - A}{r^{1\frac{1}{4}}}$

— — 12 ſt. $\frac{-A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{1\frac{1}{4}}}$, muſs ſt. $\frac{-A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{\frac{5}{4}}}$

— 184 — 5 ſtatt $p'\left(p' - \frac{p}{r}\right)$ m. ſt. $p'\left(p' - \frac{p'}{r}\right)$

— 191 Zeile 8 ſtatt $+\lambda\overline{a}$ muſs ſtehen $+\frac{\lambda\overline{r}}{r}$.

— 217 — 20 in den Zahlen muſs ſtatt 412889 geſetzet werden 413889

— 224 — 19 ſtatt $\alpha = 70$ muſs ſtehen $\alpha = 70,6$

— 246 — 4 ſtatt 0,6053 muſs ſtehen 0,8053

— 250 — 5 ſtatt, *mittlere Dauer der Verbindung* iſt zu leſen, *mittlere Dauer der mittlern Dauer der Verbindung*

— — Z. 21 Hier iſt das Wort *alſo* auszulöſchen.

— 283 letzte Zeile, ſtatt, *weniger* $\frac{1}{4}$ muſs ſtehen *weniger* $\frac{1}{4}$

— 284 Z. 9 ſtatt *daſs* lieſs, *wenn*,

Seite 293 *Zeile* 2, 3. 4, 5 ſtatt des Factor $\frac{1}{A}$ ſoll ſtehen $\frac{1}{AB}$.

— — Zeile 5 ſtatt $\Delta^{\frac{n-3}{3}}A$ muſs ſtehen $\Delta^{\frac{n-1}{3}}A$.

— 303 — 3 ſtatt $S.\int\frac{{}^{1}B}{r}$ m. ſt. $\frac{1}{r^b}\cdot S.\int\frac{{}^{1}B}{r}$.

— 309 — 14 ſtatt, *der Rechnung*, lieſs *zur Rechnung*.

— 310 erſte Zeile, ſtatt $\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$ lieſs $\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}$.

— 314 nächſt letzte Zeile, ſtatt *Berechnung* lieſs *Benennung*.

— 317 Z. 9 ſtatt $3p.\lambda\overline{a\,b} - 2p.\lambda\overline{b}$ ſoll ſtehen $3p\lambda\overline{a\,a} - 2p\lambda\overline{a}$.

— 319 Z. 8 ſtatt ${}^{1}A\ {}^{2}B$ lieſs ${}^{1}A\ {}^{1}B$.

— — Z. 13 ſtatt $\frac{\lambda\overline{a\,b}}{r}+\left(\frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{r}+\right.$ ſoll ſtehen

$$\frac{L\overline{a\,b}}{r}+\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{r}+\right.$$

— 321 Z. 12 ſtatt $-\frac{1}{ABC}\left({}^{2}A.\ {}^{2}B\right)\int\frac{{}^{3}C}{r^3}$.

ſoll ſtehen $-\frac{1}{ABC}\cdot\Delta\left({}^{2}A\ {}^{2}B\right)\int\frac{{}^{3}C}{r^3}$

— 326 Z. 3 ſtatt $(\alpha - px - qx).(\alpha' - q'x - q'x^2)$ ſoll ſtehen $(\alpha - px - qx^2).(\alpha' - p'x - q'x^2)$.

— — Z. 17 ſtatt $+pp'p''$ ſoll ſtehen $-pp'p''$.

— 333 — 1 ſtatt $(k - kz^{k-1}p +$ ſoll ſtehen

$(z^k - kz^{k-1}p +$

Seite

Seite 333 letzte Zeile, ſtatt $L\overline{a\,b}$ ſoll ſtehen $L\overline{a\,b\,c}$.

— 334 Z. 1 ſtatt $+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^3dx}{r^x}$

ſoll ſtehen $+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{x^3dx}{r^x}$

Ebend. Z. 5 ſtatt $-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^3dx}{r^x}$ ſoll ſtehen

$-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\,P\int\frac{x^3dx}{r^x}$.

— 355 — 13 ſtatt: *einige zu den Uebriggebliebenen Nk*, muſs es heiſsen: *einige zu den Ausgeſtorbenen Bk, andere zu den Uebriggebliebenen Nk*,

— 358 — 8 ſtatt $\frac{S^{-1}A\Delta A}{BA}$ muſs ſtehen $\frac{S^{-1}B\Delta A}{BA}$.

— 360 und 361. In den §§. 170 und 171 iſt für *das n te Jahr*, zu leſen, *das (n+1)te*, und für *das (n+1)te das (n+2)te*.

— 363 letzte Zeile, ſtatt $\frac{\overline{\overline{n+1}}A}{A}\cdot\frac{\Delta B}{B}$ muſs ſtehen

$\frac{\overline{\overline{n+1}}A}{A}\cdot\frac{\Delta\overline{\overline{n}}B}{B}$.

— 367 Z. 12 ſtatt $Ca\overline{(b-1)}\,C\overline{a\,b}-+\frac{\Delta\overline{\overline{-1}}B}{B}$

muſs ſtehen $Ca\overline{(b-1)}-C\overline{a\,b}+\frac{\Delta\overline{\overline{-1}}B}{B}$

— — Zeile 16 ſtatt $\frac{S^{-1}A.\,\Delta\overline{\overline{-1}}B}{A.\,B}$ muſs ſtehen

$\frac{S^{-1}A.\,\Delta B}{A.\,B}$

Seite

Seite 370 *Zeile* 21 und letzte, für = 0,064 lieſs = 0,066.

— 373 — 15 ſtatt = 14,689 lieſs = 14,589

— 384 — 13 für $\frac{1}{2}\lambda_{a,b}$ lieſs $\frac{1}{2}\lambda_{a,b}$

— 389 — 18 ſtatt *das Geld zahlbar, ſobald* lieſs, *die Summe zahlbar oder nicht zahlbar, ſobald*

— 397 — 9 $1+\frac{\lambda_{a+1}}{r}$ lieſs $1+\lambda_{a+1}$.

— — Zeile 10. 11. 12 ſtatt $1+\frac{\lambda_{a+1}}{r}$ muſs ſtehen $\frac{1+\lambda_{a+1}}{r}$, und ſtatt $\left(1+\frac{\lambda_{a+2}}{r^2}\right)$ und $\left(1+\frac{\lambda_{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$ muſs ſtehen $\left(\frac{1+\lambda_{a+2}}{r^2}\right)$ und $\left(\frac{1+\lambda_{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$.

— 409 Unten in der Note für §. 3. lieſs §. 8.

— 410 Z. 10 muſs nach den Worten, *wenn C ſtirbt*, zugeſetzet werden, *und dit, daſs B todt ſey und A noch lebe, wenn C ſtirbt*,

— 427 Z. 6 ſtatt $\frac{\Delta^{-1}A.\ \Delta^{-1}B}{A\,B}$ muſs ſtehen $\frac{\Delta^{-1}A\ \Delta^{-1}B}{2.\ A\,B}$.

— 438 — 7 ſtatt $CA^{-1}B$ muſs ſtehen $C^{-1}A^{-1}B$

— 444 — 7 und 10 für *jüngſte Perſon* lieſs *älteſte Perſon*.

Seite

Seite 467 *Zeile* 11 für $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon - 1}\right.$ ſetze man $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{n-1} - 1}\right)$

— 485 — 13 ſtatt zweymal $+ \frac{S.\frac{1}{A}\frac{1}{B}}{A.B}$ muſs einmal ſtehen $+ \frac{S.\frac{1}{A}\frac{1}{C}}{A\,C}$

— 496 letzte Zeile, für (§. 134.) lieſs (§. 234.)

— 519 Z. 8 für C. Q lieſs C. $\overline{Q}$.

Erſtes

Erſtes Capitel.

Von Zeitrenten.

Erſter Abſchnitt.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

I.

Erklärungen. Unter *Renten* kann im allgemeinen jede Geldeinnahme verſtanden werden, die nach gewiſſen gleichen Zwiſchenzeiten, oder *terminlich*, erhoben wird.

Der *Rentenier* iſt derjenige, der die Einnahme zu empfangen hat. Iſt ſie für eine baare Summe Geldes gekauft, ſo heiſst dieſe Summe die *Miſe* und der, welcher ſie verkauft hat, der *Entrepreneur*.

Wird die Rente *jährlich* bezahlt, ſo heiſst ſie eine *Jahrrente (Annuität)*; ſie iſt eine *Halbjahrsrente*, *Vierteljahrsrente*, *monatliche Rente*, nach der Gröſse der Zwiſchenzeiten; überhaupt eine *Zeitrente*.

Es ist eine *gewisse Rente*, wenn sie auf eine bestimmte Zahl von Terminen, Jahren, Halbjahren, Vierteljahren, Monaten u. s. f. *gewiss* zu bezahlen ist. *(Annuity certain.)* Diese kann den allgemeinen Namen der *Zeitrente* behalten. Hängt ihre Auszahlung aber ab von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen, so wird sie eine *Lebensrente.*

Ist die Einnahme in jedem Termin von gleicher Grösse, so ist die Rente *unveränderlich.* Gewöhnlich schliesst man auch dies in dem Begriff von der Rente ein. Sie kann aber auch *veränderlich* seyn. Hängt diese Veränderung von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen ab, so ist sie eine *veränderliche Lebensrente.* Die *Tontinen* gehören hieher. Ist die Veränderung, ohne dass es aufs Leben oder Sterben von jemanden ankomme, sonst durch eine allgemeine Regel festgesetzt, so heissen sie *veränderliche Zeitrenten.*

2.

Erklärung. Ein Capital, welches in einem Jahr 1 *Rthl.* Zinsen trägt, ist das *Grundcapital.* Es soll hier durchgehends im allgemeinen durch p bezeichnet werden. Die Engländer nennen es *Perpetuity.* Von *jährlichen* Zinsen ist die Rede, wenn nicht ausdrücklich ein anders erinnert wird. Statt des 1 R. Thalers kann jede andere Einheit gesetzet werden.

Zusatz 1. Die *jährlichen Zinsen* eines Capitals 1, sind $= \frac{1}{p}$. Es sey ferner das durch die Zinsen Eines

Jahrs

Jahrs gewachsene Capital zu dem anfänglichen Capital, oder $1 + \frac{1}{p} : 1 = r$, so heisst r der *Zinsfuss;* und $r - 1$ die *Zinsen* von 1.

Zusatz 2. Dann ist auch $p = \frac{1}{r-1}$.

Zusatz 3. Für 3 *Procent*, ist $r = 1{,}03$; $p = 33\frac{1}{3}$.
Für 4 — — — $r = 1{,}04$; $p = 25$.
Für 5 — — — $r = 1{,}05$; $p = 20$.

3.

Satz 1. Ein baares Capital C sey nach x Jahren, Zinsen und Zinses Zinsen gerechnet, angewachsen zu Z, so ist $r^x C = Z$; oder *das gegebene anfängliche Capital multiplicirt mit dem Zinsfuss, in der Potenz genommen, die so gross ist als die Zahl der Jahre, giebt die Grösse, wozu das erste Capital angewachsen ist.*

Und der *jetzige* oder *baare Wehrt* von einer Ausgabe (oder Einnahme) Z, die nach x Jahren erfolgen soll, ist $= \frac{Z}{r^x}$. Das heisst, wenn die künftige Ausgabe nach gewissen Jahren, mit dem Zinsfuss in der Potenz, so gross als die Zahl der Jahre, dividirt wird, so bekommt man den *gegenwärtigen* oder *baaren Wehrt der künftigen Ausgabe.*

Beweis. Es kann dieſs aus der Zinsrechnung hier als ein Grundsatz angesehen werden. Der Beweis davon ist aber leicht. Denn:

Wie $1 : r$ so ist am *Ende des ersten Jahrs* C zu Cr.
Wie $1 : r$ so - - - - - *zten* — $Cr : Cr^2$.

Wie 1 : r ſo iſt am *Ende des 3ten Jahrs* $Cr^2 : Cr^3$.

Wie 1 : r ſo . . . . . *xten* — $Cr^{x-1} : Cr^x$.

Das iſt am Ende des *xten* Jahrs iſt aus C geworden $Z = Cr^x$.

Zuſatz. Woraus denn von ſelbſt folgt, daſs, wenn Z gegeben iſt, auch $Z : r^x = C$ iſt.

Die Summe Z ſo verändern, heiſst, ſie auf x Jahre *zurük discontiren.*

4.

Die *erſte Tabelle* enthält die Wehrte von r^x, bis auf 100 Jahre, für unterſchiedene *Zinsfüſse*, oder nach verſchiedenen Procenten. Einige dieſer Wehrte ſind bis auf 10 Decimalziffern genau berechnet. Es giebt Fälle, wo man ſie ſo weit nöthig hat. Die Art, wie dieſe Tabelle gebraucht wird, iſt für ſich einleuchtend. Z.B. Welche Summe entſteht aus 1556 Rthl. nach 35 Jahren, wenn die jährlichen Zinſen 4 Procent, jedesmal wiederum zu Capital gemacht werden? Man multiplicire die gegebene Summe 1556 mit der Zahl 3,94609, die in der Tabelle bey dem 35*ſten* Iahre ſteht, wenn man nämlich nur bis 5 Decimalziffern zu gehen hat. Dieſs macht 6140,11604 Rthl. Das iſt die geſuchte Summe.

Sucht man den baaren Wehrt einer nach 10 Jahren erſt zahlbaren Summe von 1000 Rthl., ſo bedient man ſich der *zwoten* Tafel. Der geſuchte Wehrt iſt $\frac{1}{r^x} . 1000$ Rthl. Wo $x = 10$ iſt, ſteht in der Tabelle für $\frac{1}{r^x}$, wenn

4 Pro-

4 Procent gerechnet wird, der Decimalbruch 0,67556. Dieſs mit 1000 multiplicirt macht $675\frac{556}{1000}$ Rthl.

5.

Die Procente 3, 4, 5 ſind die gewöhnlichſten. Daher ſind die Wehrte in den beyden erſten Tabellen für dieſe Procente bis auf 10 Decimalziffern berechnet. Bey andern Procenten war das nicht nöthig.

Wenn man keine Tabellen hat für verſchiedene Procente, ſo kann man ſich ſo helffen. Man ſuche Cr^x für einen gewiſſen Zinsfuſs r. Ein anderer Zinsfuſs ſey ϱ, ſo iſt $C\varrho^x : Cr^x = \frac{\varrho^x}{r^x}$. Dieſs ſey $= V$. Alsdenn iſt

$$x.\ (\log.\ \varrho - \log.\ r) = \log.\ V.$$

und $Cr^x . V = C\varrho^x$.

Wenn $r = 1{,}04$, ſo iſt

für $\varrho = 1{,}045$; oder was einerley iſt, für $4\frac{1}{2}$ Procent

$\log.\ \varrho - \log.\ r = 0{,}0020830$

für $= 1{,}055$; — — — $= 0{,}0062192$

— $= 1{,}06$; — — — $= 0{,}0083726$

— $= 1{,}035$; — — — $= 0{,}0020930$

— $= 1{,}02$; — — — $= 0{,}0084331$.

Ex. Das Capital von 1556 Rthl. macht nach dem Zinsfuſs $r = 1{,}04$ nach 35 Jahren die Summe 6140, 11604 Rthl., wie viel macht ſolches nach dem Zinsfuſs $= 1{,}045$, oder $4\frac{1}{2}$ Procent?

Man multiplicire 0,0020830 mit 35. Dieſs macht $0{,}0729050 = \log.\ V$. Alſo $V = 1{,}1828$. Folglich $6140{,}11604 . 1{,}1828 = 7262{,}5$ Rthl.

Weiter kann man die Decimalziffern nicht brauchen. Die letzte Ziffer in V, iſt 0,0008. Dieſe iſt ſchon nicht völlig genau. Daher in dem Product $6000 \times 0{,}0008 = 4{,}8$ die letzte Ziffer 8 es auch nicht iſt. Ueberhaupt iſt der Gebrauch der Logarithmen in dieſen Rechnungen nur ein Nothbehelf. Oft geht mehr an Genauigkeit dadurch verloren, als an Abkürzung der Arbeit gewonnen wird. Ein geübter Rechner macht ſich aus ihrer Hülfe nicht viel.

6.

Zuſatz 1. Wenn die Hälfte der *jährlichen* Zinſen *halbjährlich*, ein *Viertheil* von jenen *viertheiljährlich* eingenommen wird, und ſogleich wiederum untergebracht werden kann, ſo iſt der Wehrt eines Capitals $C =$ nach x Jahren, oder $Z = \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^{nx} . C$. Die Zahl n zeiget an, der wie vielte Theil eines Jahrs die Termine für die Zinſen ſind, und $r - 1$ iſt der jährliche Zins, davon $\frac{r-1}{n}$ in jedem Termin abgetragen wird.

Wenn *halbjährlich* die Zinſen empfangen werden, ſo iſt $Z = \left(\frac{r+1}{2}\right)^{2x} . C$. Denn da $r - 1$ der *jährliche* Zins iſt, und alſo $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$, $\frac{r-1}{n}$, der halb- der vierteljährlich, und $\frac{1}{n}$ teljährlich einzunehmende Theil davon, ſo iſt das um die Zinſen gewachſene Capital 1 in Einem ſolchen Termin $= 1 + \frac{r-1}{2}$; $1 + \frac{r-1}{4}$; $1 + \frac{r-1}{n}$. Dieſe Zahlen ſind nun hier, was r vorher war.

war. Zugleich sind aber auch in x Jahren nx Termine. Folglich ist $Z = \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^{nx}$. C.

7.

Zusatz 2. Wenn die *jährlich* zu zahlenden Zinsen von 1 als Capital, $r-1$ sind, so können die *halbjährlichen* nicht die Hälfte davon $\frac{r-1}{2}$ seyn, wenn nämlich Zinsen auf Zinsen für jeden Termin gerechnet werden. Ist $\frac{r-1}{2}$ der halbjährliche Zins von 1, so wird aus dem Capital C am Ende zweyer halben Jahre, das ist, am Ende eines Jahres $\left(\frac{r-1}{2}\right)^2$. C; und da das Capital selbst C ist, so ist der jährliche Zins auf das Capital 1, so viel als $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - 1$.

Also ist der Zinsfuss $= \left(\frac{r+1}{2}\right)^2$, nicht aber r.

Ist der $\frac{1}{n}$teljährliche Zins $= \frac{r-1}{n}$, so ist der jährliche Zins $\left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^n - 1$, und der Zinsfuss auf jährliche Zinsen $= \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^n$.

Wenn der Zinsfuss r derselbige bleiben soll, für die ganzen Jahrszinsen, so ist das Capital C nach einem Jahr $=$ C. r.

Es sey der *halbjährliche* Zinsfuss, der das Capital in derselbigen Zeit eben so hoch bringt, ϱ, so ist C. $\varrho^2 =$ C. r. also ist $\varrho = r^{\frac{1}{2}}$. Folglich der *halbjährliche Zins* von $1 = r^{\frac{1}{2}} - 1$, wenn der jährliche $= r - 1$ ist (§. 2.)

Iſt ϱ der Zinsfuſs für $\frac{1}{n}$teljährliche Zinſen, ſo iſt $C.\varrho^n = C.r$, und wiederum $\varrho = r^{\frac{1}{n}}$, und der $\frac{1}{n}$teljährliche Zins von 1 iſt $= \varrho - 1 = r^{\frac{1}{n}} - 1$.

Z. B. Wer 4 Procent jährlich zu zahlen hat, in welchem Fall $r - 1 = 0,04$ iſt, zahlt eben ſo viel, wenn er halbjährlich 0,019804. giebt, vorausgeſetzt nämlich, daſs die Zinſen ſogleich wieder genutzet werden können. Denn $r^{\frac{1}{2}} = (1,04)^{\frac{1}{2}} = 1,019804$, und $r^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,019804$. Iſt $C = 10000$ Rthl., ſo iſt für 4 Procent die Intereſſe in Einem Jahr 400 Rthl., dagegen die Summe der beyden halbjährlichen Zinſen in dieſem Fall nur 396,08 Rthl. ausmacht, wobey doch auch zu bemerken, daſs der Unterſchied nur gering iſt.

Um die Vergleichung der *halb-* und *vierteljährlichen Zinſen* mit den *ganzjährlichen* zu erleichtern, ſetze ich folgende Tabelle her. Sie iſt noch weiter unten brauchbar.

Für $r = 1,03$ iſt $\sqrt{r}$ od. $r^{\frac{1}{2}} = 1,014889$, u. $\sqrt{\sqrt{r}}$ od. $r^{\frac{1}{4}} = 1,007417$

Für $r = 1,04$ iſt - - $r^{\frac{1}{2}} = 1,019804$, u. - - $r^{\frac{1}{4}} = 1,009853$

Für $r = 1,05$ iſt - - $r^{\frac{1}{2}} = 1,024695$, u. - - $r^{\frac{1}{4}} = 1,012272$

Für $r = 1,035$ iſt - - $r^{\frac{1}{2}} = 1,017349$, u. - - $r^{\frac{1}{4}} = 1,008637$

Für $r = 1,045$ iſt - - $r^{\frac{1}{2}} = 1,022252$, u. - - $r^{\frac{1}{4}} = 1,011064$

Für $r = 1,06$ iſt - - $r^{\frac{1}{2}} = 1,029563$, u. - - $r^{\frac{1}{4}} = 1,014674$

8.

Zusatz 3. Ein Capital C, das an jährlichen Zinsen 4 Procent giebt, verhält sich zu einem andern C′, das an halbjährlichen Zinsen 2 Procent trägt, wie 2 : 1,9804. wenn die Zinsen von beyden gleich sind. Denn die halbjährlichen Zinsen von C sind $= C.\left(r^{\frac{1}{2}}-1\right)$, die solche von C′ sind $= C'.\left(\frac{r-1}{2}\right)$. Sind nun beyde Zinsenpöste gleich, so ist

$$C\left(r^{\frac{1}{2}}-1\right) = C'\,\frac{(r-1)}{2}, \text{ und}$$

$$C : C' = \frac{r-1}{2} : r^{\frac{1}{2}} - 1 = 2 : 1{,}9804.$$

Zusatz 4. Ueberhaupt wenn ein Capital C, dessen jährliche Zinsen $r-1$ von 1 sind, eben so viel an Zinsen bringen soll, als ein anders C′, dessen Zinsen in jedem $\frac{1}{n}$tel Theil des Jahrs fällig, und dann $\frac{r-1}{n}$ von 1 sind, so muss $C : C' = \frac{r-1}{n} : r^{\frac{1}{n}} - 1$ seyn.

Die Differenz zwischen beyden ist:

$$= C.\left(\frac{\frac{r-1}{n} - \left(r^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{r-1}{n}}\right).$$

9.

Zusatz 5. Wenn *n unendlich* gross ist, das ist, wenn die Zinsen alle Augenblicke fällig sind, und dann auch jedesmal $= \frac{r-1}{n}$ von 1; so wird das anfängliche Capital nach x Jahren zu $C.\,e^{(r-1)x}$ anwachsen, wo e

die Zahl iſt, deren *natürlicher Logarithmus* 1 iſt, das iſt $e = 2,7182818\ldots$

Iſt $r = 1,04$, ſo iſt $r - 1 = \frac{1}{25}$. Bey dieſem Zinsfuſs ſteigt das Capital alſo in 25 Jahren auf $2,718\ldots$ C. was, wenn bloſs jährliche Zinſen gerechnet werden, nur zu $2,666\ldots$ C. kommen würde. Den Beweis hiervon ſehe man in den *Zuſätzen zu dieſem Capitel.* *)

10.

Zuſatz 6. Weil $C.r^x = Z$, ſo iſt auch $\frac{Z}{C} = r^x$, und $\frac{\log. Z - \log. C.}{x} = \log. r.$

Das iſt, es wird der Zinſenfuſs für jährliche, halb- und vierteljährliche, und überhaupt für gewiſſe *terminliche* Zinſen gefunden, wenn man weiſs, um wie viel ein gewiſſes Capital in einer beſtimmten Zahl von dergleichen Terminen gewachſen iſt.

11.

Zuſatz 7. Wenn ein *Capital C* in einem ſolchen Verhältniſs *abnimmt*, wie es vorher durch die Zinſen und Zinſen von Zinſen als wachſend angeſehen iſt, und wiederum p das *Grundcapital* iſt, deſſen terminliche Abnahme 1 iſt, ſo wird die *Abnahme* in dem *erſten* Termin betragen $\frac{C}{p}$, und alsdenn übrig ſeyn $\left(\frac{p-1}{p}\right)$ C. Wird $\frac{p-1}{p} = q$, der Verminderungsfuſs genannt, wie oben

*) §. 1.

oben r der Zinsfuſs heiſst, ſo iſt nach x Terminen der Reſt von dem anfänglichen Capital, oder $Z' = C. q^x$.

Es iſt nämlich im *erſten* Termin übrig $\frac{p-1}{p}$. C. Im *zweyten* alſo $\left(\frac{p-1}{p}\right)^2$. C, weil $1 : \frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{p} . C :$ $C \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = C. q^2$, und ſo ferner für die folgende Termine.

„Ein Capital kann auf dieſe Art, da es in einem *geo-*„*metriſchen* Verhältniſs abnimmt, nie ganz auf Nichts „kommen, aber bald unerheblich klein werden.“

12.

Die *dritte Tabelle* enthält die baaren Wehrte der *Jahrrenten* 1 auf gewiſſe Jahre. Sie wird gemacht durch die Summirung der Zahlen der nächſt vorhergehenden Disconto-Tafel. Die zu jedem Jahr gehörigen Wehrte können durch $\int \frac{1}{r^x}$ bezeichnet werden. Sonſt werden dieſe Rentenwehrte auch nach dem nächſt folgenden Lehrſatz, ohne viele Weitläuftigkeit berechnet.

Für den Zinsfuſs 2, 3, 4 und 5 Procent iſt dieſe Tafel, auf mehrere Decimalziffern von Hr. von Drateln berechnet.

Uebrigens iſt die Art, wie ſie zu gebrauchen ſey, von ſelbſt einleuchtend. Will Z. B. jemand 10 Jahre nach einander jedes Jahr, am Ende deſſelben, 10 Rthl. empfangen, ſo iſt nach 4 Procent gerechnet der baare Wehrt dieſer Jahrrente 10. 8, 110896 Rthl. $= 81\frac{1}{10}$ Rthl.

13. *Satz*

13.

Satz 2. Der baare Wehrt einer Zeitrente r, welche auf eine Zahl von Terminen, jedesmal am Ende des Termins, gezahlet werden ſoll, iſt gleich dem Reſt, der übrig bleibet, wenn man von dem Grundcapital, eben dieſes Capital auf die gegebene Zahl von Terminen zurück discontirt, abgezogen hat.

Heiſst der baare Wehrt der Zeitrente V, der Zinsfuſs für einen Termin r, (das Grundcapital, das iſt, deſſen Zins $= 1$ iſt, wiederum p,) die Zahl der Termine x, ſo iſt $V = p - p\frac{1}{r^x}$.

Beweis. Es iſt der baare Wehrt der Rente für den erſten Termin $= \frac{1}{r}$; für den zweyten $= \frac{1}{r^2}$, für den dritten $\frac{1}{r^3}$ und ſo überhaupt für den *xten* Termin $= \frac{1}{r^x}$. Alſo die Summe aller dieſer, oder $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^x}$ = der Summe dieſer geometriſchen Reihe, iſt $= V$. Aber dieſe Reihe iſt $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$. Nun iſt $p = \frac{1}{r-1}$ folglich $\int\frac{1}{r^x} = p - \frac{p}{r^x}$.

14.

Zuſatz 1. Die Tabelle reicht auf 100 Jahr, alſo für die meiſten Fälle weit genug. Wird indeſſen eine Zeitrente für noch mehrere Termine verlangt, iſt nämlich x gröſser als 100, ſo kann man ſie aus dieſen Tabellen berechnen nach folgender Formel: $\int\frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n} \cdot \int\frac{1}{r^{x-n}}$.

Es

Es ist nämlich $\int\frac{1}{r^n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^n}$ und

$$\frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}} = \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^{x-n}}\right)$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+2}} + + \frac{1}{r^x}.$$

Folglich $\int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^x}$

Solte auf 200 Termine gerechnet werden, so ist $x = 200$. Man nehme $n = 100$, so ist $x - n = 100$, und $\int\frac{1}{r^{100}} + \frac{1}{r^{100}}\int\frac{1}{r^{100}} = \int\frac{1}{r^{200}} = \left(1 + \frac{1}{r^{100}}\right).\ \int\frac{1}{r^{100}}$, wie überhaupt $\left(1 + \frac{1}{r^n}\right).\ \int\frac{1}{r^n} = \int\frac{1}{r^{2n}}$.

Anmerkung. Wenn man eine Zeitrente nach *einem andern Zinsfuſs* suchet, als diejenigen, wornach die Tabellen berechnet sind, z. B. für $2\frac{1}{2}$ Procent oder für $4\frac{3}{4}$ Procent, so kommt es in der Summe $\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}.\ \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ nur an auf das Stück $\frac{1}{r^x}$, weil $\frac{1}{r-1}$ das Grundcapital ist, und sich von selbst giebet. Aber man kann $\frac{1}{r^x}$ für ein *arithmetisches Mittel* annehmen zwischen dem Wehrt, den es hat bey einem Zinsfuſs, der um ein gleiches gröſser ist, und dem bey einem andern, der um ein gleiches kleiner ist, in Fällen wo der Unterschied der Procente nur klein, z. B. nur $\frac{1}{2}$, und x nicht gröſser als 10 ist. Ist x gröſser als 10, so werden die *Differenzen* der Discontozahlen bey dem *mittlern* und dem *niedern* Zinsfuſs um 0,01 gröſser als

bey

bey dem *mittlern* und dem *höhern;* woraus die für $\frac{1}{r}$ genommene arithmetiſche Mittelzahl corrigirt werden kann. Will man mit dem mittlern Zinsfuſs ſolche vergleichen, die um 1 Procent gröſser und kleiner ſind, ſo werden die Differenzen der Discontozahlen des mittlern und des niedern nahe an 0,02 gröſser, als bey dem mittlern und dem höhern, wenn x nämlich über 10 iſt. Daraus entſteht dann wiederum eine nur unerhebliche Correction für die geſuchte Discontozahl zu dem mittlern Zinsfuſs, die man als Mittel zwiſchen jenen annahm. Allein hiemit reicht man dann auch aus, ſo lange x nicht gröſser als 100 wird.

Für $r = 1{,}04$ iſt $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}3083$

Für $r = 1{,}035$ iſt $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}3563$

Differenz $= 0{,}0480$

Für $r = 1{,}03$ iſt $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}4120$

Differenz für die beyden kleinen $r = 0{,}0557$.

Alſo 0,0077 gröſser als die Differenz der beyden gröſſern, alſo noch nicht 0,01. Das für $\frac{1}{r^{30}}$ nach $r = 1{,}035$ oder nach $3\frac{1}{2}$ Procent angenommene Mittel iſt 0,3597 und der wahre Wehrt 0,3563, wo der Unterſchied nur 0,0034 beträgt.

Für

Für $r = 1,05$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,2314$

Für $r = 1,04$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,3083$

Differenz ist $= 0,0769$

Für $r = 1,03$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,4120$

Differenz $= 0,1037$.

Die letzte Differenz der beyden niedern Procente ist $0,0268$ *gröſser* als die Differenz der beyden erstern.

Das Mittel zwiſchen $\frac{1}{r^{30}}$ nach 5 Procent und 3 Procent ist 0,3217. Dieſs angenommen für den Wehrt $\frac{1}{r^{30}}$ nach 4 Proc. ist zu groſs um 0,0124.

Für $r = 1,05$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0,0076$

Für $r = 1,04$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0,0198$

Differenz $= 0,0122$

Für $r = 1,03$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0,0520$

Differenz $= 0,0322$

Die letzte Differenz ist um 0,02 gröſser als die erstere. Alſo würde der nach der obigen Regel angenommene mittlere Wehrt für $\frac{1}{r^{100}}$ nach 4 Procent um 0,01 zu groſs gewesen seyn.

15.

Zuſatz 2. Iſt x *unendlich* groſs, ſo iſt $\int\frac{1}{r^x} = p$, das iſt, der Wehrt der Rente 1 *auf immer*, iſt das Grundcapital ſelbſt.

16.

Zuſatz 3. Soll die Zeitrente, nicht gleich am Ende des erſten Termins, ſondern *nach verfloſſenen n Terminen* zum erſten mal zahlbar ſeyn, und dann durch x Termine fortgehen, das iſt, *auf* $n-1$ *Termine aufgeſchoben werden*, ſo iſt ihr Wehrt

$$= \frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{r^{n+x-1}} = \frac{1}{r^{n-1}} \int \frac{1}{r^x},$$

das iſt, die Zeitrente auf x Termine aus den Tabellen muſs auf $n-1$ Termine zurück discontirt werden.

Ex. Der baare Wehrt einer Jahrrente von 10 Rthl. auf zehn auf einander folgende Jahre iſt 81,10896, wenn $r = 0{,}04$. Soll dieſe Rente aber das erſtemal am Ende des zehnten Jahrs bezahlt und dann zehn Jahre damit fortgefahren werden, ſo iſt ihr Wehrt

$81{,}10896 \times 0{,}702587 = 56{,}9861$ Rthl. Denn

$0{,}702587$ iſt $= \frac{1}{r^{10}-1} = \frac{1}{r^9}$ nach der Tab. 2.

Anmerkung. Die am Ende des n^{ten} Termins zuerſt zahlbare Rente, fängt im Anfang des Termins ſchon an zu *laufen*, wie einige reden. Sie ruhet $n-1$ Termine, oder, iſt eine um $n-1$ Termine *aufgeſchobene* Rente.

17.

Zusatz 4. Soll die Rente das erstemal sogleich, und dann in der Folge jedesmal im *Anfang der Termine*, das ist, jedesmal *vorschussweise*, bezahlt werden, so ist ihr Wehrt für x Termine $= 1 + \frac{1}{r} + + \frac{1}{r^{x-1}}$ das ist $= \int \frac{1}{r^{x-1}} + 1$. Dieſs ist so viel als $r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right)$ das ist, *als der Wehrt der am Ende der Termine zahlbaren* Rente mit r multiplicirt.

18.

Zusatz 5. Verlangt jemand an Statt der *jährlichen* Renten *halbjährliche* für dieselbige baare Summe, so verlangt er doppelt so viele Termine, kann aber nicht in jedem Termin die Hälfte der Jahrsrente empfangen. Dieſs würde dem Entrepreneur zum Schaden gereichen. Was er in jedem Termin von der Jahrsrente 1 empfangen kann, sey N, und der Zinsfuſs für halbjährliche Zahlungen sey ϱ; so ist (nach §. 7.) $\varrho = r^{\frac{1}{2}}$, wenn r der Zinsfuſs für jährliche Zahlungen ist, und dieſer bey den halbjährlichen nicht verändert werden soll. Der baare Wehrt aller Renten auf $2x$ *halbe* Jahre ist demnach $= \frac{N}{\varrho} + \frac{N}{\varrho^2} + \frac{N}{\varrho^3} + + + \frac{N}{\varrho^{2x}} = N. \int \frac{1}{\varrho^{2x}} = N. \frac{1}{\varrho - 1}\left(1 - \frac{1}{\varrho^{2x}}\right) = N. \frac{1}{\varrho - 1}. \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$. Und da dieſs seyn soll $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ so ist $N = \frac{\varrho - 1}{r - 1} = \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r - 1}$. Was in jedem halbjährlichen Termin gegeben werden

kann, verhält ſich alſo zu 1., wie 0,0198: 0,04. Iſt die jährliche Rente R, ſo iſt die halbjährliche

$$N = \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r - 1} \cdot R.$$

19.

Zuſatz 6. Sind die Zahlungstermine $\frac{1}{n}$tel des Jahrs, ſo werden die $\frac{1}{n}$ *teljährliche* Renten $N = \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} \cdot R$, wenn die Jahrsrente $= R$ iſt. Alſo *verhält ſich die* $\frac{1}{n}$ *teljährliche Rente N zu der jährlichen R, nach demſelben Zinsfuſs, wie* $\frac{1}{r - 1} : \frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1}$, und wenn $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} = p'$ geſetzet wird, wie $p : p'$, das iſt, *wie das Grundcapital bey jährlichen Zinſen zu dem Grundcapital bey* $\frac{1}{n}$ *teljährlichen Zinſen*, oder, *umgekehrt, wie die* $\frac{1}{n}$ *teljährlichen Zinſen* $r^{\frac{1}{n}} - 1$ *zu den jährlichen* $r - 1$.

Ex. Iſt der Zinsfuſs 1,04, ſo kann an Statt der Jahrsrente 1, vierteljährlich nur gegeben werden

$\frac{0,009853}{0,04} = 0,2463.$

und *halbjährlich* $\frac{0,019804}{0,04} = 0,4951.$

20.

Zuſatz 7. „Soll die für $\frac{1}{n}$tel Theil des Jahrs fällige Rente $\frac{1}{n}$ ſeyn, das iſt $\frac{1}{n}$tel von der Jahrsrente 1,

„derselbige Zinsfuſs für ein ganzes Jahr aber behalten „werden, so ist der Wehrt einer solchen Zeitrente zu „dem baaren Wehrt der Jahrsrente 1 auf gleich lange „Zeit, wie $\frac{1}{n} : \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$." Denn wenn gleich viele und gleich groſse Termine genommen werden, so verhalten sich die baaren Wehrte der Zeitrenten, wie die Renten selbst. Nun aber ist $\frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$ die $\frac{1}{n}$teljährliche Rente, deren Wehrt für x Jahre, das ist, nach nx Terminen eben so groſs ist, als der Wehrt der jährlichen Rente 1 für gleich viele Jahre, oder auf gleiche Zeit. (§. 18.). Daher ist *der Wehrt der Jahrsrente 1, zu dem Wehrt der Zeitrente* $\frac{1}{n} = \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1} : \frac{1}{n}$ ##. Und umgekehrt der Wehrt der letzteren zum Wehrt der ersten wie $\frac{1}{n} : \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$. Ist der Wehrt der $\frac{1}{n}$teljährigen Rente, von der Gröſse $\frac{1}{n} = w$, so ist $w = \frac{r-1}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)} \int \frac{1}{r^x}$.

Wenn alle halbe Jahre die Rente $\frac{1}{2}$ bezahlt wird, so ist der Wehrt einer solchen Zeitrente auf gleich lange Zeit fortlauffend mit der Jahrsrente $= \frac{1}{2} \cdot \frac{r-1}{r^{\frac{1}{2}}-1} \cdot \int \frac{1}{r^x}$.

Für $r = 1,04$ ist dieſs $= 1,0101 \ldots . \int \frac{1}{r^x}$.

Soll aber die halbjährliche Rente $\frac{1}{2}$ nicht mehr Termine

als die jährliche, alſo nur auf $\frac{x}{2}$ Jahre bezahlet werden, ſo iſt der Wehrt $1,01 \ldots \int \frac{1}{r^{\frac{x}{2}}}$.

21.

Zuſatz 8. Wenn hingegen bey eben der Vorausſetzung, daſs in $\frac{1}{n}$ teljährlichen Terminen, $\frac{1}{n}$ tel als Rente zahlbar iſt, der Zinsfuſs verändert, und der Zins auf $\frac{1}{n}$ tel des Jahrs zu $\frac{r-1}{n}$ angenommen wird, ſo iſt der baare Wehrt einer ſolchen Zeitrente auf x Jahre oder nx Termine $= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{r-1}{n}} + \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^2}\right.$

$\left. + \ldots + \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}}\right) = \frac{1}{n}\int \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}} =$

$$\frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}}\right).$$

Reſtituirt man den Zinſenfuſs r, oder ſetzet ſtatt $\frac{r-1}{n}$, die $\frac{1}{n}$ teljährigen Zinſen nach dem Zinsfuſs r, nämlich $\sqrt[n]{r} - 1$, ſo erhält man auch wiederum für den Wehrt der Rente auf nx Termine $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{r} - 1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ der ſich zu dem Wehrte der jährlichen Rente 1 auf x Jahre verhält wie $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{r} - 1} : \frac{1}{r-1}$, dem vorhergehenden im §. 20. gemäſs.

22. *Zuſatz*

22.

Zusatz 9. In grosen Handelsstädten giebt es Gelegenheiten das vorräthige Geld auf jede kleine Termine nutzbar zu machen, vornehmlich bey Banquiers und Wechslern. Das ist anderswo nicht so. Allein auch dorten ist es nicht gewöhnlich, die halb- und vierteljährlichen Zinsen, noch weniger die monatlichen und auf kleinere Termine, so zu berechnen, wie sie nach dem Obigen, wenn der jährliche Zinsfus beybehalten werden soll, berechnet werden müsten. Man nimmt $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$, $\frac{r-1}{n}$ für die Zinsen von $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$tel; $\frac{1}{n}$tel - Jahr an. Das kann auch füglich geschehen, weil der Unterschied nicht erheblich ist. Es ist völlig richtig, wo nur *einfache* Zinsen zu rechnen sind.

Nach dieser Vorausetzung ist der Wehrt der *halbjährlichen Zeitrenten* so zu berechnen, *als wenn zu jedem Jahrstermin 1 noch die halbjährlichen Zinsen für die am Ende des ersten halben Jahres zahlbare Hälfte mit* $\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}$ *zugeleget werden müssen.* Die ein halbes Jahr früher zahlbare Hälfte kann von dem Entrepreneur aufgenommen, und am Ende des Jahrs die Zinsen davon zugleich mit dem Jahrstermin abgetragen werden, so wird die Zahlung halbjährlich geleistet.

Ist nun der Wehrt einer jährlichen Rente 1 auf x Jahre $\int \frac{1}{r^x}$, so wird der Wehrt einer halbjährlichen

Rente $\frac{1}{2}$ auf $2x$ Termine oder x Jahre, ſo groſs ſeyn als $\int\frac{1}{r^x} + \frac{1}{4}(r-1).\int\frac{1}{r^x}$. Denn an Statt, daſs ſonſt am Ende jedes Jahrs 1 gezahlet werden ſollte, muſs nach der obigen Vorausſetzung gezahlet werden $1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}$. Der baare Wehrt dieſer Zahlung iſt alſo auf x Jahre

$$= \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r} + \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r^2}$$

$$+ + \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r^x}$$

$$= \int\frac{1}{r^x} + \frac{1}{4}.(r-1)\int\frac{1}{r^x} = \left(1+\frac{1}{4}(r-1)\right)\int\frac{1}{r^x}.$$

Weil $\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}.\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$ ſo wird das für halbjährliche Zahlungen zuzulegende Stück $= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$, das iſt, $\frac{1}{4}$tel der ganzen Jahrsrente weniger $\frac{1}{4}$tel derſelben auf x Jahre zurück discontirt. Wenn x eine groſse Zahl iſt, ſo kann das letzte discontirte Stück weggelaſſen werden. *Daher rechnet man gewöhnlich $\frac{1}{4}$tel einer Jahrsrente bey halbjährlichen Zahlungen mehr als bey jährlichen.*

Sollen *vierteljährliche* Zahlungen Statt finden, ſo iſt am Ende jeden Jahrs mehr zu zahlen

$$\frac{3}{4}.\frac{r-1}{4} + \frac{2}{4}.\frac{r-1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{r-1}{4} = \frac{3}{8}.\overline{r-1}.$$

Dieſer Zuſchuſs zu dem Wehrt der Rente bey *jährlichen* Zahlun-

Zahlungen ist $= \frac{3}{8}(r-1)\int\frac{1}{r^x} = \frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$ oder wenn x eine grofse Zahl ist, so *viel als $\frac{3}{8}$tel einer Jahrsrente.*

Nimmt man $\frac{1}{n}$ *teljährliche Zahlungen*, so ist, wie aus dem vorhergehenden leicht erhellet, der Ueberschufs des Wehrts einer solchen Rente über den bey *jährlichen* Zahlungen für jedes Jahr,

$$= \frac{r-1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ +\frac{1}{n}\right)\int\frac{1}{r^x},$$

weil in jedem einzelnen Jahr aufser 1 noch $\frac{r-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ +\frac{1}{n}\right)$ zu zahlen ist, davon der baare Wehrt durch das Zurückdiscontiren gefunden wird.

Jener Zuschufs ist also $= (r-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)\int\frac{1}{r^x}$, und wenn n sehr grofs ist; $= \frac{r-1}{2}\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$.

23.

Satz 3. Aufgabe. Wenn Statt der Jahrsrente 1 auf m Jahre eine andere Jahrsrente R, auf mehr oder mindere (n) Jahre gesucht wird, die aber mit der vorigen von gleichem baaren Wehrte seyn soll, wie grofs mufs die letzte seyn? Nach einerley Zinsfufs werden beyde berechnet.

Antwort. $R = \left(1-\frac{1}{r^m}\right) : \left(1-\frac{1}{r^n}\right)$.

Denn der Wehrt einer Jahrsrente 1 auf m Jahre oder $\int \frac{1}{r^m}$ iſt $= \frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^m}\right)$, und der Wehrt einer Jahrsrente R auf n Jahre, oder $R\int\frac{1}{r^n}$ iſt $= R.\frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)$. Sollen beyde gleich groſs ſeyn, ſo iſt

$$R = \frac{\frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^m}\right)}{\frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}.$$ Das iſt, ſie iſt gleich dem Quotienten, wenn der Wehrt der Rente 1, auf m Jahre nach der Tabelle, mit dem Wehrt der Rente auf n Jahre aus derſelben Tabelle dividirt wird. Dieſs iſt auch

$$= \frac{1-\frac{1}{r^m}}{1-\frac{1}{r^n}}.$$

Ex. Statt einer Jahrsrente 1, auf 10 Jahre, will jemand eine haben auf 5 Jahre, (der Zinsfuſs $r = 1{,}04$).

So iſt $n = 5$ und $\frac{1-\frac{1}{r^m}}{1-\frac{1}{r^n}} = \frac{0{,}32443}{0{,}17806} = 1{,}82.$

24.

Zuſatz. Soll die Rente R zugleich auf einige Jahre (q) aufgeſchoben werden, ehe ſie n Jahre durch bezahlet wird, das iſt, ruhet ſie ſo lange, ſo wird ſie

$= r^q R = r^q\left(\frac{1-\frac{1}{r^m}}{1-\frac{1}{r^n}}\right)$. Es iſt m die Zahl der

Jahre,

Jahre, auf welche die Rente 1 berechnet und bezahlet ist; n die Zahl der Jahre, welche die neue Rente durchbezahlet werden soll, nachdem sie q Jahre geruhet hat, das ist, sie ist nach $q+1$ Jahren zum erstenmal fällig.

25.

Satz 4. Wenn eine jährliche Einnahme 1 durch m Jahre aufgesparet und jedesmal untergebracht wird, so dass Zinsen und Zinsen von Zinsen erhalten werden, so ist ihr Wehrt alsdenn oder ihr derzeitiger Betrag so gross als ihr baarer Wehrt, durch die Zinsen von Zinsen in so viel Jahren vergrössert. Das ist, *ihr derzeitiger Wehrt ist*, $r^m \int \frac{1}{r^m}$.

Erster Fall. Wenn das Jahr, an dessen Ende die *erste* Einnahme fällt, für das *erste* Jahr gerechnet wird, und die *letzte* Einnahme 1, am Ende des *letzten m ten* Jahrs auch mitgerechnet wird zu der Summe, so ist es klar, dass am *Ende des ersten Jahrs* die aufgehobene Summe ist $1 = 1$; am *Ende des zweyten Jahrs* ist sie $= 1 + r$.

Die Einnahme aus dem ersten Jahr war am Ende des zweyten erwachsen auf r, und dazu kam die Einnahme des *zweyten* Jahrs. Beydes war also $1 + r$. Ferner ist die Summe am Ende des *dritten*

Jahrs $= 1 + r + r^2$ und am

Ende *des m ten Jahrs* $= 1 + r + r^2 + + r^{m-1}$.

Diese letzte Summe ist $= r^m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^m}\right) = r^m \int \frac{1}{r^m}$.

Zweyter Fall. Wenn die Einnahme *im Anfang der Jahre* gesetzt wird, das ist, wenn *vorschüssliche* Renten aufgespart werden, oder die Jahre mit der ersten Einnahme anfangen, so ist die *aufgesparte* Summe

am Ende des *ersten* Jahrs $= r$

am Ende des *zweyten* Jahrs $= r + r^2$

am Ende des *m ten* Jahrs $= r + r^2 + \ldots + r^m$

$= r^m \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{m-1}}\right)$.

Also der *derzeitige Betrag* oder Wehrt, gleich dem mit r^m multiplicirten *(jetzigen* oder*) baaren Wehrt einer vorschüsslichen Rente auf x Jahre.* (§. 17.)

26.

Zusatz 1. Weil $\int \frac{1}{r^m} = \frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$ bey der *gewöhnlichen*, nicht vorschüsslichen, *Rente* ist, so ist

$r^m \int \frac{1}{r^m} = \frac{r^m}{r-1} - \frac{1}{r-1} = \left(r^m - 1\right) p.$

Und wenn die Rente eine *vorschüssliche* ist, $= (r^{m+1} - r)\, p.$

Der *gesuchte derzeitige Wehrt* der *aufgesparten* Rente kann also auch so durch die erste Tabelle berechnet werden, dass nur Eine Multiplication mit dem Grundcapital erfoderlich ist.

Ex. 1. Wenn ein *sinkender Fond* in dem Verstande nämlich, worin die Engeländer das Wort nehmen, oder eine Tilgungscasse, jährlich 1000 *Rthl.* Einschüsse hat, und diese

dieſe Gelder 50 Jahre mit Zinſen und Zinſen von Zinſen aufſammlet, ſo iſt nach dem 4 Procentfuſs $r^{50} - 1 = 7,1067 - 1 = 6,1067$. Alſo 25. 6,10668 = 152,667. Folglich die aus dem jährlichen Einſchuſs von 1000 Rthl. nach 50 Jahren erwachſene Summe 152667 Rthl.

Daſſelbe kam heraus, wenn man erſt den baaren Wehrt einer Jahrsrente von 1000 Rthl. auf 50 Jahre berechnet, und dann wiederum dieſen mit r^{50} multiplicirt. Jener baare Wehrt iſt 21482, 18 Rthl. und 21482, 18. 7,10668 = 152666, 9789 - - Rthl. Der geringe Unterſchied entſteht, weil man eigentlich noch mehrere Decimalziffern aus der Tabelle hätte gebrauchen müſſen. Zugleich iſt es klar, daſs die letztere Rechnung wegen der groſsen Multiplication weitläuftiger ſey als die erſte.

Ex. 2. Wird der Einſchuſs *am Anfang* des Jahrs geleiſtet, ſo iſt der Betrag nach 50 Jahren $r^{51} - r = 7,39095 - 1,04 = 6,35095$. Daher 6,35095. 25. 1000 = 158773,75 Rthl.

Dieſs iſt auch ſo viel, als der Betrag in dem vorhergehenden Exempel vergröſsert durch Eines Jahres Zinſen, oder multiplicirt mit 1,04. Denn 152667. 1,04 macht 158773, 68 Rthl. Ein unerheblicher Unterſchied iſt hier wiederum in den Decimalzahlen, aus demſelben Grunde, wie vorher. Man wird hieraus doch ſehen, daſs die Berechnung der Wehrte in Tab. 1. 2. 3 auf

mehrere

mehrere Ziffern nicht unnütz ſey, wenn gleich die meiſten male ſo viel Genauigkeit nicht verlanget wird.

Man hat auch eigene Tabellen für die Wehrte von *aufgeſparten Jahrsrenten.* Allein da ſie ſo leicht aus den übrigen Tabellen zu berechnen ſind, ſo habe ichs nicht für nöthig gehalten, dadurch die Tabellenzahl zu vermehren.

27.

Zuſatz 2. Iſt die halbjährliche Einnahme $\frac{1}{2}$, und wird ſelbige $2m$ halbe Jahre oder m *ganze* Jahre aufgeſpart, ſo iſt ſie am Ende dieſer Zeit $= \frac{1}{2} \cdot \frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}$, wenn *am Ende des erſten halben Jahrs* die *erſte* Einnahme gerechnet wird.

Es iſt nämlich, eben ſo wie vorher, die Summe

am Ende des *erſten halben* Jahrs $= \frac{r}{2}$

am Ende des *2ten halben* Jahrs $= \frac{r}{2} + \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}}$

am Ende des *dritten* Termins $= \frac{r}{2} + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{r^{\frac{2}{2}}}{2}$ und ſ. f.

am Ende des $2m$*ten* Termins $= \frac{1}{2} + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{r}{2} + + \frac{r^{\frac{2m-1}{2}}}{2}$.

Davon iſt die Summe

$= \frac{1}{2} \frac{2m}{r^2} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{r}{r^{\frac{2}{2}}} + \frac{r}{r^{\frac{3}{2}}} + + \frac{r}{r^{2m:2}} \right)$ gleich dem baaren Wehrt der *halbjährlichen* Rente $\frac{1}{2}$. (§. 18.) mit r^m multiplicirt.

Eben

Eben dieſer *derzeitige Wehrt* iſt $= \frac{1}{2}\left(\frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}\right)$.

Wenn p' das Grundcapital iſt zu der halbjährlichen Rente §. 19. das iſt, deſſen halbjähriger Zins $\frac{1}{2}$ iſt, oder $p' = \frac{1}{2\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right)}$, ſo wird jener Wehrt $= (r^m - 1)\, p'$.

Es verhält ſich alſo die aufgeſchwollene halbjährliche Rente zu der jährlichen, auf gleich lange Zeit, welche es auch ſey, *wie* $\frac{r^m - 1}{2\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right)} : \frac{r^m - 1}{r - 1}$, das iſt, wie $r - 1 : 2\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right)$.

Iſt $r = 1{,}04$, ſo iſt dieſes Verhältniſs $= 0{,}04 : 2.\ 0{,}0198 = 4 : 3{,}96$. §. 7.

Die *vierteljährliche aufgeſchwollene Zeitrente* $\frac{1}{4}$ iſt am Ende von *m* Jahren

$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + r^{\frac{1}{4}} + r^{\frac{2}{4}} + r^{\frac{3}{4}} + \ldots + r^{(4m-1):4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot r^{4m:4}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{4}}} + \ldots + \frac{1}{r^m}\right),$$

das iſt, gleich dem *jetzigen baaren Wehrt der vierteljährlichen Rente multiplicirt* mit r^m. Der *derzeitige* Wehrt von jener iſt alſo $= \frac{r^m - 1}{4\left(r^{\frac{1}{4}} - 1\right)}$, und das Verhältniſs deſſelben zum Wehrt einer aufgeſchwollenen Jahrsrente 1 iſt $= r - 1 : 4\left(r^{\frac{1}{4}} - 1\right)$.

Auf

Auf dieſelbe Art folget, daſs der *derzeitige* Wehrt einer $\frac{1}{n}$ teljährlichen Rente $\frac{f}{n}$, ſo groſs iſt als $\frac{1}{n}\left(\frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{n}} - 1}\right)$, und folglich ſich verhalte zum Wehrt der aufgeſparten jährlichen Rente 1, wie $r - 1 : n\left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

28.

Zuſatz 3. Wenn der halbjährliche Zins $= \frac{r-1}{2}$ geſetzet wird, ſo iſt das um die Zinſen vergröſserte Capital nach einem halben Jahr $1 + \frac{r-1}{2} = \frac{1+r}{2}$. Folglich die halbjährliche Einnahme $\frac{1}{2}$ auf m ganze Jahre *aufgeſpart*, die Einnahme jedesmal *am Ende des Termins* gerechnet,

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+r}{2} + \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 + + \left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1}{\frac{1+r}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1}{r - 1}$$

$$= \left(\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1\right) p.$$

Imgleichen, wenn $\frac{r-1}{4}$ der vierteljährliche Zins iſt, ſo iſt eine vierteljährliche Rente von $\frac{1}{4}$ auf m Jahr *aufgeſpart*

$$= \frac{\left(1 + \frac{r-1}{4}\right)^{4m}}{r-1} - \frac{1}{r-1}$$

Wenn

Wenn der $\frac{1}{n}$-*teljährliche Zins* $\frac{r-1}{n}$ ist, so ist die $\frac{1}{n}$-*teljährliche Einnahme aufgespart* durch *m* Jahre

$$= \frac{\left(1+\frac{r-1}{n}\right)^{nm} - 1}{r-1} = \left(\left(1+\frac{r-1}{n}\right)^{nm} - 1\right) p.$$

Anmerkung. Die vorstehenden Formeln hat D. *Price*, und nach ihm *Morgan* angenommen, *) und darnach die Wehrte aufgesparter Zeitrenten, nachdem sie halbjährlich oder vierteljährlich weggelegt werden, verglichen. Dieſs geht aber nicht an. Es bleibt nicht derselbe Zinsfuſs in dem einen Fall wie in dem andern. Denn wenn der jährliche Zins von $1 = r - 1$ ist, so kann der halbjährliche nicht $\frac{r-1}{2}$; und wenn dieſer letztere so genommen wird, der vierteljährliche wiederum nicht $\frac{r-1}{4}$ seyn. Es ist ein Versehen, wenn die benannten beyden Berechner so die Vergleichung anstellen zu können geglaubt haben.

Das Verfahren, dessen ich oben im 22*sten* §. erwähnet habe, und das in Praxi zugelaſſen werden kann, ist ganz davon verschieden. Für die *kleinen zwischen* den jährlichen Terminen *fallenden Zahlungen* laſſen sich die Zinsen annehmen in dem Verhältniſs zu den Jahrszinsen wie die Gröſse der Termine zum Jahr. So kann auch der baare Wehrt am Anfang des Jahrs von einer in dem Lauff

*) *Morgan* (*William*) *Doctrine of Annuities and Assurances.* London 1779. p. 215 u. f. f.

Lauff deſſelben zahlbaren Summe darnach berechnet werden. Allein dieſs darf nicht weiter zurück ſo genommen werden. Z. B. für den jetzigen Wehrt einer nach $\frac{1}{2}$ Jahr zahlbaren Summe 1, kann man $\frac{1}{(1+r):2}$ ſetzen; (nämlich $1+\frac{r-1}{2}$ für den Zinſenfuſs und alſo $\frac{1}{1+\frac{r-1}{2}}$ für den baaren Wehrt von 1, nach einem halben Jahre zahlbar,) aber wenn die Summe erſt nach zwey Jahren zahlbar iſt, ſo kann ihr baarer Wehrt, der $\frac{1}{r^2}$ iſt, nicht zu $\frac{1}{(\frac{r+1}{2})^4}$ genommmen werden. Iſt gleich in dieſem beſondern Fall der Unterſchied nur 0,008, ſo wird er doch in andern beträchtlicher.

29.

Zuſatz 4. Wird der Wehrt der *aufgelaufenen* Zeitrente von kleinern als Jahrsterminen nach der obigen Vorausſetzung (§. 22.) berechnet; daſs nämlich die *einfachen* Zinſen für die halb- und vierteljährlichen und andere kleinere terminlichen Zahlungen $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$; $\frac{r-1}{n}$ ſind, nicht aber ihre *zuſammengeſetzten* Zinſen, oder ihre Zinſen auf Zinſen in dieſem Verhältniſſe fortgehen, ſo findet ſich wiederum in jedem Fall *der Wehrt der aufgelauffenen Zeitrente am Ende von gewiſſen (m) Jahren, ſo groſs als der jetzige oder baare Wehrt derſelben nach §. 22. berechnet, multiplicirt in* r^m.

Empfängt

Empfängt nämlich der Rentenier nach dem erſten halben Jahr $\frac{1}{2}$, und wiederum $\frac{1}{2}$ am Ende des Jahrs, ſo iſt das ſo viel, als wenn er am Ende des Jahrs $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r-1}{2}$ empfangen ſollte. Auf dieſelbige Art geht dieſs fort bey den folgenden Jahren. Folglich entſteht nach m Jahren eine aufgelaufene Rente, deren derzeitiger Wehrt ſich zu dem derzeitigen Wehrt einer Jahrsrente 1 verhält wie $1 + \frac{r-1}{4} : 1$. Und da der derzeitige Wehrt der Jahrsrente $1 = \frac{r^m - 1}{r-1}$ iſt, ſo iſt derſelbe bey *halbjährlichen* Zahlungen $= \frac{r^m-1}{r-1} + \frac{r^m-1}{4}$. Der Unterſchied iſt $\frac{r^m}{4}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$.

Bey *vierteljährlichen* Zahlungen kann der Ueberſchuſs an Zinſen aus den Zwiſchenzahlungen auf dieſelbe Art, zu der Jahrsrente am Ende des Jahrs geſchlagen werden. Der Rentenier empfängt alſo nach §. 22. eine Jahrsrente $1 + 3 \cdot \frac{(r-1)}{8}$. Alſo verhält ſich der Wehrt dieſer aufgeſchwollenen Rente von vierteljährlichen Zahlungen zu dem Wehrt der aufgeſparten Jahrsrente 1 wie $1 + 3 \cdot \frac{(r-1)}{8} : 1$. Daraus folgt denn, daſs ſie ſey $= \frac{r^m-1}{r-1} + \frac{3}{8} \cdot (r^m - 1)$. Der Unterſchied iſt $\frac{3}{8} r^m \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$.

Setzet man $\frac{1}{n}$ *teljährliche Termine*, und jeden zu $\frac{1}{n}$, ſo iſt der derzeitige Wehrt dieſer durch m Jahre aufgeſparten Zeitrente zu dem derzeitigen Wehrt einer aufgeſparten Jahrsrente 1, wie

$$1 + \frac{r-1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + + \frac{1}{n}\right) : 1 =$$

$$1 + \frac{n \cdot n - 1}{2 \cdot n \cdot n} \cdot \overline{r-1} : 1.$$ Der Ueberſchuſs der erſten Wehrte über der letzten alſo $= \frac{n \cdot n - 1}{2 \cdot n^2}, \left(r^m - 1\right)$. §. 22.

Zweyter Abſchnitt.

Von veränderlichen Zeitrenten.

30.

Die *Zeitrente* kann nach einer gewiſſen vorher zu beſtimmenden Regel ſteigen oder abnehmen, wie die Glieder einer Reihe nach einem allgemeinen Geſetz von einander abhangen.

Die einfachen Fälle ſind:

1) Wenn die Rente in jedem folgenden Termin wächſet oder abnimmt, nach einem *beſtändigen Verhältniſs, wie in einer geometriſchen Reihe.*

2) Wenn ſie wächſt oder abnimmt nach einer *arithmetiſchen Reihe*, deren *Differenz* gegeben iſt.

31.

Satz 5. Aufgabe. Eine jährliche Rente 1, am Ende des erſten Jahrs zuerſt zahlbar, ſteige in den folgenden Jahren

Reihe geht alsdenn in eine arithmetiſche über, deren Glieder alle gleich ſind, oder deren Differenz Nichts iſt.

33.

Satz 6. Aufgabe. Den Wehrt einer jährlichen Rente 1 auf m Jahre zu finden, wenn ſelbige mit jedem folgenden Jahre wächſet, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen; nämlich im erſten Jahr = 1; im zweyten = 2; im dritten = 3 iſt, und ſo ferner.

Auflöſung. 1) Man ſuche den Wehrt der *unveränderlichen* Rente 1 auf *m* Jahre nach §. 13.

2) Man ſuche den baaren Wehrt des letzten Termins, der auf die vorbeſtimmte Art wachſenden Rente, das iſt, $\frac{m}{r^m}$. Dieſen ziehe man ab von dem vorhergefundenen, und mit dem Zinsfuſs *r* multiplicirten Wehrt der *unveränderlichen* Rente.

3) Der gefundene Reſt multiplicirt mit dem *Grundcapital*, giebt den verlangten Wehrt.

Es iſt der Wehrt der unveränderlichen Rente auf *m* Jahre $= \int \frac{1}{r^m}$, (§. 13.), das *Grundcapital p*, alſo der Wehrt der nach der Ordnung der Zahlen wachſenden Jahrsrente $= p \left(r \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{r^m} \right)$.

Der Beweis ſteht in den *Zuſätzen zu dieſem Capitel.* *)

Ex.

*) §. 14.

Ex. Wenn der Zinsfuſs $r = 1,04$, ſo iſt die Jahrsrente 1 auf zehn Jahre $= 8,110896. = \int \frac{1}{r^{10}}$, und $r \int \frac{1}{r^{10}} = 8,43533$. Ferner $\frac{10}{r^{10}} = 6,75564$, folglich $r \int \frac{1}{r^{10}} - \frac{10}{r^{10}} = 1,67969$. Und $25. 1,67969 = 41,99225$ der geſuchte Wehrt.

34.

Satz 7. Eine Jahrsrente auf gewiſſe Jahre, wachſe in einer arithmetiſchen Progreſſion, deren Differenz gegeben iſt. Das iſt, in dem erſten Jahre ſey ſie a, in dem zweyten $a + d$, in dem dritten $a + 2d$, in dem letzten m*ten* Jahr $a + (m - 1)d$; *ihren baaren Wehrt zu finden.*

Auflöſung. 1) Man ſuche den Wehrt einer unveränderlichen Jahrsrente a auf m Jahre, das iſt $a \int \frac{1}{r^m}$, nach §. 13.

2. Man ſuche ferner den Wehrt einer nach der Ordnung der *natürlichen* Zahlen *wachſenden* Rente von der Gröſse, wie die gegebene Differenz d iſt, (nach dem nächſtvorhergehenden 6ten Satz) auf eben ſo viel Jahre weniger Eins.

3) Dieſen letztern Wehrt durch den Zinsfuſs dividirt, und

4) Zu dem Wehrt der zuerſt gefundenen Jahrsrente a addirt, giebt den geſuchten Wehrt.

Beweis. Der geſuchte Wehrt der ſteigenden Rente iſt

$$= \frac{a}{r} + \frac{a+d}{r^2} + \frac{a+2d}{r^3} + + + \frac{a+(m-1)d}{r^m}.$$

Dafür man ſetzen kann $\int \frac{a+(m-1)'d}{r^m}$.

Dies iſt $= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + + + \frac{a}{r^m}$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{d}{r} + \frac{2d}{r^2} + + + \frac{(m-1)d}{r^{m-1}}\right).$$

Die erſte Summe iſt die Jahrsrente a auf m Jahre (nach Satz 2. §. 13.), und die zwote iſt die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſende Rente auf $m-1$ Jahre, von der Gröſse d, (nach dem 6ten Satz §. 33.) mit r dividirt.

Exempel. Die Rente im 1ſten Jahr ſey 1 Rthl. und wachſe in den folgenden, jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ Rthl., die ganze Zeit der Rente ſey 20 Jahre, ſo iſt nach dem Zinsfuſs 4 Procent, der Wehrt der Rente 1 Rthl. auf 20 Jahre (aus Tab. III.)

$= 13,590326$ Rthl.

Ferner iſt $\frac{p}{r}\int \frac{19}{r^{19}} = p\left(\int \frac{1}{r^{19}} - \frac{10}{r^{20}}\right)$

$= 25.\ 13,133939 - 19.\ 25.\ 0,456387$

$= 328,348475 - 216,783825 = 111,56465,$

und da $d = \frac{1}{10}$, ſo wird hieraus $11,156465$.

Der geſuchte Wehrt iſt alſo

$= 24,746791$ Rthl.

35. Zu-

35.

Zusatz. Noch etwas kürzer wird die Rechnung, wenn sie nach dem Ausdruck $(a+pd)\int\frac{1}{r^{m-1}} - \frac{(m-1)pd-a}{r^m}$ geführet wird. Dieſs giebt gleichfalls den gesuchten Wehrt. Denn $\int\frac{n-1}{r^{m-1}} = pr\int\frac{1}{r^{m-1}} - p\frac{m-1}{r^{m-1}}$ §. 33. Daher ist $a\int\frac{1}{r^m} + \frac{d}{r}\int\frac{m-1}{r^{m-1}} =$

$a\int\frac{1}{r^{m-1}} + a\frac{1}{r^m} + pd\int\frac{1}{r^{m-1}} - pd\left(\frac{m-1}{r^m}\right) =$

$(a+pd)\int\frac{1}{r^{m-1}} - \frac{(m-1)pd-a}{r^m}$.

Nach dieſer Formel hat man eine Multiplication mit Decimalzahlen weniger.

36.

Wenn die Rente gewiſſe Jahre durch *wächſet, und dann* gewiſſe Jahre *wiederum abnimmt*, jedesmal nach einem andern geometriſchen oder arithmetiſchen Verhältniſs, ſo kann der Wehrt der ganzen Rente ſtückweiſe nach dem Vorhergehenden gefunden werden.

Ueberhaupt ſey die Rente in dem erſten Termin *a*, in dem zweyten *b*, und ſo ferner *c*, *d*, *e* ... ſo kommt es darauf an, die Summe der Reihe $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + + +$ zu finden. Verſchiedene Fälle, wo ſie ſich auf eine allgemeine Art finden läſst, kommen in den *Zuſätzen* vor.

Zuſätze zum erſten Capitel von Zeitrenten.

I.

Vom Anwachs eines Capitals durch augenblickliche Zinſen. Zu §. 9.

Wenn der Zins von 1 für einen Termin $\frac{c}{n}$ iſt; ſo iſt das Capital nach n Terminen $= \left(1+\frac{c}{n}\right)^n = 1 + \frac{nc}{n} + \frac{n.n-1}{1.2.}\cdot\frac{c^2}{n^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.}\cdot\frac{c^3}{n^3} + + + =$

$$1 + c + \frac{c^2}{1.2} - \frac{c^2}{2n} + \frac{c^3}{1.2.3.} - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{c^3}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{c}{n^2} + +$$

Iſt nun n *unendlich* groſs, und c eine *endliche* Gröſse, wie es genommen werden muſs, wenn die Termine *Augenblicke* ſeyn ſollen, ſo verſchwinden von dieſer Reihe alle Glieder, worin durch n dividirt werden ſoll. Alsdann wird

$$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^3}{1.2.3} + \frac{c^4}{1.2.3.4} + + \frac{c^n}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Dieſe Reihe drückt bekanntermaſsen die Zahl aus, welche zu dem *natürlichen Logarithmen* c gehört, und iſt $= e^c$ wenn e die Zahl iſt, deren *natürlicher Logarithmi* 1 *iſt*, nämlich $= 2{,}718281828$.

2. Zu-

2.

Zuſatz 1. Eben ſo iſt das Capital 1 nach *m* Jahren durch Zinſen und Zinſen von Zinſen gewachſen auf e^{cm}, und das Capital C iſt gewachſen auf $C.\ e^{cm} = Z$.

3.

Zuſatz 2. Nimmt man $\frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}} - 1$. ſo berechnet man die *augenblicklichen Zinſen* nach dem *jährlichen* Zinſenfuſs *r*. Alsdenn iſt auch $1 + \frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}}$, und $\left(1 + \frac{c}{r}\right)^{mn} = e^{cm} = r^m$, alſo $c = log.\ nat.\ r$; und $C.e^{cm} = C.r^m$.

„Wenn nämlich derſelbige jährliche Zinsfuſs beybehalten wird, und darnach die terminlichen Zinſen „berechnet werden, ſo iſt es gleich viel, ob die Zinſen „in dieſen kleinen Terminen, oder jährlich auf einmal „bezahlet werden.“

4.

Zuſatz 3. Wird hingegen $c = r - 1$, und $\frac{c}{n} = \frac{r-1}{n}$ geſetzet, und $\frac{c}{n}$ für die *augenblicklichen* Zinſen genommen, ſo iſt $c = \frac{1}{p}$, wenn *p* wiederum das Grundcapital für den Zinsfuſs *r*, oder $= \frac{1}{r-1}$ iſt. Alsdenn iſt $Z = C.\ e^{m:p}$.

Alſo wenn $m = p$, das iſt, nach ſo vielen Jahren als *p* groſs iſt, wird $Z = e.\ C = C.\ 2,71828$.

Bey dem Zinsfuſs $r = 1,04$, iſt $c = 0,04$ und $p = 25$. Das anfängliche Capital 1 iſt alſo nach 25 Jahren 2,71828.

Bey *jährlichen* Zinſen $r - 1$ kömmt es in eben der Zeit nur auf 2,6658.

5.

Zuſatz 4. Es kann c überhaupt den Zins von 1 ausdrücken für jede beſtimmte Zeit, deſſen $\frac{1}{n}$tel der Zins für den *Augenblick* iſt; und alsdenn kann $\frac{1}{c} = p$ geſetzet, und ſo die Vergleichung zwiſchen dem Aufſchwellen des Capitals bey den Zinſen c für die beſtimmte Zeit, und bey den *augenblicklichen* Zinſen $\frac{c}{n}$ geſucht werden. Iſt z. E. c für ein halbes Jahr $= 0,02$, ſo iſt das dazu gehörige $p = \frac{1}{0,02} = 50$. Alſo in 50 halben Jahren wird die anfängliche Summe 1 wiederum $= 2,71828$.

6.

Zuſatz 5. Wenn der *augenblickliche* Zins $= \frac{c}{n}$, ſo iſt der *jährliche*, der dazu gehört $= e^c - 1$, und der *Zinsfuſs* e^c.

Der Zinsfuſs *für ein Jahr* bey *augenblicklichen* Zinſen $\frac{c}{n}$, verhält ſich alſo zu dem Zinsfuſs bey *jährlichen Zinſen* c wie $e^c : 1 + c = \frac{e^c}{1+c} : 1$

Für

Für den 4 Procentfuſs iſt $c = 0,04$; alſo *log. nat.* $e^c = 0,04$. Ferner iſt *log. brigg.* $1,04 = 0,0170333$.

Daher *log. nat.* $1,04 = \frac{0,0170333}{0,4342945} = 0,03922$.

Alſo *log. nat.* $\frac{e^c}{1+c} = 0,000977$

und *log. brigg.* $\frac{e^c}{1+c} = 0,000424$. Die zu dem letztern gehörige *Zahl* iſt 1,001, ſehr wenig von 1 unterſchieden.

7.

Von augenblicklichen Zeitrenten.

Iſt die $\frac{1}{n}$ *teljährliche Rente* $= \frac{1}{n}$ und der $\frac{1}{n}$ teljährliche Zins $= \frac{c}{n}$, ſo iſt der baare Wehrt der Rente für *m* Jahre $= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n\,m}}\right)$. Und weil für *augenblickliche* Renten $n = \infty$, ſo iſt dieſer Wehrt $= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{e^{cm}}\right)$. §. 1. Es iſt nämlich dieſer baare Wehrt $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c:n}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n\,m}}\right)$

$$= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n\,m}}\right).$$

Dieſs iſt der allgemeine Ausdruck für den *Wehrt einer augenblicklichen Rente* $\frac{1}{n}$, *wo n nämlich die Zahl der Augenblicke im Jahr anzeiget und unendlich iſt.*

8. *Zu-*

8.

Zuſatz 1. Iſt $\frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}} - 1$ das iſt, ſetzet man voraus, daſs die augenblicklichen Zinſen nach dem jährlichen Zinsfuſs r berechnet werden ſollen, ſo iſt der baare Wehrt der *augenblicklichen Rente* $\frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$ und $c = log.\ nat.\ r.$ (§. 3.)

Dieſs erhellet auch ſo. Es iſt der Wehrt der augenblicklichen Rente $= \int \frac{dx}{r^x}$; wenn der Zinsfuſs r beybehalten, und die Rente in jedem Augenblick $= dx$ geſetzet wird.

Aber $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{r^x \log.\ nat.\ \frac{1}{r}}$; und weil mit $x = o$, auch das *Integral* verſchwinden ſoll, ſo muſs zur Ergänzung zugeleget werden $- \frac{1}{log.\ nat.\ \frac{1}{r}}$. Folglich iſt das vollſtändige Integral $\int \frac{dx}{r^x} = \left(\frac{1}{r^x} - 1\right) \cdot \frac{1}{log.\ nat.\ \frac{1}{r}}$, (und weil $log.\ nat.\ \frac{1}{r} = - log.\ nat.\ r.$) auch $= \frac{1}{log.\ nat.\ r}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$.

9.

Zuſatz 2. Der Wehrt der jährlichen Rente 1, bey dem Zinsfuſs r, iſt $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ für x Jahre. Dieſer verhält ſich alſo zu dem Wehrt der augenblicklichen Rente $\frac{1}{n}$, wo n die Zahl der Augenblicke im Jahre ausdrückt,

ausdrückt, und eine *unendliche* Zahl ist, wie $\frac{1}{r-1} : \frac{1}{\log. nat. r} = log. nat. r : r - 1 = 6,03922 : 6,04$, wenn $r = 1,04$. Es ist der Unterschied also nur 0,0001.

10.

Zusatz 3. Wenn die *augenblickliche Rente* zugleich eine *immerwährende* seyn soll, das ist, wenn $x = \infty$, so ist ihr baarer Wehrt $= \frac{1}{\log. nat. r}$.

Der baare Wehrt einer *immerwährenden* Jahrsrente ist $= \frac{1}{r-1} = p$, oder dem *Grundcapital*. Also der Wehrt der augenblicklichen immerwährenden zu dem Wehrt der jährlichen immerwährenden wie $r - 1 : \log. nat. r$.

Anmerk. Simpson *) setzet $\frac{1}{\log. nat. r} = p$ gleich dem *Grundcapital* $\frac{1}{r-1}$, wenn x unendlich wird. Das ist unrichtig. Das Grundcapital reicht wohl hin, die Rente 1 *jährlich auf immer* zu geben, aber nicht um *alle Augenblicke* $\frac{1}{n}$tel zu geben.

Das Grundcapital bey augenblicklichen Renten sey p', so ist es $= \frac{1}{\log. nat. r} = \frac{1}{0,03922} = 25,49$, wenn nämlich $r = 1,04$.

11. *Zu-*

*) *Select. Exercis.* p. 324.

II.

Zusatz 4. Will man $c = r - 1$ nehmen, und also $\frac{c}{n} = \frac{r-1}{n}$, oder, dafs die augenblicklichen Zinsen $\frac{1}{n}$tel der Jahrszinsen sind, so ist der *baare Wehrt einer Rente in augenblicklichen Terminen*, jede von $\frac{1}{n}$ auf m Jahre, *zu dem Wehrt einer jährlich zahlbaren Rente auf gleich lange Zeit*, nach dem jährlichen Zinsfufs $1 + c = r$, in dem Verhältnifs $\frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{e^{cm}}\right) : \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$ $= 1 - \frac{1}{e^{cm}} : 1 - \frac{1}{r^m}$. Wenn $m = 1$, so ist das Verhältnifs $= 1 - \frac{1}{e^c} : 1 - \frac{1}{r}$.

Das hiefse die augenblickliche Rente auf die Art berechnet, wie D. *Price* und *Morgan* sie genommen, in den oben (Cap. I. §. 28.) angeführten Formeln.

Es ist *log. nat.* $e^c = 0{,}04$ für $r = 1{,}04$ und $c = r - 1 = 0{,}04$. Daher *log. brigg.* $e^c = 0{,}04 . 0{,}43429$ $= 0{,}0173716 =$ *log. brigg.* $1{,}0481$, und $e^c = 1{,}0481$. Also $1 - \frac{1}{e^c} : 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{1{,}0481} : 1 - \frac{1}{1{,}04}$ $= \frac{0{,}0481}{1{,}0481} : \frac{0{,}04}{1{,}04}$, $= 0{,}050024 : 0{,}041924$. Das ist, nahe $5 : 4$. Dieſs ist eine beträchtliche Verschiedenheit.

12.

Zusatz 5. Rechnet man dagegen blos die simplen Zinsen der *unterjährlichen* Termine auf die Art wie oben (Cap. I. §. 22.), setzet sie nämlich in Verhältniss zu den Jahrszinsen, wie die Termine sich zu der Zeit eines Jahrs verhalten, so ist *der Ueberschuss* des Wehrts *der augenblicklichen*, oder überhaupt der in sehr kleinen Terminen zu hebenden *Renten über den Wehrt der jährlichen Renten* $= \frac{1}{2}(r-1)R$, wo R den Wehrt der *jährlichen* Rente ausdrückt. Es ist dieser Ueberschuss nach §. 21. $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)(r-1)R$ für $\frac{1}{n}$ teljährliche Renten; also $\frac{1}{2}(r-1)R$, wenn *n* sehr gross wird.

Und da $R = \int \frac{1}{r^m}$ das ist der Wehrt der Jahrsrente auf *m* Jahre $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, so ist jener Ueberschuss $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^m}$, oder gleich der *Hälfte einer Jahrshebung weniger den halben baaren Wehrt der letztern Hebung nach m Jahren, den man, wenn m gross ist, vernachlässigen kann.*

13.

Zusatz 6. Und auf eben diese Art gerechnet, ist der Belang oder der *derzeitige Wehrt einer aufgeschwollenen augenblicklichen Zeitrente* nach *m* Jahren um $\frac{1}{2}\overline{r-1}.R'$ *gröser als die aufgeschwollenen Jahrsrenten*, wenn R' die letzteren anzeigt.

Weil

Weil hier $R' = r^m \int \frac{1}{r^m} = r^m \frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, so ist $\frac{1}{2} R' \cdot \overline{r-1} = \frac{1}{2} r^m - \frac{1}{2}$. Also ist der Wehrt der aufgeschwollenen augenblicklichen Rente nach m Jahren $= R' + \frac{1}{2}(r^m - 1)$.

14.

Beweis des 6ten Satzes in §. 33. von dem Wehrt der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Jahrsrente.

Der baare Wehrt einer solchen Jahrsrente ist

$$= \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \ldots + \frac{m}{r^m} = \int \frac{m}{r^m}.$$

Nun ist aber auch

$$\begin{aligned}
\int \frac{m}{r^m} = {} & \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^m} \\
& + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^m} \\
& + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^m} \\
& \quad \ldots \\
& + \frac{1}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^m} \\
& + \frac{1}{r^m}.
\end{aligned}$$

Also

Alſo $= \int \frac{1}{r^m}$

$+ \int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r}$

$+ \int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}$

$+ \quad + \quad +$

$+ \int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \cdots - \frac{1}{r^{m-1}}$

$= m \int \frac{1}{r^m} - \int \frac{1}{r^{m-1}} - \int \frac{1}{r^{m-2}}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \int \frac{1}{r}.$

Die Anzahl der *abzuziehenden* Summen iſt $m - 1$.

Ferner iſt $\int \frac{1}{r^{m-1}} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-1}}\right)$

und $\int \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-2}}\right)$

$\int \frac{1}{r} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-(m-1)}}\right) = \frac{1}{r}.$

Demnach geben die *abzuziehenden* Summen, zuſammengenommen,

$\frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{r}\right)$

$= \frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1} \int \frac{1}{r^{m-1}}.$

$= \frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1}\left(\int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^m}\right)$. Daher iſt $\int \frac{m}{r^m}$

$= m \int \frac{1}{r^m} - \frac{m-1}{r-1} + \frac{1}{r-1} \cdot \int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^m}.$

$= \frac{m}{r-1} - \frac{m}{(r-1)r^m} - \frac{m}{r-1} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-1} \int \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^m}$

$$= \int \frac{1}{r^m} + \frac{1}{r-1} \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{(r-1)r^m}$$

$$= \frac{r}{r-1} \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{(r-1)r^m} = p \left(r \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{r^m} \right).$$

Das ist, *von dem mit dem Zinsenfuss multiplicirten baarem Wehrt einer unveränderlichen Jahrsrente 1, wird der baare Wehrt der letzten Hebung, der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen steigenden Jahrsrente abgezogen. Der Rest mit dem Grundcapital multiplicirt, giebt alsdenn den Wehrt der steigenden Rente.*

15.

Formeln für veränderliche Zeitrenten.

Die Zeitrenten können nach sehr verschiedenen Gesetzen sich verändern.

Lass die auf einander folgenden Termine a, b, c, seyn, so ist ihr Wehrt

$$= \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + + \cdot$$

Solche Reihen können durch bekannte Methoden *summirt* werden, wenn das Gesetz, nach welchem a, b, c, fortgehen, bestimmt ist, oder ein *Terminus generalis* der Reihe gegeben ist.

Zur Praxis für *Zeitrenten* würde das genügen, was davon oben schon vorgekommen ist. Man findet selten solche, die nach einer sehr zusammengesetzten Regel sich verändern. Allein zur Berechnung der *Leibrenten* ist es nöthig, noch einige besondere Fälle für *veränderliche* Renten mitzunehmen.

16. Es

16.

Es werde die Reihe $\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \frac{x}{r^x}$ bezeichnet wie oben durch $\int\frac{x}{r^x}$.

Die *Reihe* $\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + + \frac{x^2}{r^x}$, wo die Zähler der Brüche, das ist, die *Rentenhebungen* fortgehen nach den *Quadraten der natürlichen Zahlen*, durch $\int\frac{x^2}{r^x}$.

Eben so sey, $\frac{1}{r} + \frac{2^3}{r^2} + \frac{3^3}{r^3} + + + \frac{x^3}{r^x}$
$= \int\frac{x^3}{r^x}$

und $\frac{1}{r} + + + + \frac{2^n}{r^2} + \frac{3^n}{r^3} + + \frac{x^n}{r^x} = \int\frac{x^n}{r^x}$ und so ferner.

17.

Nun ist $\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + + +$ ins *Unendliche fortgesetzt*, $= \frac{1}{r-1}$.

Ferner $\int\frac{x}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r}{(r-1)^2}$;

$\int\frac{x^2}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r+1)}{(r-1)^3}$;

$\int\frac{x^3}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r^2+4r-1)}{(r-1)^4}$;

$\int\frac{x^4}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r^3+11.r^2+11.r+1)}{(r-1)^5}$.

Diese Sätze werden jeder aus dem nächstvorhergehenden leicht erwiesen.

1) Es ist $\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}$ ins *Unendliche* nämlich fortgesetzt, in welchem Fall in $\frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ der letzte Theil $\frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^x} = 0$ wird.

Nun sey $\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \frac{4}{r^4} + + = \int \frac{x}{r^x}$ so multiplicire man auf beyden Seiten mit $r-1$ und man bekommt

$$1 + \frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + \frac{4}{r^3} + +$$
$$- \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} - - = (r-1) \int \frac{x}{r^x}$$
$$= 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + + = 1 + \frac{1}{r-1} = \frac{r}{r-1} = (r-1) \int \frac{x}{r^x}.$$

Folglich $\int \frac{x}{r^x} = \frac{r}{(r-1)^2}$.

2) Eben so ist $\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + \frac{4^2}{r^4} + +$ $= \int \frac{x^2}{r^x}$. Dieſs multiplicirt auf beyden Seiten mit $r-1$ giebt

$$+ 1 + \frac{2^2}{r} + \frac{3^2}{r^2} + \frac{4^2}{r^3} + +$$
$$- \frac{1}{r} - \frac{2^2}{r^2} - \frac{3^2}{r^3} - - = (r-1) \int \frac{x^2}{r^x}.$$
$$= 1 + \frac{2^2-1}{r} + \frac{3^2-2^2}{r^2} + \frac{4^2-3^2}{r^3} + +$$
$$= 1 + \frac{2+1}{1} + \frac{2 \cdot 2+1}{r^2} + \frac{2 \cdot 3+1}{r^3} + \frac{2 \cdot 4+1}{r^4} + +$$
$$= 1 + \int \frac{1}{r^x} + 2 \cdot \int \frac{x}{r^x} = \frac{r}{r-1} + \frac{2 \cdot r}{(r-1)^2} = \frac{r^2+r}{(r-1)^3}.$$

Daher

Daher $\int \frac{x^2}{r^x} = \frac{r^2+r}{(r-1)^3}$.

3) $\int \frac{x^3}{r^x} = \frac{r}{r} + \frac{2^3}{r^2} + \frac{3^3}{r^3} + \frac{4^3}{r^4} + +$,

$(r-1)\int \frac{x^3}{r^x} = 1 + \frac{2^3}{r} + \frac{3^3}{r^2} + \frac{4^3}{r^3} + + +$

$- \frac{1}{r} - \frac{2^3}{r^2} - \frac{3^3}{r^3} - - -$

$= 1 + \frac{2^3-1}{r} + \frac{3^3-2^3}{r^2} + \frac{4^3-3^3}{r^3} + +$

$= 1 + \frac{3+3+1}{r} + \frac{3\cdot 2^2+3\cdot 2+1}{r^2} + \frac{3\cdot 3^2+3\cdot 3+1}{r^3} + +$

$= 1 + 3\int \frac{x^2}{r^x} + 3\int \frac{x}{r^x} + \int \frac{1}{r^x} =$

$\frac{r}{r-1} + \frac{3r}{(r-1)^2} + \frac{3\cdot(r^2+r)}{(r-1)^3} = \frac{r^3+4r^2+r}{(r-1)^3}$.

Also $\int \frac{x^3}{r^x} = \frac{r^3+4r^2+r}{(r-1)^4}$.

Auf dieselbige Weise geht man weiter, wenn man für $\int \frac{x^4}{r^x}$, $\int \frac{x^5}{r^x}$ Ausdrücke suchen will, ohne die allgemeine Formel zu gebrauchen, worunter alle diese als besondere Fälle begriffen sind.

18.

Wo man diese Formeln nöthig hat, da kommt es gemeiniglich darauf an, sie auf *eine bestimmte Anzahl von Gliedern* zu haben. Es sey die bestimmte Zahl von Gliedern n, und die vorigen Summen bis auf n Glieder werden bezeichnet durch

$\int \frac{n}{r^n}$;

$\int\frac{n}{r^n}$, $\int\frac{n^2}{r^n}$, $\int\frac{n^m}{r^n}$; so ist im *allgemeinen*

$$\int\frac{n}{r^n} = \frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n^{m-1}}{r^n}$$
$$+\frac{1}{r-1}\left(\frac{m-1}{1}\cdot\int\frac{n^{m-1}}{r^n}+\frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1\quad 2}\cdot\int\frac{n^{m-2}}{r^n}\right.$$
$$+\frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}\int\frac{n^{m-3}}{r^n}+\text{etc.}+$$
$$\left.\frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\text{---}\cdot 1.}{1.\quad 2.\quad\text{---}\quad\overline{m-1}}\cdot\int\frac{n}{r^n}\right)$$
$$-\frac{(n+1)^{m-1}}{r-1}\cdot\frac{n}{r^n}$$

Diese Formel, die ich derzeit fand, als ich eine solche zuerst suchte, und die zwote gleich folgende noch nicht kannte, bestimmt zwar nur die höhern Summen durch die vorhergehenden niedern, und ist von der Seite nicht so brauchbar als andere, welche jede Summe unmittelbar aus den Zahlen n, r, m geben; allein sie hat den Vorzug, dass sie das Gesetz, wornach die *Coefficienten* fortgehen, als welche mit den Coefficienten eines Binomii von der Potenz $m-1$ einerley sind, auf eine sehr einfache Art darstellet.

19.

Wenn man zum voraus schon die ganzen *Summen ins Unendliche fortgesetzt* berechnet hat, so kann aus diesen der Wehrt für die ersten n Glieder bestimmet werden. Es bezeichne wiederum $\int\frac{1}{r^x}$, $\int\frac{x}{r^x}$, $\int\frac{x^2}{r^x}$, $\int\frac{x^3}{r^x}$, $\int\frac{x^m}{r^x}$

die

die *Summen der unendlichen* Reihen, und

$\int\frac{n}{r^n}, \int\frac{n^2}{r^n}, \int\frac{n^3}{r^n}, \int\frac{n^m}{r^n}$ diese *Summen bis auf* ∞ *Glieder genommen*, so ist

$$\int\frac{n^m}{r^n} = \int\frac{x^m}{r^x} - \frac{1}{r^n}\left(n^m \cdot \int\frac{1}{r^x} + \frac{m}{1}\cdot n^{m-1}\int\frac{x}{r^x}\right.$$
$$+ \frac{m\,.\,m-1}{1.\ 2.}\cdot n^{m-2}\cdot\int\frac{x^2}{r^x}$$
$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1.\ 2.\ 3.}\cdot n^{m-3}\int\frac{x^3}{r^x}$$
$$\left. + + + \frac{m\,.\,m-1 - - - - 1}{1.\ 2. \quad - - - - \ m}\cdot\int\frac{x^m}{r^x}\right).$$

Auf diese Art haben *Moivre* und andere solche Summen ausgedruckt.

Der Gebrauch der letztern Formel ist leichter, wenn die Summen der unendlichen Reihen vorher gefunden sind, deren Wehrte sich nicht verändern. Bey der ersten Formel im §. 18. ist es nöthig, jedesmal die niedern Summen für *n* Glieder mit zu berechnen. Wo dieß Letztere aber zugleich auch zum Zweck gehört, wie bey der Berechnung von Tabellen solcher Zahlen, da kommt man durch die erstere Formel am geschwindesten fort.

20.

Der Beweis für die *erste Formel* im §. 18. ist folgender.

1) Es ist die Formel richtig für $m = 1$. Alsdenn ist

$$\int\frac{n}{r^n} = \frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^n} - \frac{n}{(r-1)r^n}\cdot \quad (\S.\ 14.\ \textit{Zus.})$$

2) Sie ist richtig für $m=2$, oder es ist

$$\int\frac{n^2}{r^n}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}-\frac{(n+1)\cdot n}{(r-1)r^n}.$$

Denn $\int\frac{n^2}{r^n}=\frac{1}{r}+\frac{2^2}{r^2}+\frac{3^2}{r^3}+\frac{4^2}{r^4}+++\frac{n^2}{r^n}$

$=\frac{1}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}$

$+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\frac{1}{r}$

$+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{2}{r^2}$

$+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{3}{r^3}$

$=n\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{n-1}{r^{n-1}}-\int\frac{n-2}{r^{n-2}}-\;-\int\frac{1}{r}\left(=\frac{1}{r}\right).$

Aber $\int\frac{n-1}{r^{n-1}}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{n-1}{(r-1)r^{n-1}}$

und $\int\frac{n-2}{r^{n-2}}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{n-2}{(r-1)r^{n-2}}$,

und so ferner.

imgleichen $\int\frac{1}{r^{n-1}}+\int\frac{1}{r^{n-2}}++\int\frac{1}{r}=n\int\frac{1}{r^n}-\int\frac{n}{r^n}$,

und noch ist $\frac{n-1}{r^{n-1}}+\frac{n-2}{r^{n-2}}++\frac{1}{r^1}=\int\frac{n-1}{r^{n-1}}$

$=\int\frac{n}{r^n}-\frac{n}{r^n}$. Folglich $\int\frac{n^2}{r^n}=n\int\frac{n}{r^n}-\frac{r}{r-1}\cdot n\int\frac{1}{r^n}$

$+\frac{r}{r-1}\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\int\frac{n}{r^n}-\frac{n}{(r-1)r^n}$

$=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{n\cdot r}{r-1}\int\frac{1}{r^n}$

$$= \frac{n}{r-1} \cdot \frac{n}{r^n} - \frac{r}{r-1} \cdot n \int \frac{1}{r^n} - \frac{n}{(r-1)r^n}$$

$$= \frac{r}{r-1} \cdot \int \frac{n}{r^n} + \frac{1}{r-1} \cdot \int \frac{n}{r^n} - \frac{n(n+1)}{(r-1)r^n}.$$

Und nun weiter, wenn die Formel richtig ist für $\int \frac{n^m}{r^n}$, und für die niedern Reihen $\int \frac{n^{m-1}}{r^n}$, $\int \frac{n^{m-2}}{r^n}$, so ist sie auch richtig für $\int \frac{n^{m+1}}{r^n}$.

Es ist wie vorher

$$\int \frac{n^{m+1}}{r^n} = n \int \frac{n^m}{r^n} - \int \frac{(n-1)^m}{r^n} - \int \frac{(n-2)^m}{r^n} - - -$$

$$\int \frac{1^m}{r^n}.$$

Weil $\int \frac{n^{m+1}}{r^n} = \frac{1}{r} + \frac{2^{m+1}}{r^2} + \frac{3^{m+1}}{r^3} + + \frac{n^{m+1}}{r^n}$

$$= \frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + + \frac{n^m}{r^n}$$

$$+ \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + + \frac{n^m}{r^n}$$

$$\frac{3^m}{r^3} + + \frac{n^m}{r^n}$$

$$+ + \frac{n^m}{r^n}$$

$$= n \int \frac{n^m}{r^n} - \int \frac{1}{r} - \int \frac{2^m}{r^2} - \int \frac{3^m}{r^3} - \int \frac{(n-1)^m}{r^{n-1}}$$

$$= n \int \frac{n^m}{r^n} - \int \frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} - \int \frac{(n-2)^m}{r^{n-2}} - - - \frac{1}{r}.$$

Der Deutlichkeit halber schreibe man für die Summen $\int \frac{n^{m+1}}{r^n}$, $\int \frac{n^m}{r^n}$, $\int \frac{n^{m-1}}{r^n}$, $\int \frac{n^{m-2}}{r^n}$ u. s. w. bis $\int \frac{n^1}{r^n}$, die Buchstaben N, M, L, K und so ferner in zurückgehender Ordnung für die Summen der niedern Potenzen bis $A = \int \frac{n}{r^n}$. Sollen aber von solchen Reihen n, n — 1. n — 2 . . . Glieder genommen werden, so bezeichne man dies so

$\overset{n}{-}N$, $\overset{n-1}{-}N$, u. s. f. $\overset{n}{-}M$, $\overset{n-1}{-}M$, u. s. f.

So ist

$$\overset{n}{-}N = n.\ \overset{n}{-}M - \overset{n-1}{-}M - \overset{n-2}{-}M - \overset{n-3}{-}M - -$$

Aber nach der Voraussetzung, dass die Formel richtig ist für $\int \frac{n^m}{r^n}$ oder für M, folgt

$$\overset{n}{-}M = \frac{r}{r-1}.\ \overset{n}{-}L + \frac{1}{r-1}.\ \left(\frac{m-1}{1}\ \overset{n}{-}K + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ 2}.\ \overset{n}{-}K + + + \overset{n}{-}A\right)$$

$$- \frac{(n+1)^{m-1}.\ n}{(r-1)\ r^n}\ \left(= -\left(n^m + \frac{m-1}{1}.\ n^{m-1} + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ 2}.\ n^{m-2} + + n\right) : (r-1)\, r^n\right)$$

Und

$$\overset{n-1}{-}M = \frac{r}{r-1}.\ \overset{n-1}{-}L + \frac{1}{r-1}.\ \left(\frac{m-1}{1}\ \overset{n-1}{-}K + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ 2}.\ \overset{n-1}{-}K + + + \overset{n-1}{-}A\right)$$

$$- \left((n-1)^m + \frac{m-1}{1}.\ (n-1)^{m-1} + + + n - 1\right) \cdot \frac{1}{(r-1)\, r^{n-1}}$$

Daraus

Daraus wird

$$^{n}N = n\,{}^{n}M - \frac{r}{r-1}\cdot\left({}^{n-1}L + {}^{n-2}L + {}^{n-3}L + + {}^{1}L\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left({}^{n-1}L + {}^{n-2}L + {}^{n-3}L + + {}^{1}L\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left({}^{n-1}K + {}^{n-2}K + + {}^{1}K\right)$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$+ \frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^m}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r}\right)$$
$$+ \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left(\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-2}}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r}\right)$$
$$+ \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left(\frac{(n-1)^{m-2}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-2}}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r}\right)$$
$$+ \frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{n-1}{r^{n-1}} + \frac{n-2}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r}\right).$$

Es iſt nach der Vorausſetzung auch

$${}^{n-1}L + {}^{n-2}L + + {}^{1}L = n\,{}^{n}L - {}^{n}M.$$

und $${}^{n-1}K + {}^{n-2}K + + {}^{1}K = n\,{}^{n}K - {}^{n}L$$

Auch iſt $$\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^m}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r} = {}^{n-1}M = {}^{n}M - \frac{n^m}{r^n}$$

und $$\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-1}}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r} = {}^{n-1}L = {}^{n}L - \frac{n^{m-1}}{r^n}.$$

Endlich $$\frac{n-1}{r^{n-1}} + \frac{n-2}{r^{n-2}} + + \frac{1}{r} = {}^{n-1}A = {}^{n}A - \frac{n}{r^n}$$

Alſo

$$^{n}N = n\,{}^{n}M - \frac{r}{r-1}\cdot\left(n\,{}^{n}L - {}^{n}M\right) - \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left(n\,{}^{n}L - {}^{n}M\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left(n\,{}^{n}K - {}^{n}L\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\left(n\,{}^{n}J-{}^{n}K\right)$$
$$-\quad-\quad-\quad-\quad\frac{1}{r-1}\left(n\,{}^{n}A-{}^{n}B\right)$$
$$+\frac{1}{r-1}\cdot\left({}^{n}M-\frac{n^{m}}{r^{n}}+\frac{m-1}{1}\left({}^{n}L-\frac{n^{m-1}}{r^{n}}\right)\right.$$
$$+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left({}^{n}K-\frac{n^{m-2}}{r^{n}}\right)$$
$$\left.++\,{}^{n}A-\frac{n}{r^{n}}\right).$$

Und weil ebenfalls nach der Vorausſetzung

$$n\,{}^{n}M=n\frac{r}{r-1}\cdot{}^{n}L+\frac{n.1}{r-1}\cdot\left(\frac{m-1}{1}\cdot{}^{n}L+\frac{m-1.m-2}{1.\ 2.}{}^{n}K\right.$$
$$\left.+\frac{m-1.m-2.m-3.}{1.\quad 2.\quad 3}{}^{n}J++{}^{n}A\right)$$
$$-\frac{n.(n+1)^{m-1}.n}{(r-1)r^{n}},$$

ſo erhält man

$${}^{n}N=\frac{r}{r-1}\cdot{}^{n}M+\frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{m-1}{1}\cdot{}^{n}M+\frac{m-1.m-2}{1.\ 2}\cdot{}^{n}L\right.$$
$$\left.+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}{}^{n}K+++\,{}^{n}B\right)$$
$$+\frac{1}{r-1}{}^{n}M-\frac{n^{m}}{r^{n}}+\frac{m-1}{1}\left({}^{n}L-\frac{n^{m-1}}{r^{n}}\right)+$$
$$+\frac{m-1.m-2.}{1.\quad 2}\cdot\left({}^{n}K-\frac{n^{m-2}}{r^{n}}\right)$$
$$++\left({}^{n}A-\frac{n}{r^{n}}\right)$$
$$=\frac{r}{r-1}\cdot{}^{n}M+\frac{1}{r-1}\left(\frac{(m-1)}{1}+1\right){}^{n}M+\left(\frac{m-1.m-2}{1.\quad 2}\right.$$
$$\left.+\frac{m-1}{1}\right){}^{n}L+\left(\frac{m-1.m-2.m-3}{1.\quad 2.\quad 3}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\right)$$
$${}^{n}K++{}^{n}A\Big)\qquad-$$

$$= \frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{n^m}{r^n} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m-1.\,m-2}{1.\quad 2}\cdot\frac{n^{m-2}}{r^n} + + \frac{n}{r^n}\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{n(n+1)^{m-1}\,n}{r^n}.$$

Nun ist $\frac{m-1}{1} + 1 = m$,

$$\frac{m-1.\,m-2}{1.\quad 2} + \frac{m-1}{1}\cdot = \frac{m.\,m-1}{1.\quad 2},$$

$$\frac{m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\quad 2.\quad 3} + \frac{m-1.\,m-2}{1.\quad 2}$$
$$= \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

und $n^m + \frac{m-1}{1}\cdot n^{m-1} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot n^{m-2}$
$+ + n = (n+1)^{m-1}\,n.$
auch $(n+1)^{m-1}\,n + (n+1)^{m-1}\,n.\,n$
$= (n+1)^m.\,n$

Folglich

$$^nN = \frac{r}{r-1}\cdot {}^nM + \frac{1}{r-1}\cdot\left(m.{}^nM + \frac{m.\,m-1}{1.\quad 2}\cdot {}^nL + \right.$$
$$\left.\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\quad 2.\quad 3}\,{}^nK + + {}^nA\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot (n+1)^m.\,n$$

Oder

$$\int\frac{n^{m+1}}{r^n} = \frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n^m}{r^n} + \frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{m}{1}\cdot\int\frac{n^m}{r^n}\right.$$
$$\left. + \frac{m.\,m-1}{1.\quad 2}\cdot\int\frac{n^{m-1}}{r^n} + +\int\frac{n}{r^n}\right)$$
$$- \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot (n+1)^m.\,n.$$

welches die allgemeine Formel in §. 18. ist.

21. Der

21.

Der Beweis der Formel in §. 19. wird leicht so gefunden:

Es ist $\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + +$ *ins Unendliche* $= \int \frac{x^m}{r^x}$.

Das Stück dieser Reihe, welches auf das $n$te Glied folget, ist:

$$= \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} + \frac{(n+2)^m}{r^{n+2}} + \frac{(n+3)^m}{r^{n+3}} + + +$$

$$= \frac{1}{r^n} \cdot n^m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + + + \text{ins Unendliche} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^n} \cdot \frac{m}{1} \cdot n^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \text{ins Unendliche} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^n} \frac{m.m-1}{1\ 2} \cdot n^{m-2} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + + \text{ins Unendliche} \right)$$

$$+ + + \frac{1}{r^n} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + + \text{ins Unendliche} \right)$$

Folglich das Stück der Reihe, welches die n ersten Glieder enthält, oder

$$\int \frac{n^m}{r^n} = \int \frac{x^m}{r^n} - \frac{1}{r^n} \left(n^m \int \frac{1}{r^x} + \frac{m}{1} \cdot n^{m-1} \int \frac{x}{r^x} \right.$$

$$\left. + \frac{m.m-1}{1\ 2} \cdot n^{m-2} \int \frac{x^2}{r^x} + + \int \frac{x^m}{r^n} \right)$$

wie oben.

22.

Wenn diese Summen berechnet sind, so reicht man aus für alle Reihen $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + +$, in denen die Zähler der Glieder einen *Terminum generalem* haben, der nur

nur allein von x, das ist, von *der Zahl des Gliedes* in der Reihe abhängt. Es sey der allgemeine Ausdruck jedes Gliedes, oder dieser Terminus generalis, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + +$ so kann die Reihe bis x Glieder durch $\int\frac{1}{r^x} + B\int\frac{x}{r^x} + C\int\frac{x^2}{r^x} + D\int\frac{x^3}{r^x} + +$ summirt werden. Es giebt allerdings in besondern Fällen Methoden, die kürzer sind, wobey ich mich aber hier nicht aufhalten darf.

23.

Für *augenblickliche Renten* ist $\int\frac{dx}{r^x} = \frac{1}{\text{log. nat. } r}\cdot\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$, (und p', was hier das *Grundcapital* ist, für $\frac{1}{\text{log. nat. } r}$ geschrieben, $= p'.\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$.

Ferner $\int\frac{x\,dx}{r^x} = p'\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right)$.

Denn wenn $\frac{1}{r} = q$, so ist $\int\frac{x\,dx}{r^x} = \int q^x.x\,dx$, und weil $d.(q^x) = q^x\,dx + x\,q^x\,dx$ *log. nat.* q, so wird

$$\frac{x\,q^x}{\text{log. nat. } q} - \int\frac{x\,dx}{\text{log. nat. } q} = \int x\,q^x\,dx,$$

$$= \frac{1}{\text{log. nat. } \frac{1}{q}}\cdot\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right) \text{(weil } log.nat.\, q = -\text{ log. nat. } \tfrac{1}{q}\text{)}$$

$$= \frac{1}{\text{log. nat. } r}\cdot\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right) = p'\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right).$$

Hier ist $\int\frac{dx}{r^x}$ das *vollständige Integral* $= p'\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$, welches verschwindet, wenn $x = o$. Daher darf keine beständige Gröfse weiter zugeleget werden.

24. Eben

24.

Eben so ist $\int \frac{x^2 dx}{r^x} = 2p' \int \frac{x dx}{r^x} - p' \frac{x^2}{r^x}$;

$\int \frac{x^3 dx}{r^x} = 3p' \int \frac{x^2 dx}{r^x} - p' \frac{x^3}{r^x}$

und im allgemeinen

$\int \frac{x^m}{r^x} \cdot dx = m.p' \int \frac{x^{m-1}}{r^x} - p' \frac{x^m}{r^x}$.

Aber weil auch

$\int \frac{x^{m-1} dx}{r^x} = (m-1)p' \int \frac{x^{m-2}}{r^x} dx - \frac{p' x^{m-1}}{r^x}$

und $\int \frac{x^{m-2} dx}{r^x} = (m-2)p' \int \frac{x^{m-3} dx}{r^x} - \frac{p' x^{m-2}}{r^x}$

so hat man, wenn diese Substitutionen vorgenommen werden

$$\int \frac{x^m dx}{r^x} = (m.m-1 \ldots . 1)\, p'^m . \int \frac{dx}{r^x}$$

$$- \frac{p'}{r^x} (x^m + m\, p' x^{m-1} + m.m-1.p'^2 . x^{m-2}$$

$$+ m.m-1 \ldots . 2.p'^{m-1} x),$$

und weil $\int \frac{dx}{r^x} = p' - \frac{p'}{r^x}$, so wird

$$\int \frac{x^m dx}{r^x} = (m.m-1 \ldots 1.)\, p'^{m+1}$$

$$- \frac{p'}{r^x} (x^m + m p' x^{m-1} + m.m-1.p'^2 x^{m-2} + +$$

$$+ + + m.m-1 \ldots 2.p'^{m-1} x$$

$$+ m.m.-1 \ldots 1.p'^m)$$

$$= (m.m-1 \ldots .1)\, p'^{m+1} - \frac{p}{r^x} (x^m + m p' x^{m-1} +$$

$$m.m-1.p'^2 . x^{m-2} + + + m.m-1 \ldots 1.p'^m).$$

Dieſs

Dieſs iſt das *vollſtändige Integral*, welches verſchwindet, wenn $x = o$. Setzet man $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{r^x \log. nat. \frac{1}{r}} = -\frac{p'}{r^x}$, das iſt, ohne das Integral zu vervollſtändigen, ſo wird

$$\int \frac{x^m dx}{r^x} = -\frac{p'}{r^x} (x^m + m. x^{m-1} p' + m. m - 1. x^{m-2} p'^2 + m. m - 1. m - 2 \ldots . (m - m + 2) x p'^{m-1} + m. m - 1 \ldots 1. p'^m).$$

Dieſes iſt dieſelbige Formel, die man gewöhnlich findet (Siehe *Käſtners* Analyſis) *) für

$$\int e^{mx}. x^n dx = e^{mx} \left(\frac{x^n}{m^1} - \frac{n x^{n-1}}{m^2} + \frac{n. n-1}{m^3} \cdot x^{n-2} - + \right)$$

Man ſchreibe in dem vorhergehenden Ausdruck ſtatt m, n, und e^{mx}, für $\frac{1}{r^x}$, ſo iſt $m = -$ *log. nat.* r und $p' = -\frac{1}{m}$. Dann geht eine dieſer Formeln in die andre über. Allein hier ſind es noch *unvollſtändige* Integralien, die einer Ergänzung bedürfen.

25.

Anmerkung. Ueberhaupt iſt aber zu bemerken, daſs alle bisher vorgekommene Ausdrücke für die Wehrte der Renten nicht mehr brauchbar ſind, wenn *keine Zinſen* gerechnet werden, oder, wenn $s = 1$ iſt. Sie ſind in dieſem Fall zwar nicht falſch, aber unbeſtimmt. Sie werden $\frac{0}{0}$, und lehren nichts. Wie alsdenn ihr beſtimmter Wehrt durch analytiſche Methoden gefunden werde, iſt bekannt. Man ſehe *Käſtners Analyſis des Unendlichen*

*) *Käſtners Analyſis des Unendlichen.* §. 242.

chen §. 372. Z. B. Es ist $\int\frac{1}{r^a} = \frac{1}{r-1}\cdot\left(1-\frac{1}{r^a}\right)$. Wird alles zu Einer Benennung gebracht, so ist $\int\frac{1}{r^a} = \frac{r^a-1}{(r-1)r^a}$. Man differentiire Zähler und Nenner, jeden für sich, dass nur r als *veränderlich* genommen wird, so erhält man $\frac{a\,r^{a-1}.\,dr}{dr} = a$. Dieſs ist in dem Fall wenn $r=1$, der Wehrt von $\int\frac{1}{r^a}$.

Ferner ist $\int\frac{a}{r^a} = \frac{r}{(r-1)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{r^a}\right) - \frac{a}{(r-1)r^a}$ $= \frac{r(r^a-1)-(r-1)a}{(r-1)r^a}$. Dieſs eben so differentiiret, giebt $\frac{(a+1)r^a.\,dr - dr - a\,dr}{a\,r^{a-1}.\,(r-1)^2\,dr + 2\,(r-1)r^a.\,dr}$. Weil aber dieſer Bruch ebenfalls $=\frac{0}{0}$ ist, wenn $r=1$, so muſs von neuen differentiiret werden. Dann erhält man $\frac{(a+1).\,a.\,r^{a+1}}{2\,r^a}$, welches $r=1$ gesetzet, in $\frac{(a+1)a}{2}$ übergeht, und in dieſem Fall der Wehrt von $\int\frac{a^2}{r^a}$ ist.

Zweytes Capitel.

Von Leibrenten.

Erſter Abſchnitt.

Von unveränderlichen Leibrenten.

37.

Erklärungen. Eine Rente, die bezahlet wird, ſo lange eine Perſon lebet, mit ihrem Tode aber aufhört, iſt eine *Leibrente (Annuity upon one Live, the value of the Live.)* Es iſt eben nicht nöthig, daſs ihre Dauer von dem Leben derſelbigen Perſon abhange, welche ſie genieſſet; ſie kann an jemand und deſſen Erben gezahlet werden, ſo lange ein anderer lebet; allein ſie wird als Leibrente nur auf die Perſon bezogen, von deren Leben ſie abhängt. Sie iſt eine *einfache Lebensrente.*

Renten, die von dem Leben *mehrerer Perſonen abhangen, ſind überhaupt zuſammengeſetzte Leibrenten.* Es kann dabey ankommen auf das *Zuſammenleben mehrerer*, daſs nämlich die Rente nur gezahlt wird, ſo lange mehrere Perſonen beyſammen leben; oder auch darauf, daſs Eine oder mehrere aus einer gewiſſen Anzahl Perſonen noch am Leben ſind. Im erſten Fall ſind es Renten auf das Zuſammenleben, *Wehrte der Coexiſtenz (Values of joint Lives) Verbindungsrenten.* Im zweyten Fall ſind es Lebensrenten, auch wohl *Leibrenten auf mehrere Perſonen.*

Uebrigens können es Jahrsrenten ſeyn, oder halbvierteljährliche u. ſ. w. Man verſteht *Jahrsrenten*, wenn nicht ausdrücklich ein andres erinnert wird.

38.

Wenn man *gewiſs* wüſste, wie viele Jahre eine Perſon von einem gewiſſen Alter noch zu leben habe, ſo würde auch der baare Wehrt der Leibrente einerley ſeyn mit dem Wehrt einer Zeitrente von ſo viel Jahren. Jenes weiſs man nun nicht, allein man weiſs, *wie viel von einer beſtimmten Zahl von Menſchen eines gewiſſen Alters, in jedem folgenden Jahre*, im Durchſchnitt, *abſterben, und wie viele am Ende eines jeden Jahrs davon noch am Leben ſind.* Dieſs lehren die ſo genannten *Mortalitätstabellen* mit einem gewiſſen Grade von Zuverläſsigkeit, davon nachher. Z. B. von 374 Perſonen, die jetzo genau 40 Jahr alt ſind, leben am Ende des 41ſten Jahrs, oder am Anfang des 42ſten noch 367, nach der *Süſsmilchiſchen* Tafel. Am Ende dieſes zweyten Jahrs, oder am Anfang des dritten, 43ſten, ſind noch 360 übrig u. ſ. w. Dieſs nehmen wir nun ſo, als hieſse es: „von jedem ein„zelnen Hauffen Lebender von 40 Jahren, 374 an der „Zahl, gehen in dem erſten Jahr 7 ab.“ Wir gebrauchen die Tabellen, als enthielten ſie ſolche Allgemeinſätze. Das iſt ihr Sinn nicht. Davon will ich nachher etwas beybringen. Hier wollen wirs ſo nehmen, wies gewöhnlich geſchieht.

Daraus

Daraus ist denn klar, wie zu rechnen sey. Gesetzt ein Entrepreneur verpflichte sich, 374 Menschen, jedem eine Jahrsrente 1 Rthl., so lange sie leben, zu bezahlen, und zwar jedesmal *am Ende des Jahrs;* so hat er auszugeben am Ende des ersten Jahrs, nicht 374, sondern nur 367, weil schon sieben in diesem Jahr ausgestorben sind. Der baare Wehrt davon ist $\frac{367}{r}$ Rthl., das ist, 367 Rthl. discontirt auf Ein Jahr, wenn r den Zinsfuss bedeutet, weil er erst ein Jahr nach *jetzo* bezahlet. Eben so muss er am Ende des zweyten Jahrs zahlen 360 Rthl., weil nach der Tabelle so viel von der anfänglichen Zahl noch übrig sind. Und davon ist der baare Wehrt $= \frac{360}{r^2}$ Rthl. Das nämliche muss geschehen für alle folgende Jahre bis zum höchsten Lebensziel. Rechnet man alle diese Ausgaben zusammen, so bekommt man den baaren Wehrt aller 374 Leibrenten. Diese Summe mit 374 dividirt, giebt den baaren Wehrt einer einzelnen Leibrente für Eine Person von dem bestimmten Alter.

Eben das kommt heraus, wenn man die Zahl für jedes einzelne Jahr durch 374 dividirt, und alle diese Quotienten zusammen nimmt, als

$\frac{367}{374} \cdot \frac{1}{r}$ Rthl. $+ \frac{360}{374} \cdot \frac{1}{r^2}$ Rthl. und so ferner, für die folgenden Jahre bis zum höchsten Lebensziel.

Zugleich aber iſt auch klar, daſs man bey dieſer Rechnung *nichts in Anſchlag bringet für diejenigen, welche noch einen Theil des Jahrs, worinnen ſie abgehen, durchlebet haben.* Am Ende des erſten Jahrs ſind geſtorben 7; einige davon in der erſten Hälfte, die übrigen in der zwoten; aber am Ende des Jahrs wird für keinen etwas gerechnet. *So wird für das letzte Jahr des Lebens,* an deſſen Ende keiner übrig iſt, gar *nichts gerechnet.*

Denn ſo lange man blos auf ganze Jahre und jährlich nur zahlbare Leibrenten rechnet, ſieht mans ſo an, als wenn *die in einem Jahr Abſterbenden auf einmal im Anfang deſſelben abgehen.* Dieſe Vorausſetzung liegt überall zum Grunde, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes erinnert wird.

Gemeiniglich verſteht man auch unter Leibrenten ſolche jährliche, wobey für die Zwiſchenzeiten zwiſchen den beſtimmten Zahlungsterminen nichts gezahlet wird. Von ſolchen iſt auch hier anfangs nur die Rede. In der Folge wird gezeiget, was hinzukommen müſſe, wenn auch die Zwiſchenzeiten in Anſchlag zu bringen ſind.

39.

Wenn von 374 Vierzigjährigen nach Einem Jahr nur 367 am Leben ſind, ſo iſt auch für jeden Einzelnen die *Wahrſcheinlichkeit, daſs er nach Einem Jahre noch leben werde,* $= \frac{367}{374}$. Man nimmt nämlich an, daſs alle, wie am Alter, ſo auch an Geſundheit und andern Umſtän-

Umſtänden, wovon Leben oder Tod abhängt, einander gleich ſind. Man kann und muſs die meiſtenmale kleinere Verſchiedenheiten aus der Acht laſſen.

Da alſo $\frac{367}{374}$ die Wahrſcheinlichkeit des Lebens am Ende des erſten Jahrs iſt für einen Vierzigjährigen; und dieſe aus demſelbigen Grunde nach der nämlichen *Süſsmilchiſchen* Tabelle am Ende des zweyten Jahrs, $\frac{360}{374}$ iſt, und dieſs ſo weiter fortgehet, ſo iſt es auch klar, daſs man den baaren Wehrt der Leibrente finde, wenn man *den Wehrt der einzelnen Jahrsrenten für ſo viele Jahre* ſuchet, *als von dem gegebenen Alter bis zum höchſten Lebensziel noch übrig ſind, und den baaren Wehrt der Rente eines jeden Jahrs in die Wahrſcheinlichkeit des Lebens der Perſon für das Jahr multiplicirt.* Dieſs Verfahren iſt den allgemeinen Grundſätzen gemäſs, wornach Wahrſcheinlichkeiten berechnet werden müſſen. Sonſt ſieht man aus dem Vorhergehenden, daſs hier alles blos auf die Zuverläſsigkeit der Mortalitätstabellen ankomme, und man den Begriff von Wahrſcheinlichkeit allenfalls ganz entbehren könne.

Es iſt auch ferner einleuchtend, daſs wenn man ſtatt 374 eine andere *Anfangszahl* nimmt, z. B. 100, ſo laſſe ſich ſo ſchlieſsen: von 374 ſind nach Einem Jahr noch übrig 367, alſo von 100 noch 98,1. Der Schluſsſatz iſt wahr in demſelbigen Sinn, den der Grundſatz hat, nämlich daſs *im Durchſchnitt das ſo ſeyn werde.* Die

Brüche ſind zwar in den einzelnen Beyſpielen nicht möglich; müſſen aber doch beybehalten werden. Von 1000 in dem vorigen Exempel würden 981 (nicht 980) übrig geweſen ſeyn. Mehr als dieſs iſt hier nicht nöthig, um den Grund und die Sicherheit der folgenden Rechnungsarten einzuſehen.

Anmerkung. Einige nennen auch die Zahl der Lebenden im Anfang der Jahre, wie ſie in den Tabellen ſtehen, *die Wahrſcheinlichkeit des Lebens.* Darum. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Perſon von einem beſtimmten Alter in einem gewiſſen Jahre noch lebe, verhält ſich zu der Wahrſcheinlichkeit ihres Lebens für ein anderes Jahr, wie die Zahl der Lebenden in der Tabelle bey dem erſten Jahr zu der Zahl derſelben bey dem letzten. Z. B. die Wahrſcheinlichkeit eines Funfzehnjährigen, daſs er 50 Jahr alt werde, iſt $\frac{300}{511}$; und die Wahrſcheinlichkeit, daſs er 60 Jahr erreiche, iſt $\frac{210}{511}$. Folglich die erſtere zur letzteren wie 300:210, das iſt, wie die Zahlen der Lebenden bey dem Alter 50 und 60 Jahren, in den Tabellen.

40.

Satz 8. Es ſey die *anfängliche Zahl der Lebenden* von einem gewiſſen Alter, A, das *Alter* ſelbſt a; die Zahl der von A, nach Einem Jahr noch Lebenden, oder A nach Einem Jahr ſey $\overset{1}{-}$A, und nach zwey Jahren $\overset{2}{-}$A, nach drey Jahren $\overset{3}{-}$A u. ſ. f. nach x Jahren $\overset{x}{-}$A, wo nämlich

nämlich der Buchſtabe x an der linken Seite der Gröſse geſchrieben und unterſtrichen wird. Dieſs *Zeichen des Zuſtandes einer veränderlichen Gröſse nach einer gewiſſen Zeit* wird auf dieſe Art ſehr kenntlich gemacht.

Nun bezeichne man noch die *Leibrente* einer Perſon vom Alter a oder *ihren baaren Wehrt*, durch $\lambda\overline{a}$.

So iſt überhaupt

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}A}{r^2} + \frac{\overline{3}A}{r^3} + + \frac{\overline{x}A}{r^x}\right).$$

Dieſs iſt der Grundſatz, aus dem alles Uebrige hergeleitet wird. Die Formel druckt in jedem einzelnen Theil die Ausgabe für *jedes Jahr* beſonders aus, reducirt auf ihren baaren Wehrt.

41.

Die *Ergänzung des Alters a, (complementum aetatis) zu dem höchſten Lebensziel*, iſt x, wo nämlich $\frac{\overline{x}A}{r^x}$ als das letzte Glied $= 0$ wird. Z. B. iſt jemand 20 Jahr, ſo iſt nach der ſüſsmilchiſchen Tafel ſeine *Altersergänzung* $96 - 20 = 76$. Er lebet nämlich ſein 76ſtes Jahr durch, und ſtirbt nun am Ende deſſelben, oder im Anfang des folgenden.

42.

Anmerkung 1. Die Zahlen $\overline{1}A$, $\overline{2}A$, $\overline{3}A$ u. ſ. f. nimmt man aus den ſogenannten *Mortalitätstabellen*. Bey dieſen kommt alles darauf an, daſs man aus mehreren

mit einander verglichenen Erfahrungen vieler Jahre wiſſe, „*wie viele Menſchen jährlich von jedem Alter aus einer „gewiſſen Anzahl abſterben.*“ Die Liſten der Verſtorbenen nach dem Alter geben nun zwar dieſe Zahlen ſo gerade zu nicht. Denn man muſs auch wiſſen, *aus wie vielen deſſelben Alters* ſie ſterben. Allein, wenn man von einem Laude, oder von einer Stadt annehmen darf, daſs die Volksmenge die Jahre durch, wovon man die Liſten hat, unveränderlich dieſelbige geweſen ſey, ſo hat man in jenen Liſten die Data, die man haben muſs für die Tabellen. Es läſst ſich daraus die geſammte *Sterbensordnung*, (die *Todtenleiter* oder wenn man will, die *Lebensleiter*,) nämlich die *Zahl der Lebenden* aus einer gewiſſen anfänglichen Menge, für *jedes Jahr*, und die *Abnahme*, oder die Zahl der Sterbenden für *jedes Jahr*, und daraus weiter die *mittlere Lebensdauer* berechnen. *Halley* war der erſte, der dieſen Zuſammenhang durchſchaute. Ein ſcharfſinniger und glücklicher Blick. Er entdeckte eine neue Wiſſenſchaft.

Weiſs man nämlich, wie viele Menſchen an einem Orte oder in einem Lande, wo die Zahl der Lebenden immer dieſelbige bleibet, von jedem Alter jährlich abſterben, ſo weiſs man ja auch, wie viel jährlich daſelbſt geboren werden; ſo viel nämlich als zuſammen aus jedem Alter abgehen. Weiſs man aber, wie viele ins erſte Jahr eintreten, und wie viele daraus auch abſterben, ſo weiſs man, wie viele das erſte Jahr *durchleben*. Eben ſo viele

viele treten in das zweyte Jahr. Und da man wiederum von dieſen den Abgang weiſs, ſo hat man auch die Zahl derer, die das zweyte Jahr ihres Alters durchlebet haben, und ſo ferner. Alſo hat man auch die ganze Zahl der Lebenden von jedem Alter.

43.

Anmerkung 2. Der *jährliche Abgang von jedem Alter aus einer gewiſſen Anzahl von Lebenden* iſt es, was man auf dieſe Art *unmittelbar* aus den Beobachtungen nimmt. Tabellen alſo, die ſolche Verzeichniſſe enthalten, ſind *Grundtabellen.* Sie geben die Ordnung im Sterben an. Sie ſind nicht von allen einzelnen Orten und Ländern, aus denen man ſie erhalten hat, einander gleich, konnten es auch nicht ſeyn. Man nimmt das *Mittel* oder den *Durchſchnitt* aus mehreren. Es iſt aber doch ſo viel Uebereinſtimmung unter ihnen, daſs man ſie mit einem gewiſſen Grade der Zuverläſsigkeit, als *allgemeine Tabellen* zum Grunde legen kann.

Von dieſen Grundtabellen habe ich folgende beygebracht. Die *Süſsmilchiſche* Tab. IV. ſo wie ſie von Herrn *Baumann* in der Ausgabe von *Süſsmilchs Ordnung* von 1775 verbeſſert iſt. Sie iſt auf einer groſsen Menge von Beobachtungen und beſondern Tabellen gegründet, davon ſie die mittlern Reſultate enthält. Auch haben die nachher von dem *Herrn Stiftsamtmann Oeder* geſammleten Erfahrungen gezeiget, daſs man wenigſtens in *Norderdeutſchland* ohne Gefahr ſonderlich zu irren, ſie

zum

zum Grunde legen könne, zumahl ſo lange noch nicht auf die verſchiedene Sterblichkeit der Geſchlechter Rückſicht genommen werden darf. Sie iſt auch mit viel kritiſchen Scharfſinn gemacht, ob ſie gleich in ihrer erſten Einrichtung Fehler bekam, die Herr *Baumann* bemerkte und einige davon in ſeiner Ausgabe verbeſſerte. Sie leidet noch mehr Verbeſſerungen, und wird ſie ohne Zweifel mit der Zeit erhalten. Uebrigens will ich im Vorbeygehen noch bemerken, daſs ſcharfſinnige Critik bey dieſem Tabellenmachen nöthig ſey, und man nicht blos die rohen Todtenverzeichniſſe zuſammen rechnen, daraus das Mittel ſuchen und dieſs geradezu zu tabellariſchen Zahlen machen könne. Man ſetzet voraus, die Volksmenge an einem Orte oder in einem Lande, deren Verzeichniſſe man gebraucht, bleibe unveränderlich. Das iſt ſelten der Fall. Die Population vergröſſert ſich oder nimmt ab. Es wandern jährlich Menſchen aus, oder, wie bey den groſsen Städten, kommen anders woher hinzu, und ſterben an einem Ort, wo ſie nicht geboren ſind. Es kann auſserordentliche Urſachen des Sterbens oder der Fruchtbarkeit in der Periode gegeben haben, wozu die Liſten gehören; nicht zu ſagen, daſs ſelbſt die Liſten, die hier die Stelle der unmittelbaren Beobachtungen vertreten, Prüfung, und wie man weiſs, ſehr viele Prüfung bedürfen. Solche Abänderungen und beſondere Umſtände ſollten zugleich mit den Liſten gegeben ſeyn. Je mehr ſie es ſind, deſto mehr kann ein ſcharfſinniger Tabellenmacher, bey der Vergleichung der Liſten unter einander,

einander, Gründe finden, ſtatt der Zahlen, worauf dieſe unmittelbar führen, andere zu ſetzen, die mehr mit der Wirklichkeit zutreffen, die ſicherer nämlich als das Mittel aus den Erfahrungen gebraucht werden können. Herr D. *Price**) hat hierüber Bemerkungen gemacht, auf die ich verweiſe. Ich will damit nichtsweniger als den Hang billigen, den einige wohl haben mögen, zu Gunſten einer Hypotheſe Verzeichniſſe zu corrigiren, und Tabellen zu verändern, unter dem Vorwande, daſs ſie doch ſo ganz genau nicht ſind. Sind die Liſten richtig, und die Tabellen nur aus dieſen gemacht, ſo ſind beyde als Facta zu betrachten, die man nicht umändern oder anders darſtellen muſs, als ſie ſind. Geht man von ihnen ab, ändert man aus Raiſonnement, ſo kann gefodert werden, daſs doch jene, wovon man abgeht, getreulich vorgelegt, daſs die Abweichung genau angemerkt, und dann durch Gründe gerechtfertigt werde. Alsdenn, aber nur alsdenn, will ich zugeben, daſs hier, wie in andern Fällen, die *mit Verſtand gemachte Geſchichte richtiger, wahrer ſey, als die unmittelbar in den Zeugniſſen lieget.*

44.

Anmerkung 3. Die zwote *Mortalitätstabelle* (Tab. V.) die ich als claſſiſch anſehe, iſt die *Nordhamptonſche*, ſo wie

*) *Obſervations on the proper Method of conſtructing Tables* etc. Eſſay 4. in ſeinen *Obſervations on reverſionary Payments.* Sie ſind in der vierten Ausgabe vermehrt.

wie ſie D. *Price* in der neuſten Ausgabe, Vol. 2. ſeines vorgedachten Buchs geliefert hat. Sie iſt nur von einer Stadt, aber auf Verzeichniſſen von 46 Jahren gegründet, genau und mit Scharfſinn gemacht, und in Hinſicht der darauf gebauten Rechnungen vorzüglich durchgearbeitet. Ich trage kein Bedenken ihr eben den Wehrt zuzuſchreiben, den die Süſsmilchiſche hat, und für England noch einen gröſsern. Ihr Unterſchied von dieſer iſt zwar merklich, jedoch ſteigt ſie bey den *Leibrenten* nur aufs höchſte bis zu Einer Jahrshebung.

Die dritte (Tab. VI.) iſt die *Wargentiniſche* von *Schweden*. Sie beruhet auf Beobachtungen aus dem ganzen Königreiche von vielen Jahren, und nichts übertrifft die Sorgfalt, womit ſie verfertigt und durchgerechnet iſt. Ich habe ſie aus D. *Price* genommen, der ſie in der vierten Ausgabe mitgetheilet hat. Sie kann, meiner Meinung nach, als eine allgemeine Tabelle für das *nordliche Europa* angeſehen werden. Alle *Leibrenten* ſind nach ihr gröſser als nach den beyden vorhergehenden, doch iſt der Unterſchied darin von der Süſsmilchiſchen, (der ſie bis gegen das 35ſte Jahr näher kommt, als der Northamptonſchen,) nie gröſser als Eine Jahrshebung; die meiſten male geringer.

45.

Anmerkung 4. In der VII^ten^ Tabelle habe ich die des *Deparcieux* von den *Rentenirern* beygebracht, ſo eingerich-

eingerichtet, wie Herr *Florencourt* *) ſie verändert hat. Sie iſt wichtig für die Praxis, weil ſie noch faſt die einzige iſt, die man von dem Abſterben aus Geſellſchaften hat, die als *ausgeſuchte* anzuſehen ſind.

Die *Halleyſche* aus den Regiſtern von *Breslau*, (Tab. VIII.) auch die *Londoner*, nach *Simpſon* (Tab. IX.) ſind für die Praxis zwar entbehrlich, dienen aber zur Vergleichung, und ſind darum nicht überflüſſig, weil anſehnliche Tabellen darnach berechnet ſind. Die *Kerſeboomſche* aus *Holland* und *Weſtfriesland* (Tab. X.) gehört auch zu denen, die ſich auszeichnen, obgleich *Süſsmilch* einige nicht ungegründete Zweifel gegen ihre Zuverläſsigkeit, zumal bey den jüngern Jahren gemacht hat. Endlich habe ich noch die Tabelle XI. von der *Sterbensordnung in der Churmark* von Hr. *Baumann* angefügt, die ich für eine der vorzüglichſten unter denen aus beſondern Provinzen halte.

46.

Anmerkung 5. Die XII^te^, XIII^te^ und XIV^te^ Tabellen ſind, ſo viel ich weiſs, die zuverläſsigſten, die man bis hieher hat über den *Unterſchied der Sterblichkeit bey den beyden Geſchlechtern.* Man wird ſie künftig in der Praxis nicht entbehren können, am wenigſten bey Leibrentencaſſen.

47. *Erklä-*

*) *Abhandl. aus der juriſt. und politiſchen Rechenkunſt.*

47.

Erklärung. Wenn man die Jahre, die eine gewiſſe Anzahl Perſonen von beſtimmten Alter nach den Tabellen einige mehr, andere weniger noch zu leben haben, zuſammennimmt, und die Summe durch die Zahl der Perſonen theilet, ſo bekommt man ein Mittel, welches anzeiget, wie viele Jahre jedes Individuum noch leben müſste, wenn ſie alle gleich alt werden ſollten. Z. B. aus 300 Funfzigjährigen lebet nach der Süſsmilchiſchen Tafel Einer noch 46 Jahre, ein Anderer noch 45; noch Einer 44 u. ſ. w. Die Summe dieſer verſchiedenen Dauer auf alle 300 gleich vertheilet, iſt *die mittlere künftige Lebensdauer*, kürzer, *die mittlere Lebensdauer*, *(die Dauer der Exiſtenz, die Exiſtenz, the Expectation of Life.)* Sie ſoll in der Folge auf eine ähnliche Art bezeichnet werden, wie die Leibrente durch $E\overline{a}$, für eine Perſon vom Alter *a*.

Zuſatz. Wenn zu der *mittlern künftigen Lebensdauer* das wirklich ſchon erreichte Alter addirt wird, ſo bekommt man das geſammte *erreichbare Alter im Durchſchnitt*, welches einige *die mittlere Lebensdauer* nennen. In dieſem Sinn will ich aber das letztere Wort hier nicht nehmen, ſondern die *künftige* mittlere Lebensdauer darunter verſtehen.

48.

Satz 9. Die mittlere Lebensdauer einer Perſon vom gegebenen Alter a, wird gefunden, wenn man alle Zahlen der

der Lebenden in den Tabellen bey dem Jahre a+1, und den folgenden, bis ins höchſte Alter ſummirt, und dieſe Summe durch die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter dividirt.

Es ſey die *Anfangszahl*, das iſt die Zahl der Lebenden in der Tabelle für das gegebene Alter *a*, wiederum A, und $\overset{1}{-}$A die Zahl der Lebenden für das Jahr a+1; $\overset{2}{-}$A für das Jahr a+2 u. ſ. f. ſo iſt

$$\mathring{E}a = \frac{\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + + \overset{x}{-}A}{A} \ldots$$

Beweis. Da von A im Anfang des folgenden Jahrs nur $\overset{1}{-}$A übrig ſind, und die Geſtorbenen als gleich im Anfang des Jahrs *(a+1)* abgegangen, angeſehen werden, ſo haben $\overset{1}{-}$A Perſonen 1 Jahr durchgelebet. Eben ſo auch $\overset{2}{-}$A Ein Jahr; und ſo ferner. Man bekommt auf dieſe Art die Summe aller Producte der Lebenden in die Jahre, die ſie gelebet haben. Die das höchſte Alter erreichende Zahl iſt ſo viel mal mit Eins multiplicirt, als Jahre zwiſchen dem gegebenen und dem höchſten Alter ſind. Die Ein Jahr weniger erreichten, ſind ebenfalls in ſo viele Jahre weniger Eins multiplicirt in jener Summe, und ſo ferner, bis auf die, welche nur Ein Jahr nach dem gegebenen Alter übrig blieben, die auch noch in dieſs Eine Jahr multiplicirt darinnen ſind. Jene ganze Summe alſo, dividirt durch die Zahl der Perſonen, die nach der Tabelle in dem Alter *a* leben, giebt zum Quotienten die mittlere Lebensdauer.

49.

Zuſatz 1. Man kann ſie auch ſo finden. Es ſey $A - {}^{1}\!A = \Delta A$, das iſt, die Zahl der in dem erſten Jahr Sterbenden, (der *Abgang*, das *Decrement*) von A für das Jahr. Eben ſo ${}^{1}\!A - {}^{2}\!A = \Delta {}^{1}\!A$ der Abgang oder das *Decrement von* ${}^{1}\!A$, und ſo ferner. Nun erreichen ΔA, weil ſie gleich im Anfang des erſten Jahrs abgehen, gar kein Alter, ſie ſterben ſo gleich ab. $\Delta {}^{1}\!A$ erreichen nur Ein Jahr; $\Delta {}^{2}\!A$ ſterben, nachdem ſie zwey Jahre gelebet haben, und ſo ferner, $\Delta {}^{n}\!A$, wenn ſie n Jahre erreichet haben. Folglich iſt die Summe $\Delta {}^{1}\!A + 2\,\Delta {}^{2}\!A + 3\,\Delta {}^{3}\!A + + x.\,\Delta {}^{x}\!A$ die Summe aller Producte aus der Zahl der Sterbenden für jedes Jahr in die Zahl der Jahre multiplicirt, die ſie nach dem gegebenen Alter a noch gelebet haben. Alſo iſt auch

$$E_a = \frac{\Delta {}^{1}\!A + 2.\ \Delta {}^{2}\!A + + (x)\,\Delta {}^{x}\!A}{A}.$$

Es iſt ${}^{x}\!A$ für die höchſte Lebenszeit $= 0$. Da iſt auch $\Delta {}^{x}\!A = 0$.

Dieſe Gleichheit der beyden erwähnten Summen erhellet auch überdieſs daraus, weil die Zahlen ${}^{1}\!A, {}^{2}\!A + + {}^{x}\!A$, wenn man von hinten anfängt, bey jedem Jahr die Summen der jährlichen Decremente ſind, die auf ſie folgen. *)

50. *Zu-*

*) *Zuſätze zu dieſem Capitel.* §. 1.

50.

Zusatz 2. Die vorhergehenden Ausdrücke sind nur richtig, wenn man blos auf *ganze* Jahre rechnet; nach der Voraussetzung, dass die im *Lauf des Jahrs Sterbende alle am Anfange desselben abgehen.* Aber da das nicht ist; so nimmt man an, dass sie während des Jahrs *gleichförmig* absterben; das ist denn so viel, als wenn sie alle noch die *Mitte* desselben erreichet, also $\frac{1}{2}$ Jahr länger gelebt hätten, als vorher angenommen war. Daher muss zu dem obigen Wehrt von $\overline{Ea}$ noch $\frac{1}{2}$ Jahr addirt werden. Es wird also

$$\overline{Ea} = \frac{\overset{1}{\frown}A + \overset{2}{\frown}A + + \overset{x}{\frown}A}{A} + \tfrac{1}{2}.$$

Dieß ist die *corrigirte mittlere Lebensdauer*, die in den Tabellen steht.

51.

Zusatz 3. Es ist auch

$$\overline{Ea} = \frac{A + \overset{1}{\frown}A + \overset{2}{\frown}A + + \overset{x}{\frown}A}{A} - \tfrac{1}{2}.$$

das ist, man kann die Summe der Lebenden so nehmen, dass die zu dem gegebenen Alter gehörige Anfangszahl darunter mit begriffen ist. Dann muss $\frac{1}{2}$ abgezogen werden. Wird nur auf *volle* Jahre gerechnet, so muss 1 abgezogen werden.

52.

Erklärung. Das *künftige wahrſcheinliche Leben* eines Menſchen vom gegebenen Alter *heiſst die Zeit, in der die Hälfte der Perſonen dieſes Alters geſtorben ſind:* Z. B. von 511 Lebenden im 15ten Jahr ſind am Ende des 55ſten, oder im Anfang des 56ſten nur noch 255 nach *Süſsmilchs* Tafel am Leben, das iſt die Hälfte von der Zahl der 15 jährigen. Folglich iſt das künftige wahrſcheinliche Leben eines 15jährigen 40 Jahr. Auf dieſelbe Art wird es für alle andere Fälle faſt unmittelbar aus den Tabellen gefunden.

Zuſatz. Wird das ſchon erreichte Alter zu dieſem künftigen *wahrſcheinlichen* addirt, ſo bekommt man das *ganze wahrſcheinliche* Alter. Es iſt in dem vorigen Beyſpiel 55 Jahr.

53.

Anmerkung. Es heiſst die *wahrſcheinliche Dauer* darum, weil es *mehr wahrſcheinlich* iſt, daſs ein Menſch vom gegebenen Alter jenes Alter erreiche, als daſs ers nicht erreiche; auch *mehr wahrſcheinlich* iſt, daſs einer nicht länger lebe, als daſs er länger lebe. Es iſt *wahrſcheinlicher*, daſs ein Funfzehnjähriger bis 55 Jahre komme, als daſs er ſchon früher geſtorben ſeyn werde. Denn für das Erreichen jener Gränze iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, aber davon, daſs er früher todt ſey, iſt ſie kleiner, ſie iſt davon, daſs er nur 54 Jahr erreiche,

$\frac{511-264}{511} = \frac{247}{511}$. Eben ſo iſt auch die Wahrſcheinlichkeit, daſs er länger am Leben ſeyn werde als am Ende des 55ſten Jahrs, kleiner als $\frac{1}{2}$; z. B. für das 56ſte Jahr nur $\frac{246}{511}$. Nennt man nun, wie die meiſten Male in dem gemeinen Sprachgebrauch, *wahrſcheinlich, was mehr zu erwarten iſt*, oder überhaupt, *mehr für ſich hat, als das Gegentheil*, ſo kann man ſagen, es ſey dieſs die *wahrſcheinlich noch künftige Lebensdauer.*

Allein dieſs iſt gewiſs nicht die Wahrſcheinlichkeit, daſs *eine Perſon gerade ſo alt werde*, gerade in dem ſo gefundenen beſtimmten Jahr, nicht früher noch ſpäter, ſterben werde. In dem 56ſten Jahr ſterben wiederum 9 ab. Die letztere Wahrſcheinlichkeit, daſs nämlich ein Funfzehnjähriger gerade im 56ſten Jahre ſterben werde, iſt nicht gröſser als $\frac{9}{511}$. Auch hat es nicht den Sinn, als wenn ſich annehmen oder vorausſetzen laſſe in Rechnungen, daſs ein Funfzehnjähriger nach 40 Jahren todt ſeyn werde. Es läſst ſich dieſs eher vorausſetzen als das Gegentheil, aber deswegen iſt es nur etwas *mehr wahrſcheinlich*, läſst ſich nicht als gewiſs annehmen. Wenn die Geſetze beſtimmen, daſs jemand, von deſſen Leben ſich keine Nachricht in ſo vielen Jahren findet, für todt zu halten ſey, ſo kann das andere Gründe haben, und gute Gründe haben, und hat ſie; ſonſt würde es ſehr unlogiſch ſeyn, den für todt anzunehmen, deſſen am

Lebenſeyn faſt eben ſo viel für ſich hat, als ſein Todtſeyn; und von dem es nur etwas mehr wahrſcheinlich iſt, daſs er todt ſey.

Dieſe *wahrſcheinliche Lebensdauer* iſt ſehr leicht aus den Tabellen zu finden; aber ſie iſt in der folgenden Rechnung wenig brauchbar. Da kommt es auf die *mittlere Lebensdauer* mehr an. Dieſe iſt auch nichts weniger als die Dauer, von der man annehmen dürfte, daſs *eine beſtimmte Perſon von gegebenen Alter ſie erreichen werde.* Bey den Funfzehnjährigen iſt ſolche z. B. 38, 56 Jahr (nach der Süſsmilchiſchen Tafel, das iſt, derjenigen, die ich überhaupt verſtanden haben will, wenn ich keine andere nenne.) Nun ſterben ſo viele von den 511 Funfzehnjährigen vor und nach dem 54ſten Jahr, und in dieſem nur 9, daſs die Wahrſcheinlichkeit, der Funfzehnjährige A werde gerade in dem 54ſten ſterben, nicht gröſser iſt als $\frac{9}{511}$. Allein da *im Durchſchnitt* auf jeden Funfzehnjährigen noch $38\frac{1}{2}$ Jahr für das künftige Leben fällt, obgleich ſonſt auf einige mehr, auf andere minder, ſo erhält man bey 511 Perſonen von 15 Jahren gleich viel künftige Lebensjahre, wenn man für jeden im Durchſchnitt $38\frac{1}{2}$ nimmt, als wenn man für einige mehr, für andere weniger, der Tabelle gemäſs, rechnet. Bey einer einzelnen Perſon läſst ſich alſo nur auf ſo viel Jahre rechnen, als dieſer Durchſchnitt angiebt. In ſo weit kann ſie die *Erwartung des Lebens* genennet werden.

54. *An-*

54.

Anmerkung. Simpſon, der ſehr richtig die *mittlere* Lebensdauer und die *wahrſcheinliche* unterſchied, characteriſirt die erſte mit andern ſeiner Landsleute, durch *the Number of Years, which a Perſon of a given Age, may upon an Equality of Chance expect to enjoy.* Die *wahrſcheinliche* Lebensdauer iſt bey ihm: *that Period, which a Perſon hath an equal chance of ſurviving.* *) Dieſe Erklärungen ſind doch undeutlich. Von der *wahrſcheinlichen* Lebensdauer läſst ſich ſagen, es ſey gleiche Wahrſcheinlichkeit (eigentlich iſt ſie gröſser) daſs eine Perſon vom gegebenen Alter ſie erreiche. Von der *mittlern* kann man nur ſagen: Es iſt gleich wahrſcheinlich, daſs die beſtimmte Perſon A ſie erreiche als jede andere B, C, von demſelben gegebenen Alter.

55.

Zuſatz 4. Wenn das Abſterben *gleichförmig* erfolgte, das iſt, in jedem Jahr die Zahl der Sterbenden in den Tabellen gleich groſs wäre, ſo *würden* beyde, die *mittlere* und die *wahrſcheinliche* Lebensdauer einerley ſeyn. In jedem andern Fall ſind ſie verſchieden und müſſen es ſeyn, ob ſie gleich bey einem einzelnen Alter zuſammentreffen können. **) Die *mittlere* iſt nach den Tabellen gröſser in den erſten Jahren des Lebens, nachher, und gewöhnlich, kleiner als die *wahrſcheinliche*, wenn gleich der Unterſchied nicht ſehr groſs iſt.

*) *Simpſons Select Exerciſes for young Proficients in the Mathematicks.* London 1752. p. 273.

**) Man ſehe die *Zuſätze zu dieſem Capitel.* §. 12.

56.

Practiſche Methode, die mittlere Lebensdauer und die Leibrenten nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen.

Die hieher gehörigen Rechnungsmethoden führen entweder nur zu *beynahe richtigen Wehrten*, dieſs ſind die *Approximationsmethoden;* oder ſie geben ſolche völlig genau. Man nahm zu jenen ſeine Zuflucht, weil die letztern weitläuftig und mühſam ſchienen. Das ſind ſie aber nicht, wenn man nur mit den Hülfstabellen, die zu der Zinsrechnung gehören, verſehen iſt.

Durch eine neue Hülfstabelle, die man ſich in Beziehung auf die Mortalitätstafel macht, nach der gerechnet werden ſoll, und nach dem Zinsfuſs, den man zum Grunde legt, kann die ganze Arbeit ſowohl bey den Leibrenten als bey der mittlern Lebensdauer auf Eine Diviſion gebracht werden. Die Verfertigung jener Tabelle erfodert, wenns nur bloſs um die *Lebensdauer* zu thun iſt, nichts als ein leichtes Addiren; ſoll ſie aber zur *Leibrentenrechnung* eingerichtet werden, etwas mehr Mühe, daher man ſie auch wohl um einer einzigen ſolchen Rente willen nicht machen wird. Allein ſie giebt denn auch zugleich alle Wehrte der Leibrenten, wie alle Dauer für jedes Alter auf einmal. Ich will ſie, wie ſie zu der Süſsmilchiſchen Mortalitätstafel gehört, hieher ſetzen. Sie iſt das Muſter für andere ähnliche.

A.

A. *Alter.*	B. *Lebende nach Süfsmilch.*	C. *Die Zahlen in B. discontirt auf die Jahre des Alters, für* r = 1,04.	D. *Summen der Zahlen in B. von hinten an addirt.*	E. *Summen der Zahlen in C. von hinten an addirt.*
0	1000	1000	28988	12431, 48
1	750	721, 15	27988	11431, 48
2	661	611, 13	27238	10710, 33
3	618	549, 40	26577	10099, 20
4	593	560, 90	25959	9549, 80
5	579	475, 90	25366	9042, 90
6	567	448, 11	24787	8567, 00
7	556	422, 51	24220	8118, 89
8	547	399, 69	23664	7696, 38
9	539	378, 69	23117	7296, 69
10	532	359, 40	22578	6918, 00
11	527	342, 33	22046	6558, 60
12	523	326, 66	21519	6216, 27
13	519	311, 70	20996	5889, 61
14	515	297, 40	20477	5577, 91
15	511	283, 74	19962	5280, 51
16	507	270, 69	19451	4996, 77
17	503	258, 23	18944	4726, 08
18	499	246, 32	18441	4467, 85
19	495	234, 95	17942	4221, 53
20	491	224, 09	17447	3986, 58
21	486	213, 27	16956	3762, 49
22	481	202, 96	16470	3549, 22
23	476	193, 13	15989	3346, 26
24	471	183, 75	15513	3153, 13
25	466	174, 80	15042	2969, 38
26	461	166, 28	14576	2794, 58
27	456	158, 15	14115	2628, 30
28	451	150, 40	13659	2470, 15
29	445	142, 69	13208	2319, 75
30	439	135, 35	12763	2177, 06

A.	B.	C.	D.	E.
31	433	128, 37	12324	2041, 71
32	427	121, 72	11891	1913, 34
33	421	115, 39	11464	1791, 62
34	415	109, 37	11043	1676, 23
35	409	103, 65	10628	1566, 86
36	402	97, 95	10219	1463, 21
37	395	92, 55	9817	1365, 26
38	388	87, 41	9422	1272, 71
39	381	82, 53	9034	1185, 30
40	374	77, 90	8653	1102, 77
41	367	73, 50	8279	1024, 87
42	360	69, 33	7912	951, 37
43	353	65, 36	7552	882, 04
44	346	61, 60	7199	816, 68
45	339	58, 04	6853	755, 08
46	332	54, 65	6514	697, 04
47	324	51, 28	6182	642, 39
48	316	48, 09	5858	591, 11
49	308	45, 07	5542	543, 02
50	300	42, 21	5234	497, 95
51	291	39, 37	4934	455, 74
52	282	36, 69	4643	416, 37
53	273	34, 15	4361	379, 68
54	264	31, 75	4088	345, 53
55	255	29, 49	3824	313, 78
56	246	27, 36	3569	284, 29
57	237	25, 34	3323	256, 93
58	228	23, 44	3086	231, 59
59	219	21, 65	2858	208, 15
60	210	19, 96	2639	186, 60
61	201	18, 37	2429	166, 54
62	192	16, 87	2228	148, 17
63	182	15, 38	2036	131, 30
64	172	13, 98	1854	115, 92
65	162	12, 66	1682	101, 94

A.	B.	C.	D.	E.
66	152	11, 42	1520	89, 28
67	142	10, 26	1368	77, 86
68	132	9, 17	1226	67, 60
69	122	8, 15	1094	58, 43
70	112	7, 19	972	50, 28
71	103	6, 36	860	43, 09
72	94	5, 58	757	36, 73
73	85	4, 85	663	31, 15
74	77	4, 23	578	26, 30
75	69	3, 64	501	22, 07
76	62	3, 15	432	18, 43
77	55	2, 68	370	15, 28
78	49	2, 30	315	12, 60
79	43	1, 94	266	10, 30
80	37	1, 61	223	8, 36
81	32	1, 33	186	6, 75
82	28	1, 12	154	5, 42
83	24	0, 93	126	4, 30
84	20	0, 74	102	3, 37
85	17	0, 61	82	2, 63
86	14	0, 48	65	2, 02
87	12	0, 40	51	1, 54
88	10	0, 32	39	1, 14
89	8	0, 24	29	0, 82
90	6	0, 18	21	0, 58
91	5	0, 14	15	0, 40
92	4	0, 11	10	0, 26
93	3	0, 08	6	0, 15
94	2	0, 05	3	0, 07
95	1	0, 02	1	0, 02

57.

Dieſe Tabelle eingerichtet, ſo iſt zur Berechnung der mittlern Lebensdauer nichts mehr erforderlich, als daſs, wenn das Alter einer Perſon a iſt, die Zahl in der Columne D bey dem nächſtfolgenden Jahre $a+1$, durch die Zahl in der Columne B bey dem gegebenen Alter a dividirt, und $\frac{1}{2}$ hinzugeleget werde.

Die Zahl in der Columne D bey dem Jahre $a+1$ enthält die Summe der Zahlen der Lebenden in B, von dem Jahre $a+1$ an, dieſs eingeſchloſſen, bis ans Ende der Tabelle. Iſt alſo die *Anfangszahl*, oder die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter, A, welche in der Columne B bey dieſes Alters Jahre ſteht, ſo iſt die Zahl in der Columne D bey dem nächſtfolgenden Jahr $= {}^{1}\!A + {}^{2}\!A + + {}^{x}\!A$. Dieſe alſo durch A dividirt, und $\frac{1}{2}$ hinzugelegt, giebt $\frac{{}^{1}\!A + {}^{2}\!A + + {}^{x}\!A}{A} + \frac{1}{2} = E\overline{a}$. (nach Satz 9. §. 48.)

Ex. Das gegebene Alter ſey 15 Jahr, ſo iſt $A = 511$. Die bey dem 16ten Jahr ſtehende Zahl unter D, iſt 19451. Nun iſt $\frac{19451}{511} + \frac{1}{2} = 38{,}06 + 0{,}5 = 38{,}5$. Dieſs iſt die mittlere Lebensdauer.

58.

Um den Wehrt der *Leibrente* 1 zu haben, nämlich auf *ganze* Jahre, wobey die Zwiſchenzeiten nicht gerechnet

rechnet werden, und auch die Rente jedesmal am Ende des Jahrs zahlbar ist, wie im 8ten Satz §. 40. dividire man die Zahl aus der Columne E, welche bey dem um 1 Jahr gröfsern Alter steht, durch die Zahl aus der Columne C, bey dem gegebenen Alter selbst.

Ex. Es sey das gegebene Alter 20 Jahr, so stehet in der Columne E bey 21 Jahr die Zahl 3762,49; und in der Columne C bey 20 Jahr, 224,09. Es ist $\frac{3762,49}{224,09} = 16,79$. Dieſs ist der baare Wehrt der Leibrente 1, für eine Person von 20 Jahren, wenn die Zinsen des Geldes zu 4 Procent gerechnet werden.

Die gefundenen Wehrte sind nur bis auf zwey Decimalziffern richtig, wenn die Zahlen in der Columne B nur bis auf so viele genommen sind. Soll eine Tabelle mit Fleiſs bearbeitet werden, so mufs man darinn weiter gehen, bis auf 5 Ziffern. In dem vorigen Exempel findet man bey den angenommenen Zahlen, $\lambda\overline{20} = 16,7901$; aber der schärfer gesuchte Wehrt ist 16,7905.

Uebrigens erhellet aus der Einrichtung der Hülfstabellen von selbst, dafs die Art zu rechnen richtig sey. Die Zahl bey dem Jahre 20 in der Columne C, nämlich 224,09 ist die Zahl der Lebenden in dem Jahr, 491, in der Columne B, zurück discontirt auf 20 Jahre, also $\frac{491}{1^{20}}$. Die folgenden Zahlen derselben Columne C, sind die folgenden Zahlen der Lebenden discontirt,

$\frac{1}{1}$ A

$\frac{{}^{1}A}{r^{20+1}}$, $\frac{{}^{2}A}{r^{20+2}}$, $\frac{{}^{3}A}{r^{20+3}}$, und so ferner, wenn wiederum A die Zahl der anfänglich Lebenden im Alter von 20 Jahren, ${}^{1}A$ dieselbe für das erste folgende, ${}^{2}A$ für das zweyte, u. s. f. ist. Nun giebt aber die Zahl der Columne E bey 21 die Summe

$$\frac{{}^{1}A}{r^{20+1}} + \frac{{}^{2}A}{r^{20+2}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{20+x}}.$$

Daher diese Zahl durch die Zahl der Columne C bey 20 Jahr dividirt so viel ist als

$$\frac{1}{A:r^{20}} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r^{20+1}} + \frac{{}^{2}A}{r^{20+2}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{20+x}} \right)$$

und wenn statt 20 überhaupt jedes gegebene Alter a gesetzet wird

$$= \frac{1}{A:r^{a}} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r^{a+1}} + \frac{{}^{2}A}{r^{a+2}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{a+x}} \right)$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^{2}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x}} \right) =$$

dem baaren Wehrt der Leibrente für das Alter a, $= \lambda \overline{a}$. nach Satz 8. §. 40.

Diese Methode halte ich für die vorzüglichste von allen, zumal weil man die so gemachte Hülfstabelle auch bey dem Wehrte der Verbindungsrenten mit vielem Vortheil gebrauchen kann, wie ich unten zeigen will. Sonst kann man, weil doch die Columne C etwas Mühe macht,

in

in Hinsicht auf die einfachen Leibrenten noch mit einer leichtern Vorrichtung abkommen.

59.

Zweyte Art die Leibrente zu finden.

1) Anstatt der discontirten Zahlen der Lebenden nehme man die eben so *discontirten jährlichen Decremente* und setze diese in die Columne C, und ihre Summen von hinten an in die Columne E. Die Decremente sind viel kleinere Zahlen, daher das Discontiren leichter und geschwinder von statten geht.

2) Ist das gegebene Alter a, so dividire man die bey a stehende Summe aus der Columne E, durch die Anfangszahl A.

3) Dieser Quotient werde wiederum durch r^{a+1} multiplicirt, so bekommt man den *baaren Wehrt der beym Tode einer Person vom Alter a zahlbaren Summe 1.* Diese Wehrte nach der *Süssmilchischen* Tafel und nach dem Zinsfuss $r = 1{,}04$ enthält die XXI^ste^ Tabelle.

4) Dieses Product von 1 abgezogen und den Rest mit dem *Grundcapital* multiplicirt giebt den Wehrt der Leibrente 1, woraus ihr Wehrt für jede andere Grösse der jährlichen Rente leicht erhalten wird.

So eine Tabelle selbst will ich nicht hersetzen. Ihre Einrichtung ist leicht begreiflich. Man sieht, dass man auf diese Art die Arbeit bey der Vorrichtung abkürze, aber denn auch wiederum mehr zu rechnen habe, als bey dem

dem vorher beſchriebenen Verfahren. Gleichwohl ſind ſolche Methoden ſehr dienlich, wo man man nur eine oder die andere Leibrente nach einer Sterblichkeitstafel ſuchet, ohne ſie alle haben zu wollen.

Verfährt man auf die vorgeſchriebene Art, ſo iſt die Summe bey dem Alter a, die man aus der Tabelle nimmt, (ſie heiſse S) $= \frac{\Delta A}{r^a} + \frac{\Delta^{\overline{1}} A}{r^{a+1}} + + \frac{\Delta^{\overline{x}} A}{r^{a+x}}$. Es ſind nämlich ΔA, $\Delta^{\overline{1}} A$, $\Delta^{\overline{x}} A$, die auf einander folgende *Decremente* der Anfangszahl A, für das Alter a, jedes auf den Anfang des Lebens zurück discontirt. Daher iſt

$$\frac{r^{a-1} S}{A} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^{\overline{1}} A}{r^2} + + \frac{\Delta^{\overline{x}} A}{r^x} \right).$$

Dieſe letztere Gröſse nochmals mit r multiplicirt, iſt der *baare Wehrt einer beym Tode einer Perſon von gegebenen Alter a zahlbaren Summe* 1, (*der Wehrt einer Erbſchaft* 1, die bey dem Tode der Perſon zu empfangen iſt.) Dieſer Wehrt wird zu manchen Aufgaben gebraucht, daher eine beſondere Tabelle für ſie nöthig war.

Wird dieſer Wehrt T genannt, ſo iſt $\lambda \overline{a} = p(1 - T)$ Man ſehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

Es ſey das gegebene Alter 40 Jahre; ſo iſt nach der XXI^ten^ Tabelle der Wehrt $T = 0,4737$, und weil

nach

*) §. 3.

nach demſelbigen Zinsfuſs, $r = 1,04$, auch $p = 25$, ſo hat man $(1 - 0,4737) \cdot 25 = 13,1575$ für die Leibrente, oder $\lambda \overline{4c}$.

Anmerkung. Wenn man die Wehrte von T nicht ſchon aus den Wehrten der Leibrente berechnet hätte, ſo könnte man die letztern aus den erſtern erhalten. Die Engländer nennen die Leibrente den *Wehrt des Lebens*, the *Value of the Life*. Die erwähnten Wehrte T könnten nach dieſer Analogie *Wehrte des Todes* heiſsen. Aber ſie haben ſchon andere Namen, und die behalte man lieber, um die andächtelnden Wortſpiele, den Wehrt des Lebens aus dem Wehrt des Todes zu finden, u. d. g. zu vermeiden.

60.

Dritte Methode die Leibrenten zu berechnen.

Noch leichter iſt die Vorrichtung nöthig bey folgendem Verfahren:

1) An ſtatt der *jährlichen Decremente* nehme man die *Unterſchiede* derſelben, und discontire einen jeden auf den Anfang des Alters zurück, wie vorher. Läſst man die unterzehnjährigen Perſonen weg, da ihre Leibrenten ſelten vorkommen, ſo iſt nach *Süſsmilchs* Tafel die *erſte Differenz der Decremente*, $5 - 4 = 1 = \Delta A - \Delta^{1} A$ und die folgende bis zum Jahr 20 ſind alle $= 0$, und alle folgende ſind entweder 1 oder 0. Folglich kann die Columne der discontirten Zahlen, die ſonſt die meiſte

Rechnung erfordert, blos aus der Tabelle der Discontozahlen Tab. II. abgeſchrieben werden.

2) Man ſummire dieſe *discontirten Differenzen* von hinten an. Allein dabey iſt zu bemerken, daſs wo das *folgende Decrement* gröſser iſt als das vorhergehende, wenn $\Delta\ \overline{\overline{\ }}^{n+1}A > \Delta\ \overline{\ }^{n}A$, da wird die *Differenz* $\Delta\ \overline{\ }^{n}A - \Delta\ \overline{\overline{\ }}^{n+1}A$, und auch die discontirte *verneinend*, muſs alſo bey der erwähnten Summirung von hinten an, *abgezogen* werden.

3) Dieſe Summen nun für ein andres Alter, z. B. 20 Jahr zu gebrauchen, muſs die zu 20 Jahr gehörige Summe mit r^{20} wieder multipliciret werden. Die ſo gefundene Summe der Differenzen für eine Anfangszahl $\overline{\ }^{a}A$ ſey N.

4) Die Zahl N ſubtrahire man von dem erſten Decrement der Anfangszahl A, das iſt, von Δ A, und multiplicire den Reſt durch $\frac{rp}{A}$. Dieſs iſt alsdenn wiederum *der Wehrt der Erbſchaft* 1. §. 60. Daher

5) Selbiger von 1 abgezogen und mit dem *Grundcapital* multiplicirt, den Wehrt der *Leibrente* 1 giebet.

Dieſs iſt in Zeichen ausgedruckt,

$$\lambda\overline{\overline{a}} = \left(1 - rp\,\frac{(\Delta A - N)}{A}\right)p.$$

(Siehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel.) *)

61. Man

*) §. 4.

61.

Man kann noch weiter an ſtatt der *Differenzen* ſelbſt die *Differenzen der Differenzen* nehmen, ſolche auf dieſelbe Art wie vorher discontiren, und die discontirten Zahlen vom Ende an rückwärts ſummiren. Bey der *Süſsmilchiſchen* Tafel gewinnet man dadurch nichts, weil man weder kleinere Zahlen, noch weniger zu discontiren hat, als wenn die Differenzen ſelbſt gebraucht werden. Bey andern Tabellen kann das anders ſeyn. Die Rechnung, die alsdenn mit dieſer Summe zu machen ſeyn würde, iſt zwar ſchon etwas zuſammengeſetzter, allein das iſt unerheblich. In den Zuſätzen habe ich mehr davon beygebracht. Da findet ſich auch noch eine andere Methode *mittelſt der Decrementen* und der *Zeitrenten* die Leibrenten zu finden.

62.

Anmerkung. Morgans *) Methode, die Leibrenten zu berechnen durch eine *doppelte Rechnung*, davon eine zugleich die Probe der andern iſt, will ich noch anführen, weil D. *Price* ſie jeder andern vorzieht, wozu ich eben keinen Grund ſehe. Sie beruhet auf folgenden. Es ſey A die Zahl der Gebohrnen, das iſt, der vom Alter o, (oder auch, wenn die Tabellen nicht ſo weit zurückegehen, wie die ältere Northamptonſche, die *Morgan* damals noch gebrauchte, ſo ſey A die Zahl der Lebenden

*) *Doctrine of Annuities and Aſſurances* p. 58. u. folg.

für das jüngſte Alter in der Tabelle.) Es ſey ferner für ein gegebenes Alter a, die Zahl der Lebenden $\overline{\overline{}}^{a}A$, die hier die Anfangszahl für das gegebene Alter a iſt, ſo iſt nach dem obigen, §. 58.

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{\overline{\overline{}}^{a}A\, r^{a}}\left(\frac{\overline{\overline{}}^{a+1}A}{r^{a+1}} + \frac{\overline{\overline{}}^{a+2}A}{r^{a+2}} + +\right)$$

und folglich

$$\frac{\overline{\overline{}}^{a}A}{A : r^{a}} \cdot \lambda\overline{a} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{}}^{a+1}A}{r^{a+1}} + \frac{\overline{\overline{}}^{a+2}A}{r^{a+2}} + +\right).$$

Nun iſt zugleich klar, daſs $\frac{\overline{\overline{}}^{a}A}{A\, r^{a}}$ ſo viel iſt, als der *baare Wehrt einer Summe* 1, *welche zahlbar iſt, im Fall ein jetzo Geborner* (oder eine Perſon von dem jüngſten Alter in der Tabelle) *das Alter a erreicht.* Denn dieſe Summe 1 iſt nur nach a Jahren zahlbar, folglich ihr baarer Wehrt $\frac{1}{r^{a}}$; aber auch nur zahlbar unter der Bedingung, daſs die gegebene Perſon noch am Leben ſey, davon die Wahrſcheinlichkeit $\frac{\overline{\overline{}}^{a}A}{A}$ iſt.

Ferner ſind $\frac{\overline{\overline{}}^{a+1}A}{A\, r^{a+1}}$ und $\frac{\overline{\overline{}}^{a+2}A}{A\, r^{a+2}}$ u. ſ. f. die *baaren Wehrte der Summe* 1, wenn die Perſon vom jüngſten Alter der Tabellen, das Alter $a+1$, $a+2$ u. ſ. f. erreichet.

Daraus

Daraus folget denn im Allgemeinen, „dafs jede für „ein beſtimmtes Alter *a* berechnete Leibrente, multipli„cirt in den baaren Wehrt einer Summe 1 zahlbar, wenn „das jüngſte Leben der Tabelle das Alter erreichet, wo„für die Leibrente berechnet iſt, ein Product giebet, „gleich der Summe der baaren Wehrte der zahlbaren „Summe 1, wenn das jüngſte Leben zum Alter $a+1$ „und zum Alter $a+2$, und ſo ferner, bis zum höchſten „Alter kommt.“

Man ſchreibe alſo die Leibrenten in *einer Columne*, von der für das älteſte Leben an, rückwärts unter einander. Die Alterszahlen von der höchſten an ſetze man zur Seite. Alsdenn mache man eine *dritte* Columne, worin die Wehrte der Summe 1 zahlbar, wenn das jüngſte Leben das höchſte Alter, das nächſtniedrigere, und ſo ferner, erreicht, geſetzet werden. Dieſe Wehrte ſummire man in einer *vierten* Columne, und ſetze die Summe der höhern Jahre dem nächſt niedrigern Jahre gegen über. Bey dieſer Einrichtung muſs das Product der Leibrente für ein gewiſſes Jahr, multiplicirt durch den dabey ſtehenden baaren Wehrt der Summe 1 der dritten Columne, der Zahl in der vierten jedesmal gleich ſeyn. Dieſs iſt die Probe der Rechnung.

Die *Leibrentenwehrte* ſelbſt ſucht *Morgan* ſo, daſs aus dem Wehrt einer für ein Alter *a* jedesmal der Wehrt derſelben für das um Ein Jahr niedrigere Alter gemacht

wird. Dieſs geſchieht nach einer Formel, die ich unten beybringen will, und erfodert nicht viel Rechnung.

Allerdings hat dieſe Methode ihren Wehrt, aber ich meine doch, ſie ſey an Kürze nicht mit der zu vergleichen, die ich vorher gewieſen habe. Die Verfertigung der Hülfstabelle (im 56ſten §.) erfodert ſchlechterdings kein Dividiren, wenn man die Discontozahlen ſchon hat, die auch *Morgan* vorausſetzet, nur blos Multipliciren und Addiren. Will aber jemand bey Verfertigung jener Tafel, die discontirten Zahlen der Lebenden in der Columne C, als worauf am Ende alles beruhet, zugleich durch eine doppelte Rechnung haben, um ſicher zu gehen, ſo kann das auf folgende Art leicht geſchehen.

Man ſchreibe die erwähnten discontirten Zahlen unter einander in umgekehrter Ordnung, wie ſie in der obigen Tabelle (§. 56.) ſtehen; nämlich die zum Alter 95 gehörige zuerſt. Zur Seite mache man eine Columne, worin die discontirten jährlichen Decremente in eben der Ordnung ſtehen. Die Decremente ſind kleine Zahlen, man findet alſo dieſe Reihe ſehr leicht. Nun werde eine vierte Columne aus der dritten gemacht. Das discontirte Decrement des letzten Lebensjahrs (hier in der dritten Columne das erſte) iſt auch das erſte in der vierten Columne. Die folgenden Zahlen der vierten ſollen jede aus ihren nächſtvorhergehenden mit dem Zinsfuſs v multiplicirt, wozu die Zahl der dritten Columne für daſſelbe Jahr addirt wird, gemacht werden. Iſt richtig gerechnet,

ſo

so sind die Zahlen dieser vierten Columne dieselben mit denen in der zweyten.

Die Vorschrift wird durch das folgende Schema deutlich werden.

Alter.	Discontirte Zahl der Lebenden.	Discontirte Decremente.	Vierte Columne.
95	0, 02	0, 02	0, 02
94	0, 05	0, 025	0, 02. r + 0, 025 = 0, 05
93	0, 08	0, 026	r, 0, 05 + 0, 026 = 0, 08
92	0, 11	0, 027	r. 0, 08 + 0, 027 = 0, 11
+	+	+	

Bey diesen ersten Theilen ist die doppelte Rechnung gar nicht nöthig, in der Folge aber, wenn die Zahl der Lebenden gröfser wird, macht sie die Arbeit sicher und angenehm. Sind aber die discontirten Zahlen einmal richtig berechnet, so erfodert das Uebrige bey jener Tabelle nichts mehr, als ein simples Addiren.

63.

Berechnungsarten, die nur zu Näherungen führen.

Man sucht Abkürzungen durch Hypothesen, da man eine gewisse allgemeine Regel für die jährlichen Decremente annimmt. Bey den *einfachen Leibrenten* ist das

nicht nöthig, weil dieſe ohnedieſs leicht genug zu finden ſind. Ein anders iſt es bey den Verbindungsrenten für mehrere Perſonen, wo man zuweilen genöthigt iſt, ſich mit Näherungen zu begnügen. Aber dennoch giebt es manche Gelegenheit, wo dergleichen auch bey jenen gebraucht werden können.

Moivre, der erſte, der nach *Halleys* Grundſätzen dieſe Berechnung vortrug, nahm die *Detremente aller Jahre einander gleich an.* Die *Breslauer* Sterblichkeitstafel, die man damals nur allein gebrauchte, ſchien dieſe Gleichförmigkeit im Abſterben zuzulaſſen. Für gewiſſe Perioden des Lebens weicht das auch nicht ſehr ab von der *Northamptoner* und der *Worwicher* Tabelle, die *Price* bekannt machte. Dazu nahm *Moivre* das 86ſte Jahr für das *höchſte Alter* an, die wenigen, die darüber herauslebten, glaubte er weglaſſen zu können. Es hat ſich nachher gefunden, daſs man weder das eine noch das andere annehmen darf, auch wenn mans in Praxi nicht ganz genau nehmen will. *Moivre* hat dieſs am Ende ſelbſt erkannt, und in der letzten Ausgabe ſeiner *Doctrine of Chance* andere Regeln gegeben. Allein nach D. *Price* Zeugniſs ſind auch dieſe nicht zutreffend. Eine andere Hypotheſe, die *Moivre* bey den Verbindungsrenten annahm, weicht noch weiter von den Tabellen ab, als die vorige.

Gleichwohl muſs man ſich dieſe Art zu rechnen bekannt machen. Sie liegt bey vielen Betrachtungen zum Grunde.

Satz

Satz 10. Aufgabe: Wenn das Absterben gleichförmig erfolgt, (oder, die jährliche Abnahme einer Zahl von Lebenden immer von gleicher Gröfse angenommen wird) den Wehrt der Leibrente 1, für das gegebene Alter a zu finden.

1) Es sey die zu dem Alter *a* gehörige *Altersergänzung* α, so nehme man den Wehrt der *Zeitrente* für so viele Jahre als diese Ergänzung grofs ist.

2) Diese *Zeitrente* durch den *Zinsfufs* multiplicirt, und mit der *Altersergänzung* dividirt, ziehe man von 1 ab.

3) Der Rest multiplicirt mit dem *Grundcapital*, giebt den gesuchten Wehrt der Leibrente:

Es ist $\lambda\overline{a} = p - \frac{pr}{\alpha} \cdot \int \frac{1}{r^{\alpha}}$. *)

Ex. Das gegebene Alter sey 20 Jahr, so ist nach *Moivres* Vorausetzung die Altersergänzung $\alpha = 66$. Nimmt man $r = 1{,}04$ so ist die Zeitrente $\int \frac{1}{r^{66}}$, nach der *II*ten Tafel, 23, 1218 und $\frac{23,1218}{66} = 0,3503$, und $0,3503 \cdot 1,04 = 0,3643$. Also $(1 - 0,3643) \cdot 25 = 0,6357 \cdot 25 = 15,8925$ nach der Vorausetzung. Nach *Süfsmilchs* Tafel ist sie für dasselbe Alter 16,7905. Der Unterschied nahe an eine Jahrs Hebung.

Simpson machte hiebey eine sinnreiche Aenderung. Er nahm an statt der *Altersergänzung*, die *richtig berechnete*

*) *Zusätze* zu diesem Cap. §. 8.

rechnete mittlere Lebensdauer zweymal. Die letztere rechnete er ſelbſt nach der Londoner Tabelle. Er nennt ſonſt jene doppelte Lebensdauer die *Altersergänzung*, aber eigentlich iſt ſie das nicht. Sie konnte nur ſo heiſſen, weil nach der *Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, die mittlere Lebensdauer zweymal der Altersergänzung gleich iſt.* Die auf *Simpſons* Art gefundene Wehrte weichen von dem genauen Wehrt ſelten über $\frac{1}{40}$ des Ganzen ab, doch finden ſich in der von ihm beygefügten Tabelle gröſsere Unterſchiede. *) Nach *Süſsmilchs* Sterblichkeitsordnung ſind die Abweichungen gröſser, obgleich noch kleiner, als wenn nach *Moivres* Methode gerechnet würde.

Ex. 1. Für das Alter 70 Jahr iſt die mittlere Lebensdauer 8,18; das angenommene Complement des Alters alſo 16,36. Dieſe Zahl für α geſetzt in dem Wehrte der Rente nach *Moivres* Hypotheſe, giebt $\int_{16,36}^{1}$ 11,83711, und $\frac{1,04}{16,36}$ · 11,83711 = 0,75248; Folglich (1 — 0,75248). 25 = 6,1940 für $\lambda\,\overline{70}$. Der wahre Wehrt iſt 5,9991. Alſo der Unterſchied 0,2039 das iſt $\frac{1}{29}^{\text{tel}}$ (genau $\frac{2}{39}^{\text{tel}}$) des Ganzen.

Ex. 2. Es ſey das gegebene Alter 20 Jahr, ſo iſt die mittlere Lebensdauer = 35,93. Alſo das Complement eines erdichteten Lebens, wie *Simpſon* ſich ausdrückt, eigentlich das *angenommene Complement des Alters.*

*) *Select Exerciſes.* p. 314.

Alters, = 70,06. Wird dieſs für α geſetzet, ſo iſt $\lambda\overline{a} = p - \frac{r}{\alpha} p \int \frac{1}{r^{\alpha}} = 16,3168$. Der genaue Wehrt iſt 16,7905; Unterſchied 0,4737 alſo $\frac{1}{35}^{\text{tel}}$ des Ganzen.

Wenn keine Zinſen gerechnet werden, ſo iſt der Wehrt der Leibrente einerley mit der mittlern Lebensdauer. Die mittlere Lebensdauer iſt aber ſo groſs als ſie auch heraus kommt, wenn die jährlichen Decremente einander gleich, und die Altersergänzung die doppelte Lebensdauer iſt. *) Daher werden die nach *Simpſons* Methode berechneten Leibrenten genau richtig ſeyn unter derſelben Bedingung. Dieſe findet nun zwar nicht Statt, aber man ſieht daraus doch, daſs ſie deſto genauer zutreffen, je geringer der Zinsfuſs iſt. Im Ganzen iſt dieſs nur eine Approximation, aber wie aus dem obigen Beyſpiele erhellet, eine ſehr brauchbare. Kaum kann man in Praxi die ſo berechneten Leibrenten entbehren. Daher habe ich ſie in der XXX^ſten Tabelle angefügt. Aber die Lebensdauer iſt jedesmal der *Süſsmilchiſchen* Tafel gemäſs genommen.

64.

Indeſſen wenn man mit einem ſolchen Grade der Richtigkeit zufrieden ſeyn will, als man hier hat: ſo giebt es noch einen andern Weg durch *die mittlere Lebensdauer* und *die Zeitrenten* ſchnell genug zu den *Leibrenten*

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 12.

renten zu kommen. Man kann annehmen: *daſs die Leibrenten in demſelben Verhältniſs ſtehen wie die Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer.* Man ſuche dieſs Verhältniſs nur in einem Fall, und zwar für das Alter von 50 Jahren. Für dieſs Alter müſsten alſo die Leibrenten nach der Sterblichkeitstafel und dem Zinſenfuſs berechnet ſeyn. Ihr Verhältniſs zu der *Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer* kann alsdenn für allgemein bey jedem ſonſtigen Alter genommen werden.

Die mittlere Lebensdauer eines Funfzigjährigen iſt 16,95 Jahr. Wenn r = 1,04, ſo iſt die Zeitrente auf 16,95 = 12,1355. Die Leibrente für 50 Jahre iſt 10,7961, und 12,1355 : 10,7961 = 1000 : 890.

Dieſs Verhältniſs als allgemein angeſehen, ſo hat man für das Alter von 15 Jahren die mittlere Lebensdauer 38,56 Jahr. Die Zeitrente dafür iſt 19,4892. Nun 100 : 89 = 19,4892 : 17,3454. Der wahre Wehrt iſt 17,6104; alſo der Unterſchied 0,265 = $\frac{1}{66}^{\text{tel}}$ des Ganzen. Die gröſste Differenz iſt etwan $\frac{1}{30}^{\text{tel}}$ des ganzen Wehrts.

Ich will hier eine Tabelle von den Verhältniſſen der Zeitrenten auf die Lebensdauer, zu der Leibrente herſetzen, weil ſolche ſonſt noch brauchbar iſt.

Verglei-

Vergleichung der Leibrenten mit den Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer.

Alter.	*Dauer im Durchschnitt.*	*4 Proc. Zeitrenten-Wehrt.*	*Wehrt der Leibrenten.*	*Verhältniſs.*
15 Jahr	38,56 Jahr	19,4892	17,6104	1000: 900
20	35,03	18,6719	16,7905	1000: 899
25	31,78	17,8108	15,9870	1000: 898
30	28,57	16,8458	15,9847	1000: 895
35	25,49	15,7989	14,1175	1000: 894
40	22,64	14,7108	13,1565	1000: 894
45	19,72	13,4625	12,0108	1000: 892
50	16,95	12,1355	10,7961	1000: 890
55	14,50	10,8408	9,6394	1000: 889
60	12,07	9,4271	8,3422	1000: 885
65	9,88	8,0298	7,0527	1000: 878
70	8,18	6,8592	5,9901	1000: 875
75	6,76	5,8197	5,0578	1000: 869
80	5,53	4,8707	4,2021	1000: 863
		5 Proc.		
15	38,56	16,9514	15,2564	1000: 900
20	35,03	16,3794	14,6447	1000: 894
25	31,78	15,7565	14,0434	1000: 891
30	28,57	15,0366	13,3496	1000: 888
35	25,49	14,2318	12,5918	1000: 885
40	22,64	13,3714	11,8332	1000: 885
45	19,72	12,3567	10,8979	1000: 882
50	16,95	11,2523	9,8810	1000: 878
55	14,50	10,1391	8,8980	1000: 878
60	12,07	8,9004	7,7656	1000: 873
65	9,88	7,6481	6,6115	1000: 864
70	8,18	6,5792	5,6713	1000: 862
75	6,76	5,6158	4,8192	1000: 858
80	5,53	4,7249	4,0323	1000: 853

Alter.	Dauer.	Wehrt der Zeitrente.	Wehrt der Leibrente.	Verhältniſs.
		a 1½ Proc. halbjährlich.		3 Proc. jährlich.
15 Jahr	38,56 Jahr	22,6693	20,5921	1000: 908
20	35,63	21,4976	19,4708	1000: 906
25	31,78	20,3033	18,3801	1000: 905
30	28,57	19,0059	17,1894	1000: 904
35	25,49	17,6404	15,9402	1000: 904
40	22,64	16,2612	14,7144	1000: 905
45	19,72	14,7224	13,3023	1000: 904
50	16,95	13,1359	11,8416	1000: 901
55	14,50	11,6170	10,4703	1000: 901
60	12,07	10,0017	8,9748	1000: 897
65	9,88	8,4409	7,5218	1000: 891
70	8,18	7,1576	6,3383	1000: 886
75	6,76	6,0351	5,3119	1000: 880
79	5,69	5,1576	4,4989	1000: 871

65.

Daran fehlt viel, daſs die *Decremente* einander gleich ſind. Aber ſehr nahe kommt man, wenn man ſie vom 15ten Jahr des Alters an, als *gleichförmig ſich ändernd annimmt.* Sie können auf zwo *arithmetiſche* Reihen gebracht werden. Die erſtere davon gehe bis ans Ende des 66ſten Jahrs; *in dieſer nehmen ſie gleichförmig zu.* In der *zwoten*, von dahin bis zum höchſten Lebensjahr, *nehmen ſie gleichförmig ab.* Auf die Art entſteht eine Tabelle, bey der ſich für die Leibrente ein allgemeiner Ausdruck geben läſst, der zwey Theile enthält, und der die

die Wehrte näher giebt, als die vorbeſchriebene Rechnungsart nach *Simpſon*. Um der einfachen Leibrenten willen bedarf es keiner Hypotheſe mehr: auch nicht einmal für die Verbindungsrenten auf *zwo* Perſonen. Allein in ſolchen Fällen, wo man für drey und mehr Perſonen einige einzelne Verbindungsrenten zu haben wünſchet, ohne zugleich mehrere zu berechnen, da kommt es zu Statten, wenn man ſich der allgemeinen Formel bedienen kann, die von der gedachten leichten Abänderung der Tabelle abhängt. Dieſe Aenderung kann ganz kurz ſo angegeben werden.

Zur Grundzahl der Tabelle nehme man der Bequemlichkeit wegen 9000, als die Anfangszahl der Gebohrnen beym Alter 0.

Jahre des Alters.	*Zahl der Lebenden im Anfang des Jahrs.*	*Jährlicher Abgang.*
15 — 16	4598	38
16 — 17	4560	39

Die *Differenz der Decremente iſt* 1 bis

65 — 66	— —	1473	— —	88

Bis dahin geht die erſte arithmetiſche Progreſſion der Decremente. Dann fängt die *zwote* an, deren *Differenz* $2\frac{1}{2}$ iſt, aber *verneinend*, denn die folgenden Decremente ſind kleiner.

66 — 67	1385	85, 5
67 — 68	1299, 5	83, 0
...	...	...
95 — 96	21, 5	13, 0
96 — 97	7, 5	7, 5

Das

Das letzte Jahr macht eine Ausnahme, davon aber nichts abhängt, als etwan nur wenn das gegebene Alter ſehr hoch genommen wird, und dann kann jenes leicht für ſich berechnet werden.

Weiter zurück zu gehen als auf das 15te Jahr, iſt nicht, oder doch ſelten, erforderlich. Es läſst ſich auch nach derſelben Regel nicht wohl thun, oder man ändert mehr, als ichs wagen mögte, wenn *Süſsmilchs* Tafel noch als das Reſultat der Erfahrung gelten ſoll.

66.

Die *allgemeine Formel für Leibrenten* nach der ſo *veränderten Tafel* iſt folgende. Es ſey das gegebene Alter a, die Anfangszahl für ſelbiges wie vorher A; das erſte jährige Decrement von A, d. Die *Differenz der Decremente* iſt 1 in der erſten Periode. Ferner das *erſte Decrement der zwoten Periode*, oder für das Jahr 66 — 67 ſey d' und die Zahl der Lebenden für eben das Jahr A'. Die *Differenz der Decremente* iſt von da an $-2\frac{1}{2}$. Iſt nun a kleiner als 66, ſo iſt

$$\lambda\overline{a} = \int\frac{1}{r^{66-a}} - \frac{1}{A}\left((d-\tfrac{1}{2})\int\frac{66-a}{r^{66-a}}\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\int\frac{(66-a)^2}{r^{66-a}}\right) + \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{r^{66-a}}\left(A'\int\frac{1}{r^{30}}\right.$$

$$\left. - (d'+1,25)\int\frac{30}{r^{30}} + 1,25\int\frac{30^2}{r^{30}} + \frac{7,5}{r^{30}}\right)$$

wo auch das letzte Jahr ſchon mit genommen iſt, was ſonſt als unbeträchtlich weggelaſſen werden kann.

Iſt

Iſt a = 66, ſo fällt der erſte Theil ganz weg; ſtatt der Zahl 30 kommt die *Altersergänzung 96 — a*, und es wird der geſuchte Wehrt

$$= \frac{1}{A}\left(A\int\frac{1}{r^{96-a}} - (d'+1{,}25)\int\frac{96-a}{r^{96-a}}\right.$$
$$\left. + 1{,}25\int\frac{96-a}{r^{96-a}} + \frac{7{,}5}{r^{96-a}}\right).$$

Nach dieſen Formeln iſt ſehr leicht zu rechnen, wenn man Tabellen von den Summen $\int\frac{n}{r^n}$, und $\int\frac{n^2}{r^n}$ hat. Sonſt kann man ſolche auch aus der Zeitrententabelle ſuchen nach den Formeln, die in den *Zuſätzen zum erſten Capitel* *) vorkommen. Solche Summentabellen braucht man bey manchen Gelegenheiten. Ich hatte ſie bis auf die für die 6te Potenz berechnet, allein um die Zahl der Tabellen nicht zu ſehr zu vergröſsern, habe ich ſie zurückgelaſſen.

Die einfachere *Formel für die mittlere Lebensdauer* iſt

$$66 - a - \frac{1}{A}\left((d-\tfrac{1}{2})\int\overline{(66-a)}^{\cdot} + \tfrac{1}{2}\int\overline{(66-a)^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{A}\left(30\,A' - (\cancel{85{,}25} + 1{,}25)\int\overline{30}\right.$$
$$\left. + 1{,}25\int\overline{30^2} + 7\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}.$$

Die Leibrenten für a = 20 Jahr, und für 70 Jahr kommen den völlig genauen Wehrten näher als nach *Simpſons* Methode.

Die

*) *Zuſätze* zu Cap. I. §. 14. und 16.

Die Beweiſe für die Richtigkeit der Formeln ſtehen in den *Zuſätzen zu dieſem Capitel*, *) wo auch noch einige allgemeine Betrachtungen über die Mortalitätstafeln beygebracht ſind.

67.

Bey Berechnung der *jährlichen* Leibrenten wird angenommen, daſs der *jährliche Abgang jedesmal im Anfang des Jahrs erfolge.* Das heiſst, für den Theil des Jahrs, welches der Rentenier nicht ganz durchlebet, wird nichts gerechnet. Daher iſt die Ausgabe $\frac{{}^{x}A}{r^{x}}$ für das höchſte Lebensjahr $= 0$, weil alsdenn ${}^{x}A = 0$ iſt.

Satz 11. Soll auch die Zwiſchenzeit gerechnet und den Erben des Renteniers dafür ein proportioneller Theil der jährlichen Rente ausgezahlet werden, ſobald ſolche eine beſtimmte Gröſse hat, (ein viertheil oder halbes Jahr iſt,) *ſo muſs zu dem Wehrt der jährlichen Leibrente noch etwas hinzugeſetzet werden*, was nach den verſchiedenen Vorausſetzungen, von verſchiedener Gröſse iſt, aber überhaupt nicht viel ausmacht.

Wenn *halbe* Jahre gerechnet werden, aber die Zahlung nur am Ende jeden Jahrs geſchieht, ſo beträgt ſolches $\frac{1}{4}$tel *des*, aus der XXI^ſten Tabelle zu nehmenden, *Wehrts einer beym Tode der gegebenen Perſon zahlbaren Summe, auf Ein Jahr zurück discontirt.*

Werden

*) §. 9. 10. 11.

Werden *Vierteljahre* gerechnet, ſo macht es $\frac{3}{8}$ *) der letzterwähnten Summe aus, oder $\frac{3}{8}\frac{T}{r}$ §. 59.

Mehr hievon in den *Zuſätzen.* *)

Ex. Wenn das Alter der Perſon 40 Jahr iſt, ſo iſt $T_1 = 1 - \frac{\lambda_a}{p} = 0,4737$, (Tab. XXI.) und $\frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda_a}{p}\right) = 0,4555$. Alſo iſt zu dem Wehrt der Leibrente 1 hinzuzulegen $\frac{1}{4}$. $0,4555 = 0,11387$.

68.

Satz 12. Wenn zu dem baaren Wehrt einer Leibrente, welche jährlich bezahlet wird, noch ein Viertheil einer Jahrsrente addirt wird, ſo iſt dieſs ganz nahe dem Wehrt einer Leibrente gleich, welche halbjährlich zur Hälfte gezahlet wird, vorausgeſetzet, daſs die *Hälfte der Jahreszinſen* für die *halbjährlichen Zinſen* genommen werden.

Satz 13. Wenn man zu dem Wehrt der jährlichen Leibrente $\frac{1}{4}$tel einer Jahrshebung hinzuleget, ſo hat man den Wehrt der Leibrente in vierteljährlichen Zahlungen, unter derſelbigen Bedingung, ganz nahe. Die obige Art die Zinſen zu berechnen vorausgeſetzt.

Der Beweis dieſer Sätze ſteht in den *Zuſätzen.* **) Wenn halbjährlich bezahlet wird, ſo verlieret erſtlich

*) §. 13.

**) *Zuſätze* zu Cap. II. §. 14.

der Entrepreneur etwas an den Zinſen, weil jedes Jahr die Hälfte der Rente um ein halbes Jahr früher zahlbar wird; und zweytens ſo iſt es $\frac{1}{2}$ wahrſcheinlich, daſs noch ein halbjährlicher Termin mehr zahlbar werde, als bey jährlichen Zahlungen. Dieſs beydes zuſammen macht nahe $\frac{1}{4}^{\text{tel}}$ einer jährlichen Einnahme; und $\frac{1}{8}^{\text{tel}}$ deſſelben, wenn vierteljährlich $\frac{1}{4}^{\text{tel}}$ Rente gezahlt wird.

Satz 14. Iſt die Leibrente in augenblicklichen Terminen zahlbar, ſo iſt zu dem Wehrt der jährlichen, noch die Hälfte einer Jahreshebung zuzulegen, nach der gewöhnlichen Art die Zinſen für kleinere als Jahrstermine zu rechnen. Das iſt; $\lambda\overline{a} + \frac{1}{2} =$ dem baaren Wehrt der augenblicklichen Rente. *)

Anmerk. Der Wehrt eines *Landgutes*, oder einer andern Sache, welche täglich oder gar ſtündlich genutzet wird, kann darnach beurtheilet werden.

69.

Satz 15. Aufgabe. Aus der Leibrente für ein gegebenes Alter a, die Leibrente für ein Alter, das um ein Jahr gröſser iſt, $(a+1)$, zu finden.

„1) Man multiplicire die gegebene Leibrente mit „dem Zinſenfuſs.“

„2) Man

*) Siehe *Zuſätze* zu dieſem Cap. §. 16. 17. wo auch der Unterſchied gewieſen iſt, wenn der Jahrszinsfuſs durchaus beybehalten wird.

„2) Man multiplicire dieſen Wehrt, $r\lambda\overline{a}$ durch das „*Decrement des erſten Jahrs*, und dividire das Product „mit der Zahl der Lebenden von nächſtfolgendem Jahre „$(a+1)$, das iſt man mache

$$\frac{\Delta A}{{}^{1}A} \cdot r\lambda\overline{a}.$$

„3) Man addire das Gefundene aus n. 1 und 2, und „ziehe davon die Einheit ab, ſo hat man den geſuchten „Wehrt.“ Es iſt

$$\left(1 + \frac{\Delta A}{{}^{1}A}\right) r\lambda\overline{a} - 1 = \lambda\overline{(a+1)}$$

Beweis. Die Leibrente für das Alter a iſt

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + \frac{{}^{3}A}{r^3} + + \frac{{}^{x}A}{r^x}\right) (\S.\ 40.)$$

und die Leibrente für $(a+1)$ oder $\lambda\overline{(a+1)}$ iſt

$$= \frac{1}{{}^{1}A}\left(\frac{{}^{2}A}{r} + \frac{{}^{3}A}{r^2} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x-1}}\right).$$

Folglich $\frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{1}{{}^{1}A}\left(\frac{{}^{2}A}{r^2} + \frac{{}^{3}A}{r^3} + + \frac{{}^{x}A}{r^x}\right)$

und $\frac{{}^{1}A}{A} \cdot \frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{2}A}{r^2} + \frac{{}^{3}A}{r^3} + + \frac{{}^{x}A}{r^x}\right)$

$= \lambda\overline{a} - \frac{{}^{1}A}{A.r}$. Daraus wird $\lambda\overline{a+1} =$

$$\frac{Ar\lambda\overline{a}}{{}^{1}A} - 1 = \frac{({}^{1}A + \Delta A) r\lambda\overline{a}}{{}^{1}A} - 1 = \left(1 + \frac{\Delta A}{{}^{1}A}\right) r\lambda\overline{a} - 1.$$

Ex. Die Leibrente für eine zwanzigjährige Perſon iſt $= 16,7905 = \lambda\overline{a}$ auf 4 Proc. gerechnet, oder für $r = 1,04$. Alſo iſt $r.\lambda\overline{a} = 17,46212$. Nach *Süſsmilchs* Tabelle iſt der Abgang im 21ſten Jahr 5, und die Zahl der Lebenden am Ende des 21ſten iſt 486. Folglich

$$\frac{5.\ 17,46212}{486} = 0,17928$$

dazu $17,46212 - 1 = 16,46212$

macht 16,64140

70.

Anmerk. Gemeiniglich berechnet man nur die Leibrenten von 5 zu 5 Jahren, und *ſucht* dann die *dazwiſchenfallende durch die Differenzen*, als *arithmetiſch proportionelle Gröſsen.* Z. B.

die Leibrente für 20 Jahre iſt $= 16,7905$
die . . . für 25 . . . iſt $= 15,9870$

Differenz $= 0,8035$

5) $0,1607$

ſubtrahirt von . . $16,7905$

bleibt Leibrente für 21 Jahr $= 16,6298$

Dieſs letzte iſt doch um 0,012 zu klein.

Zuſatz 1. Es iſt jedesmal 1 gröſser als $\left(\frac{r\Delta A}{A} + r - 1\right)\lambda\overline{a}$, weil $\lambda\overline{a} - \lambda(\overline{a+1}) = 1 - \left(\frac{r\Delta A}{A} + r - 1\right)\lambda\overline{a}$ iſt, und $\lambda\overline{a} > \lambda(\overline{a+1})$

Daher

Daher muſs in jedem Fall auch $\lambda \overline{a}$ kleiner ſeyn als $\frac{1}{r. \frac{\Delta A}{A} + r - 1}$, wie groſs oder klein auch der Zinsfuſs genommen werde.

71.

Zuſatz 2. Zugleich iſt klar, wie *aus einer gegebenen Leibrente, die für Ein Jahr jünger gefunden werde.* Nämlich

„1) man addire zu dem Wehrt der gegebenen Leibrente 1 noch die Einheit.

„2) Dieſe Summe werde auf Ein Jahr zurück discontirt.

„3) Man dividire das Decrement für das Jahr, welches nächſt vor dem, wozu die gegebene Leibrente gehört, in der Tabelle ſteht, durch die Zahl der Lebenden für eben dasſelbige, und ziehe dieſen Quotienten von der Einheit ab.

„4) Mit dieſem Reſt wird die vorher nach n. 1. discontirte Summe multiplicirt.“

Es iſt $\lambda(\overline{a+1}) = \frac{A}{A - 1}$ r. $\lambda \overline{a} - 1$.

Folglich $\left(\frac{1 + \lambda \overline{a+1}}{r}\right) \frac{A - 1}{A} = \lambda \overline{a} =$

$$\frac{(1 + \lambda \overline{a+1})}{r} \left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right).$$

72.

Zuſatz 3. Will man aus der Leibrente $\lambda\overline{a}$ die Leibrente für $(a+2)$ unmittelbar haben, ſo iſt

$$\lambda\overline{a} - \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^2}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{3}A}{r^3} + \frac{{}^{4}A}{r^4} + +\right) = \frac{{}^{2}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{(a+2)}}{r^2}.$$

Folglich $\lambda\overline{a+2} = \frac{r^2 A}{{}^{2}A}\cdot\lambda\overline{a} - \frac{\left(r - {}^{1}A + {}^{2}A\right)}{{}^{2}A}$

$$= \frac{A.r^2.\lambda\overline{a} - r\Delta\,{}^{1}A}{{}^{2}A} - (r+1).$$

Für eine um drey Jahre ältere Perſon, oder für $(a+3)$ iſt

$$\lambda\overline{a+3} = \frac{A}{{}^{3}A}\cdot r^3\lambda\overline{a} - \left(\frac{(r^2+r)\,\Delta\,{}^{2}A + r^2\Delta\,{}^{1}A}{{}^{3}A}\right) - (r^2+r+1)$$

Für $\overline{a+4}$ iſt

$$\lambda(a+4) = \frac{A}{{}^{4}A}\cdot r^4.\lambda a - \left(\frac{(r^3+r^2+r)\,\Delta\,{}^{3}A + (r^3+r^2)\Delta^2 A + r^3\Delta^3 A}{{}^{4}A}\right)$$

$$= (r^3+r^2+r+1).$$

73.

Methoden, Leibrenten nach einem Zinsfuſs in ſolche nach einem andern zu verändern.

Soll bey einem Leibrenteninſtitut ein gewiſſer Zinsfuſs durchgängig zum Grunde gelegt werden, ſo erfordert es die Genauigkeit, daſs man auch nach dieſem Fuſs die Leibrenten genau berechne. Aber oftmals werden nur von einzelnen Leibrenten die Wehrte für einen neuen Zinsfuſs

Zinsfuſs erfordert, um eine Vergleichung anzuſtellen, der die gröſste Schärfe fehlen kann. Für dieſe Fälle gehören die folgenden Methoden, die ſonſt an ſich nur Approximationen ſind.

Hat man die *Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer nach dem neuern Zinsfuſs* noch nicht, ſo ſuche man ſolche vorher aus andern (nach Cap. I. §. 14.). Hat man dieſe, ſo kann man auf eine der folgenden Arten verfahren.

1) Man bediene ſich des Verhältniſſes der *Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer* zu den *Leibrenten*, dergleichen die obige Tabelle §. 64. giebt, bey ſolchen, die nach *Süſsmilchs* Tafel berechnet ſind.

Es ſey die gegebene Leibrente nach irgend einer Sterblichkeitstafel berechnet, zu einem gegebenen Fuſs; man ſuche ihr Verhältniſs zur Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer aus der nämlichen Tafel, nach demſelbigen Zinsfuſs.

Dann ſuche man die letztere Zeitrente nach dem zweyten Zinsfuſs.

Nun nehme man das Verhältniſs der letzten Zeitrente zu der ihr zugehörigen Leibrente, ſo groſs wie bey dem erſten, ſo erhält man den Wehrt der Leibrente nach dem letztern durch die Regel de Tri.

Z. B. Es ſey die Leibrente für das Alter von 35 Jahren, nach dem Zinsfuſs $r = 1{,}04$ gegeben, 14, 1175,

ſo iſt die mittlere Lebensdauer für jenes Alter 25,49 Jahr, und die Zeitrente auf ſo viele Jahre nach demſelbigen Zinsfuſs 15,7989. Nach 5 Procent gerechnet, iſt die Zeitrente 14,2318. Man ſage alſo, wie die Zeitrente nach 4 Proc. zur Zeitrente nach 5 Proc., ſo die Leibrente nach 4 Proc. zur Leibrente nach 5 Proc.

15,7989: 14,2318 = 14,1175: 12,717. Der genaue Wehrt der letztern iſt 12,592. Der Unterſchied alſo 0,125.

Zuſatz 1. Hat man ſchon irgend eine Leibrente nach dem neuen Zinsfuſs für ein gewiſſes Alter genau berechnet, ſo kann man ihr Verhältniſs zu der ihr zugehörigen Zeitrente nach demſelben Fuſs, mit dem Verhältniſſe dieſer beyden, nach dem gegebenen Zinsfuſs vergleichen und daraus ein näher zutreffendes Verhältniſs zwiſchen der *geſuchten Leibrente* und *der ihr zugehörigen Zeitrente* finden.

Zuſatz 2. Sind Leibrenten nach zwey verſchiedenen Zinsfüſsen berechnet, und für dieſe alſo auch ihre Verhältniſſe zu den Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer, z. B. nach 4 und 5 Procent, und man ſucht die Leibrente für einen neuen Zinsfuſs 3 Procent, der ſo viel von einem der erſtern verſchieden iſt, als dieſe unter ſich es ſind; ſo kann man annehmen, „*die Unterſchiede in „dem Verhältniſs der Leibrenten zu den Zeitrenten auf „die mittlere Lebensdauer, bey verſchiedenen Zinsfüſsen, „ſind gleich groſs, wenn die Unterſchiede der Procente*

„*gleich*

„*gleich sind;*“ und dieſer Unterſchied iſt zu dem Verhältniſs zu addiren, wo der Zinsfuſs kleiner iſt. Dieſs Verfahren giebt die Wehrte genauer.

Z. B. das Verhältniſs der Leibrente für das Alter von 50 Jahren *zur Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer*, iſt nach dem 5 Procentfuſs 0,878; und nach dem 4 Procentfuſs 0,890. Der Unterſchied iſt 0,012. Dieſs addirt zu dem letzten Verhältniſs giebt 0,902 für den 3 Procentfuſs. Dieſs iſt nur um 0,001 von dem genauen Verhältniſs unterſchieden. (Man ſehe die obige Tabelle §. 64.) Darnach alſo aus der Zeitrente nach 3 Procent die Leibrente berechnet, giebt ihren Wehrt bis auf $\frac{1}{1000}^{\text{tel}}$ des Ganzen.

74.

2) Man berechne aus der gegebenen *Zeitrente* den Wehrt der geſuchten *Leibrente* nach *Simpſons Methode*, §. 63. das iſt, nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben aus der mittlern Lebensdauer. Auf dieſelbige Art habe man auch die Leibrente berechnet nach dem vorigen Zinsfuſs, nach welchem man die *genauen* Wehrte der Leibrenten ſchon hat. Es ſey der *genaue Wehrt* der *Leibrente* nach dem gegebenen Zinsfuſs L, ihr *hypothetiſcher Wehrt* M; ferner der *hypothetiſche Wehrt* nach dem *neuen* Zinsfuſs M′; man ſuche den genauen Wehrt zu dem neuen Zinsfuſs L′.

Alsdenn nehme man an, „*daſs die Differenz zwiſchen den hypothetiſchen Wehrten*, M — M′ *ſich verhalte*

„*halte zu der Differenz der genauen Wehrte*, L — L', „*wie der hypothetiſche Wehrt zu dem genauen*," das iſt wie M : L, ſo bekommt man die *Differenz der genauen Wehrte*, die zu *addiren* oder zu *ſubtrahiren* iſt, je nachdem der neue Zinsfuſs *kleiner* oder *gröſser* iſt, als der gegebene.

Oder auch, man nehme an, *daſs die hypothetiſchen Wehrte ſich verhalten wie die wahren.*

Ex. Die richtige Leibrente für 40 Jahr nach *Süſsmilchs* Tafel und 4 Proc. iſt 13,1565 = L. Der hypothetiſche Wehrt derſelben iſt $25.\left(1 - \frac{1,04}{45,28}\int\frac{1}{r^{45,28}}\right)$, weil die mittlere Lebensdauer 22,64 iſt. Nun iſt $\int\frac{1}{r^{45,28}} = 20,7661$. Daher wird

$$25.\left(1 - \frac{1,04}{45,28}\cdot\ 20,7661\right) = 13,0760.$$

Den 5 Procentfuſs genommen iſt der hypothetiſche Wehrt $20\left(1 - \frac{1,05}{45,28}\cdot\ 17,80387\right) = 11,7426$. Die Differenz beyder = 1,3336. Dieſe vermindert in dem Verhältniſs 13,08 : 13,16 wird 1,3255, und dann abgezogen von 13,1565, läſst zurück 11,8310. Der wahre Wehrt iſt 11,8330, alſo die Abweichung nur 0,002 einer Jahrshebung.

Da der *hypothetiſche* Wehrt der Leibrente nach dem erſten Zinsfuſs von dem *genauen* nach demſelbigen ſehr wenig verſchieden iſt, ſo kann die Differenz der beyden hypothe-

hypothetiſchen Wehrte gerade zu für die Differenz der beyden genauen Wehrte genommen werden. Dieſs letztere iſt die Regel, die D. *Price* giebt, *(in der vierten Ausgabe ſeiner Obſervations.* *) Er verſichert, daſs die Abweichung des ſo gefundenen Wehrts, von dem völlig richtigen zuweilen gar nichts, überhaupt nur $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ einer Jahrshebung betrage. Dieſe letzte Methode hat alſo von dieſer Seite Vorzüge vor der erſten vorhergehenden in §. 73. allein ſie iſt auch ſo kurz und leicht nicht als jene.

Anmerkung. Bey dieſen und ähnlichen practiſchen Arbeiten wird es nöthig, die Leibrenten nach der erwähnten Hypotheſe berechnet, in der XXX^ſten^ Tabelle, zur Hand zu haben.

Zweyter Abſchnitt.

Von veränderlichen Leibrenten.

75.

Satz 16. Wenn die Leibrente in dem geometriſchen Verhältniſs wachſen ſoll, in welchem ein Capital durch ſeine Zinſen und Zinſen von Zinſen aufläuft, ſo iſt der baare Wehrt einer Leibrente, die im erſten Jahre 1 iſt, ſo groſs als die mittlere Lebensdauer der Perſon die ſie empfangen ſoll, weniger $\frac{1}{2}$, auf Ein Jahr zurück discontirt.

Beweis.

*) Volum. II. p. 155.

Beweis. Dieſs erhellet unmittelbar aus dem obigen Ausdruck für die immer gleich bleibende Leibrente 1.

Es iſt nämlich $\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}A}{r^2} + + \frac{\overline{x}A}{r^x}\right)$.

Wenn nun, ſtatt jedes Jahr 1 zu zahlen, im erſten Jahr 1; im zweyten r; im dritten r^2; im *xten* r^{x-1} zu zahlen iſt, ſo ändert ſich jener Ausdruck in folgenden

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}Ar}{r^2} + \frac{\overline{3}Ar^2}{r^3} + + \frac{\overline{x}Ar^{x-1}}{r^x}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{1}A + \overline{2}A + + \overline{x}A}{r}\right)$$

Nun iſt $\frac{r}{A}\left(\overline{1}A + \overline{2}A + + \overline{x}A\right)$ die künftige mittlere Lebensdauer in den Tabellen weniger $\frac{1}{2}$. §. 50. das iſt, die nicht ergänzte, blos auf ganze Jahre berechnete mittlere Lebensdauer. Dieſe mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt, giebt alſo den Wehrt der nach einer geometriſchen Progreſſion ſteigenden Leibrente, wovon der Exponent der Zinsfuſs iſt.

Ex. Bey einer 21 jährigen Perſon iſt die mittlere Lebensdauer 34,39 Jahr, davon ſubtrahirt 0,5, giebt 33,89. Fängt die Leibrente mit $\frac{1}{2}$ an, und ſteigt jährlich nach dem Verhältniſs des Zinsfuſses, ſo iſt ihr Wehrt 16,945 mit 0,961 multiplicirt, das iſt 16,2841. Der Wehrt einer *unveränderlichen* Leibrente 1 iſt 16,6417 beynahe jener gleich.

76.

Zuſatz. Wenn das Verhältniſs, in welchem die Rente jährlich ſteigen oder fallen ſoll, ſo groſs iſt, als das Verhält-

2) Diese Reihe dividire man mit A, und multiplicire sie mit dem Zinsfuſs r. Es sey das herauskommende rS. Dieſs ist hier das Aehnliche von dem, was oben §. 59. bey der unveränderlichen Leibrente der Wehrt der Erbschaft war.

3) Man ziehe rS, von dem Wehrt der unveränderlichen Leibrente ab, und

4) addire dazu 1. und dann

5) multiplicire man dieſs mit dem *Grundcapital*; so hat man den gesuchten Wehrt.

Der Wehrt der auf die vorbestimmte Art wachsenden Leibrente sey $L\overline{a}$ für das Alter $\overline{a}$, so ist

$$L\overline{a} = \frac{\lambda\overline{a} + 1 - rS}{r-1}. \quad *)$$

78.

Anmerkung 1. Der Wehrt solcher nach der natürlichen Ordnung der Zahlen wachsenden Leibrenten, kann nahe genug, mittelst der unveränderlichen Leibrenten und der *Verbindungswehrte für zwo Personen* gefunden werden, wie auch wiederum die letzten Verbindungswehrte aus jenen. Allein es kann aus andern Gründen wichtig werden, jene erſten für sich genau zu haben. Eine sehr leichte Art, mittelst einer allgemeinen Hülfstabelle, sie zu erhalten, soll unten (§. 88.) gezeiget werden.

79. *An-*

*) Der Beweis in den *Zusätzen zu diesem Capitel.* §. 20.

79.

Anmerkung 2. Nach der Hypotheſe des gleichförmigen Sterbens iſt die Reihe $S = \int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}$ *) wo x die *Altersergänzung* iſt, wofür aber nach *Simpſons* Verfahren die doppelte mittlere Lebensdauer zu nehmen iſt.

Daraus wird es leicht, den Wehrt von $L\overline{a}$ zu berechnen, und wenn es nur um einen allgemeinen Ueberſchlag zu thun iſt, kann man ihn ſo nehmen.

Ex. Für $a = 20$ Jahre iſt $x = 2.35,03 = 70,06$, und nach dem Zinsfuſs $r = 1,04$ iſt $\lambda \overline{a} = 16,3168$, nämlich ihren Wehrt nach eben der Hypotheſe genommen; die mittlere Lebensdauer nach *Süſsmilchs* Tafel berechnet. Ferner $\int \frac{1}{r^{70,06}} = 23,39807$. Daraus wird $\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a} = 7,0813$, und $r\left(\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}\right) = 7,3646$; auch $1 + \lambda \overline{a} - r\left(\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}\right) = 9,9522$, und alſo $L\overline{a} = 25.9,9522 = 248,805$ das iſt 15 mal die beſtändige Leibrente 1.

Soll alſo die ſteigende Leibrente nicht mehr koſten als eine unveränderliche, ſo muſs jene mit $\frac{1}{15}$ anfangen. So würde eine Perſon von 20 Jahren, wann ſie 35 Jahr alt geworden iſt, erſt zur jährlichen Hebung von 1 gelangen.

80. *An-*

*) Siehe *Zuſätze* zu dieſem Cap. §. 27.

80.

Anmerkung 3. Nach derſelben Vorausſetzung vom *gleichförmigen Abſterben* iſt die ſo *wachſende Leibrente* auch ſo groſs als das Product aus dem *Grundcapital* in den Reſt, der übrig bleibet, wenn man von der mit $r+i$ multiplicirten *beſtändigen* Leibrente die *Zeitrente* auf ſo viel Jahre als die Altersergänzung weniger 1 iſt, abziehet. Es ſey a das gegebene Alter, α die *Altersergänzung*, ſo iſt $L\overline{a} = p\left((1+r)\,\lambda\overline{a} - p\left(1 - \frac{1}{r^{\alpha-1}}\right)\right)$ *)

Daraus iſt ſie leicht zu berechnen.

Ex. Für $a = 70$ Jahre iſt $\alpha = 16,36$. Die Leibrente $\lambda\overline{70} = 6,2808$. Die Jahrsrente für 15, 36 Jahre iſt 11, 3106, und 2, 04. 6, 2808 = 12, 8128. Folglich $L\overline{a} = 25.\,(12,8128 - 11,3106) = 25.\,1,5022 = 37,555$, das iſt nahe an 6. $\lambda\overline{a}$. Alſo iſt eine beſtändige Rente 1, und eine ſolche ſteigende, die mit $\frac{1}{6}$tel anfängt, für das Alter von 70 Jahren von gleichem Wehrt.

81.

Zuſatz. Soll die Leibrente im erſten Jahr 1, im nächſtfolgenden $\frac{1}{n}$tel mehr ſeyn, und ſo ferner mit jedem Jahr um $\frac{1}{n}$tel anwachſen, ſo findet man ihren baaren Wehrt auf folgende Art:

1) Man ſucht den Wehrt der *beſtändigen* Leibrente 1, oder $\lambda\overline{a}$.

2) Man

*) *Zuſätze* zu dieſem Capit. §. 22.

2) Man ſucht den Wehrt einer mit $\frac{1}{n}^{tel}$ anfangenden, und in der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteigenden Leibrente für ein Alter um 1 Jahr höher, und discontirt dieſe letztere auf 1 Jahr. Oder man ſuchet $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$.

3) Von $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$ zieht man ab $\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{L\overline{a+1}}{nr}$, das iſt, $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$ durch die *Sterblichkeit* des erſten Jahrs multiplicirt.

4) Es werde die letztgefundene Differenz zu dem Wehrt der Leibrente $\lambda\overline{a}$ addirt, ſo bekommt man den geſuchten Wehrt; oder

$$\lambda\overline{a} + \frac{L\overline{a+1}}{nr}\left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right) = \textit{dem Wehrt der angenommenen Leibrente.}$$ *)

Ex. 1. Wenn $a = 19$, ſo iſt die mittlere Lebensdauer 35, 75, und $x = 71, 5$. Folglich $\lambda\overline{a}$, die beſtändige Leibrente 1, nach der Vorausſetzung des gleichförmigen Abſterbens $= 16, 4575$. Die Leibrente für $a = 20$, die mit $\frac{1}{n}^{tel}$ anfängt und nach der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteiget, iſt $\frac{248,5}{n}$ (§. 77.) Es ſey $n = 10$, ſo iſt $\frac{L\overline{20}}{n} = 24,805$, $\frac{L\overline{a}}{nr} = 23, 85$, und $1 - \frac{\Delta A}{A} = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{71,5} = 0, 96$. Folglich der geſuchte Wehrt des mit 1 anfangenden und

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 25.

auf die im Satz beſtimmte Art jährlich um $\frac{1}{10}$tel ſteigenden Rente, $V = 16,4575 + 23,85 \cdot 0,96 = 39,4399$.

Ex. 2. Für $a = 69$ iſt $\lambda\overline{a} = 6,3732$ nach *Simpſons* Art berechnet. Nun iſt auch $\frac{L\overline{a+1}}{n}$ oder $\frac{L\overline{70}}{n} = 37,555$ §. 80, und $\frac{L\overline{70}}{nr} = 36,1019$, und weil $x = 16,94$, ſo iſt $1 - \frac{1}{x} = 0,941$. Folglich der geſuchte Wehrt $V = 6,3732 + \frac{36,10819 \cdot 0,941}{n}$ $= 6,3732 + \frac{33,9719}{n}$.

Wenn $n = 5$, ſo iſt $V = 6,3732 + 6,7944 = 13,1676$.

Dritter Abſchnitt.

Von aufgeſchobenen, aufhörenden und aufgeſparten Leibrenten.

82.

Erklärungen. Man kann bedingen, daſs eine Leibrente nicht ſo gleich, ſondern nach einer beſtimmten Anzahl von Jahren erſt lauffend werde. Dieſs ſind die *aufgeſchobenen* Leibrenten bey der *Hamburger allgemeinen Verſorgungsanſtalt.* Es verſteht ſich, daſs wenn der Rentenier ſtirbt, ehe dieſe Jahre abgelauffen ſind, gar nichts gezahlt werde, und daſs übrigens die Leibrente nur auf Lebenszeit des Renteniers gehe.

Wenn

Wenn die Leibrente, die ſogleich anfängt, nur auf eine beſtimmte Zahl von Jahren gezahlet werden ſoll, ſo gehört ſie zu den *aufhörenden.* Dergleichen ſind die Renten, die man für *Wayſen* kauft, und die mit einem beſtimmten Alter der Perſon, die ſie genieſst, aufhören.

Eine Leibrente kann ſo beſtimmt werden, daſs ſie beydes zugleich ſey.

Wenn von einer Leibrente einige zahlbare Termine nicht ausgezahlt, ſondern bey der Caſſe bleiben, und mit ihren Zinſen, und Zinſen von Zinſen, zum Vortheil des Renteniers aufbewahrt werden, ſo iſt das eine in ſo ferne *aufgeſparte Leibrente.* Die Zahl der Jahre, in welche ſie aufgeſpart werden ſoll, kann zum voraus beſtimmt ſeyn; ſie kann aber auch *unbeſtimmt* bleiben, und jedesmal vom Willkühr des Empfängers abhangen. Man nennt ſie in dem letzten Fall bey dem Hamburger Inſtitut eine *ruhende Leibrente*, inſonderheit wenn ſie in den erſten Jahren geſammlet wird.

Das was der Rentenier durch das Aufſparen ſeiner Leibrente ſammlet, kann nachher auf einmal ausbezahlet werden, aber auch zur Vergröſſerung ſeiner nachherigen Leibrente gebraucht werden. In dem letzten Fall *wächſet die Rente durch die Ruhe.* Dieſe durch die Ruhe ſich vergröſsernde Leibrente wird eine *wachſende Leibrente* genannt.

83.

Satz 18. Der baare Wehrt einer auf eine bestimmte Zahl von Jahren (n) aufgeschobenen Leibrente, wird aus der Leibrententabelle auf folgende Art berechnet.

1) Wenn das Alter der Person a ist, so suche man die Leibrente für das Alter $a+n$, und discontire solche auf n Jahre zurück.

2) Diese Gröfse vermindere man in dem Verhältnifs der in dem Alter $a+n$ Lebenden zu denen im Alter a, nach den Tabellen, das ist, man multiplicire sie durch $\frac{{}^{n}A}{A}$ oder durch die Wahrscheinlichkeit des Lebens nach n Jahren. §. 39.

Wenn die auf n Jahre aufgeschobene Leibrente $\lambda\overline{a}$, bezeichnet wird durch ${}^{n}\lambda\overline{a}$ und die übrigen sonst schon gebrauchten Zeichen behalten werden, so ist

$${}^{n}\lambda\overline{a} = \frac{{}^{n}A}{A} \cdot \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}}.$$

Beweis. Aus dem allgemeinen Ausdruck für die so gleich lauffende Leibrente wird dies leicht eingesehen. Es ist nämlich

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^{2}} + \ldots + \frac{{}^{n}A}{r^{n}} + \frac{{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + \ldots + \frac{{}^{x}A}{r^{x}}\right).$$

Weil nun in den ersten n Jahren nichts ausgezahlet werden soll, so sind alle erste n Glieder dieser Reihe nichts. Folglich ist ${}^{n}\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + \ldots + \frac{{}^{x}A}{r^{x}}\right)$.

Es

Es ist aber eine Leibrente für das Alter $a+n$, oder

$$\lambda\overline{a+n} = \frac{1}{{}^{n}A}\left(\frac{{}^{n+1}A}{r} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x-n}}\right).$$

Daher $\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^n} = \frac{1}{{}^{n}A}\left(\frac{{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x}}\right)$

und $\frac{{}^{n}A}{A} \cdot \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^n} = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x}}\right)$

$= {}^{n}\lambda\overline{a}$.

84.

Zusatz 1. Weil ${}^{n}A = A - (A - {}^{n}A)$ so ist auch ${}^{n}\lambda\overline{a} = \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^n}\left(1 - \frac{(A - {}^{n}A)}{A}\right)$.

Nach dieser Formel rechnet man mit kleinern Zahlen.

Ex. Eine zwanzigjährige Person kaufe sich eine Leibrente, welche sie erst nach 16 Jahren geniessen will, das ist, welche 16 Jahre aufgeschoben werden soll, wie gross ist ihr baarer Wehrt?

Hier ist $a = 20$, $n = 16$.

$\lambda\overline{a+n} = \lambda\overline{36} = 13{,}9379$ nach *Süssmilchs* Tabelle und dem 4 Proc. Zinsfuss.

$A = 491$, ${}^{n}A = 402$, also $\frac{A - {}^{n}A}{A} = \frac{89}{491}$.

$= 0{,}1812$. Ferner $\frac{1}{r^{16}} = 0{,}5339$; also

$\frac{\lambda\overline{36}}{r^{16}} = 7,4414$, und $\frac{\lambda\overline{36}}{r^{16}} \cdot 0,1812 = 1,3484$.

Folglich $\overline{\overline{}}^{n}\lambda\overline{a} = 7,4414 - 1,3484 = 6,093$.

85.

Zuſatz 2. Mittelſt einer ſolchen Hülfstabelle als die obige §. 56. zur Berechnung der Leibrenten, findet man *aufgeſchobene Leibrenten*, auf eine ähnliche Weiſe durch Eine Diviſion. Die in der Columne E bey dem Jahre $a+n+1$ ſtehende Summe der discontirten Zahlen der Lebenden wird durch die in der Columne C bey dem Jahr a ſtehende discontirte Zahl der Lebenden dividirt, und der Quotient iſt, was man ſucht. Es iſt nämlich die Zahl in der Columne E bey dem Jahr $a+n+1$,

$= \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A}{r^{a+n+1}} + \frac{\overline{\overline{}}^{n+2}A}{r^{a+n+2}} + +$ wann A für die Anfangszahl in der Tabelle beym Alter a genommen wird; auch iſt die Zahl der Columne C beym Jahre a, $\frac{A}{r^a}$.

Folglich iſt jene Summe durch dieſe Zahl dividirt

$$= \frac{1}{A : r^a}\left(\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A}{r^{a+n+1}} + \frac{\overline{\overline{}}^{n+2}A}{r^{a+n+2}} + +\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A}{r^{n+1}} + \frac{\overline{\overline{}}^{n+2}A}{r^{n+2}} + +\right) = \overline{\overline{}}^{n}\lambda\overline{a}.$$

Wenn $a = 20$, und $n = 16$, ſo ſteht bey dem Jahr $a+n+1 = 37$, in der Columne E, 1365,26, und bey 20 Jahr in der Columne C, 224,09. Es iſt $\frac{1365,26}{224,09} = 6,093$. wie vorher.

86. *An-*

86.

Anmerkung. Wenn jemand ſtatt eine *aufgeſchobene* Leibrente zu kaufen, das dazu erfoderliche Geld bis dahin aufhebet, da er des Genuſſes der Rente bedarf, ſo wird der jetzige Wehrt der aufgehobenen Leibrente nach n Jahren ſeyn $r^n . \overline{\overline{\ }}^n\lambda\, a\, \overline{\ } = \lambda\, a+n . \frac{\overline{\overline{\ }}^n A}{A}$. Das iſt weniger als ihm alsdenn nach ſeinem Alter $a+n$, eine Leibrente für ſein künftiges Leben koſten wird. Allein er hat in der Zwiſchenzeit der n Jahre ſein Geld mit den gewonnenen Zinſen für ſich und ſeine Erben in Beſitz gehabt. Hätte er ſolches für eine *aufgeſchobene* Leibrente hin gegeben, ſo würde es, im Fall er vor n Jahren verſtorben wäre, der Caſſe des Entrepreneurs verfallen ſeyn. Er kann alſo nach n Jahren in dem erſten Fall nicht ſo viel haben, als er im letztern gehabt haben würde, wo er eben der Gefahr wegen, das Geld ohne Genuſs ausgegeben zu haben, mehr gewonnen haben würde.

87.

Zuſatz 3. Soll eine nach der Ordnung der natürlichen Zahlen *ſteigende Leibrente* auf n Jahre aufgeſchoben, alsdenn aber das erſtemal ſo genoſſen werden, wie es in demſelben Jahre geſchehen ſeyn würde, wenn ſie gleich vom Anfang an lauffend geweſen wäre, ſo findet man ihren Wehrt, wenn man eine ſolche ſteigende Leibrente für das Alter $a+n$ auf dieſelbige Weiſe verändert,

wie die beſtändige Leibrente nach dem vorhergehenden §. 83. und die auf ähnliche Art veränderte beſtändige Leibrente mit der Zahl der Jahre n multiplicirt, hinzuleget.

Oder es iſt $\overline{{}^{n}L}_{a} = \left(\frac{n.\lambda_{a+n}}{r^n} + \frac{L_{a+n}}{r^n}\right)\frac{{}^{n}A}{A}$.

Siehe Zuſätze *)

88.

Satz 19. Wenn man zu dem Wehrte der Leibrente x für ein gegebenes Alter, die Wehrte der auf 1, der auf 2, der auf 3 Jahre, und ſo ferner, bis die auf die ganze Altersergänzung fort aufgeſchobenen Leibrenten addirt, ſo iſt die Summe dieſer Leibrenten gleich dem Wehrt einer nach der natürlichen Ordnung der Zahlen bis ans Ende des Lebens ſteigenden Leibrente, die mit 1 anfängt.

Oder es iſt

$$L_a = \lambda_a + {}^{1}\lambda_a + {}^{2}\lambda_a + + {}^{\alpha}\lambda_a.$$

Beweis. Es iſt klar, daſs der Rentenier, der die letzten Renten zu erwarten hat, am Ende des erſten Jahrs 1; am Ende des zweyten, 2; am Ende des dritten, 3; und ſo ferner, am Ende des *nten* Jahrs, n; bis am Ende des Lebens, mit jedem folgenden Jahre Eins mehr empfangen ſoll. Das iſt, ſeine Rente iſt eine *nach der natürlichen Ordnung der Zahlen ſteigende Leibrente.*

89. Zu-

*) zu dieſem Capitel. §. 26.

89.

Zuſatz. Daraus ergiebt ſich eine Methode, mittelſt einer allgemeinen *Hülfstabelle* die Wehrte der ſo ſteigenden Leibrenten durch Eine Diviſion zu finden. Man ſummire von neuen die Zahlen der Columne E der Tabelle in §. 56. von hinten an, auf dieſelbige Art, wie man dieſe Zahlen in E durch die Summirung der discontirten Zahlen der Lebenden der Columne C gemacht hat, und ſchreibe auch die neuen Summen auf dieſelbige Art gegen die Jahrszahlen über. Alsdenn giebt die *Diviſion der beym Alter a+1 ſtehenden Zahl der neuen Columne durch die zum Alter a gehörige discontirte Zahl der Lebenden* den Wehrt für die ſteigende Leibrente $L\overline{a}$. Es iſt nämlich die Zahl der Columne E, bey dem Jahr

$a+1 = \frac{\overline{\ }^{1}A}{r^{a+1}} + \frac{\overline{\ }^{2}A}{r^{a+2}} + +$; die Zahl bey $a+2$

iſt $= \frac{\overline{\ }^{2}A}{r^{a+2}} + \frac{\overline{\ }^{3}A}{r^{a+3}} + +$ und ſo ferner.

Dieſe Zahlen durch $\frac{A}{r^{a}}$, das iſt durch die Zahl der Columne C bey dem Alter *a* jede für ſich dividirt, geben, die erſte, die Leibrente für *a*; die zwote, die auf ein Jahr aufgeſchobene Leibrente für daſſelbe Alter §. 85. und ſo weiter. Wenn nun jene Summen von neuem ſummirt ſind in der Zahl der neuen Columne, die bey $a+1$ ſtehet, ſo iſt klar, daſs dieſe letztere ſey

$$= \left(\frac{{}^{1}A}{r^{a+1}} + \frac{{}^{2}A}{r^{a+2}} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{{}^{2}A}{r^{a+2}} + \frac{{}^{3}A}{r^{a+3}} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{{}^{3}A}{r^{a+3}} + +\right)$$

Dieſe alſo mit $\frac{A}{r^a}$ dividirt, giebt

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + +\right) + \left(\frac{{}^{2}A}{r^2} + \frac{{}^{3}A}{r^3} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{{}^{3}A}{r^3} + +\right) = \lambda\overline{a} + {}^{1}\lambda\overline{a} + {}^{2}\lambda\overline{a} = L\overline{a}.$$

Unten in dem nächſtfolgenden Capitel von den Wehrten der Verbindungsrenten zwoer Perſonen ſoll eine ſolche Tabelle beygebracht werden. Sie dient zugleich die Verbindungswehrte auf die kürzeſte Art zu berechnen.

90.

Satz 20. Eine Leibrente, welche nur auf eine beſtimmte Zahl von Jahren, n, dauren, und dann aufhören ſoll, iſt gleich dem Ueberſchuſs einer vollen Leibrente über eine auf n Jahre aufgeſchobene für daſſelbige Alter.

Beweis. In dem Ausdruck

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r} + + \frac{{}^{n}A}{r^n} + \frac{{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + + \frac{{}^{x}A}{r^x}\right)$$

ſind allein die Ausgaben der erſten n Jahre, oder die erſten

ſten n Glieder zu berechnen; das iſt $\left(\frac{{}^{1}A}{r} + + \frac{{}^{n}A}{r^n}\right)$; das iſt, diejenigen, die bey der Berechnung der *aufgeſchobenen* Leibrente wegfallen. Nach dem $n$ten Jahr wird nichts mehr bezahlt. Folglich beſteht die *volle* Leibrente aus dem Theil, der auf die erſten n Jahre fällt, und aus dem Reſt, der die auf n Jahr *aufgeſchobene* Leibrente ausmacht.

Man kann die nur auf n Jahre daurende Leibrente bezeichnen durch $\overline{\overset{+n}{\lambda}\,a}$; Es iſt dann $\overline{\lambda\,a} = \overline{\overset{+n}{\lambda}\,a} + \overline{\overset{-n}{\lambda}\,a}$. Alſo $\overline{\overset{+n}{\lambda}\,a} = \overline{\lambda\,a} - \overline{\overset{-n}{\lambda}\,a}$.

Ex. Eine 20 jährige Perſon will eine Leibrente für ſich auf 16 Jahre haben, die nachher aufhören ſoll, ſo iſt $\overline{\lambda\,a} = 16,7905$, und $\overline{\overset{-n}{\lambda}\,a} = 6,0931$. (§. 84.) Folglich $\overline{\overset{+n}{\lambda}\,a} = 10,6974$. Für die erſten 16 Jahre iſt die Leibrente mehr wehrt, als für den ganzen übrigen Theil des Lebens.

91.

Zuſatz 1. Dieſer Satz iſt auch wahr von *veränderlichen Leibrenten.*

Zuſatz 2. Eben ſo gilt er auch für *Leibrenten in halbjährlichen Zahlungen.* Macht man dieſe letztern aus den jährlichen Leibrenten durch den Zuſatz von $\frac{1}{4}$ einer Jahrshebung, nach §. 68; ſo kann dieſer Zuſatz auf die beyden

beyden Stücke der ganzen Rente in Verhältnifs mit diesen Stücken selbst vertheilet werden. Dieſs ist für die Praxis genau genug.

92.

Satz 21. *Wenn A eine Leibrente 1 kauft, solche aber in den ersten n Jahren nicht genieſsen will, mit der Bedingung, daſs ihm oder seinen Erben dafür am Ende dieſer n Jahre eine Summe ausgezahlet werde, so ist der baare Wehrt dieſer alsdenn zahlbaren Summe gleich dem baaren Wehrt einer nach n Jahren aufhörenden Leibrente*, das ist, $\overset{+n}{\lambda}\overline{a}$. *Die Gröſse dieſer nach n Jahren zahlbaren Summe selbst, oder ihr derzeitiger Wehrt ist* $r^n . \overset{+n}{\lambda}\overline{a}$.

Beweis. Dieſs ist für sich klar. A bezahlt eine ganze Leibrente, und will doch nur eine auf *n* Jahre aufgeschobene genieſsen. A zahlet also der Casse den baaren Wehrt einer *n* Jahre daurenden und dann aufhörenden Rente mehr, als er für die aufgeschobene zu bezahlen hatte. §. 90. Nach *n* Jahren ist die Gröſse der alsdenn zahlbaren Summe so viel als der Wehrt der aufhörenden Leibrente nach *n* Jahren, mit Zinsen und Zinsen von Zinsen, das ist, $r^n . \overset{+n}{\lambda}\overline{a}$.

Ex. Die ganze Leibrente einer 20 jährigen Person ist 16, 795; nach dem Zinsfuſs $r = 1,04$; und eine nach 16 Jahren aufhörende ist 10, 6975 jetzo baar

wehrt

wehrt. Dieſs beträgt nach 16 Jahren 10, 6975. 1, 873 = 20, 0364.

Anmerkung. Es verſteht ſich, daſs dieſe Summe alsdenn, nämlich nach *n* Jahren zahlbar ſey, der Rentenier ſelbſt mag am Leben ſeyn oder nicht. Sie iſt gleich anfangs mit bezahlt worden.

93.

Zuſatz 1. Soll die *n* Jahre aufgeſchobene Rente *bey dem Tode des Renteniers* bezahlet werden, ſo kann ihre Gröſse, die ſie *alsdenn* hat, (ihr *derzeitiger Wehrt*) aus dem Wehrt einer beym Tode einer Perſon zahlbaren Summe berechnet werden, mittelſt Tab. XXI.

Ex. Um bey dem Tode einer 40 jährigen Perſon 1 zu empfangen, zahlt man baar 0, 4737. Da die *ganze* Leibrente für 40 Jahr = 13, 1565, und die auf 16 Jahr *aufgeſchobene* Leibrente = 4, 2395, ſo iſt die mit 16 Jahren *aufhörende* = 8, 917. Weil nun für 0, 4737 beym Tode eines 40 jährigen bezahlet wird 1, ſo iſt für 8, 917 zu bezahlen 18, 824.

94.

Zuſatz 2. Will A von 40 Jahren, nichts von ſeiner Leibrente genieſsen, ſondern dafür einem andern eine nach ſeinem Tode zu zahlende Summe hinterlaſſen, ſo iſt dieſe letztere $\frac{13, 1565}{0, 4737} = 27, 7740.$

95.

Zuſatz 3. Wenn A die Leibrente 1 in den erſten *n* Jahren, die er fortlebet, bey der Caſſe ſtehen läſst, und dann bey ſeinem Tode die ſo geſammlete Summe mit ihren Zinſen und Zinſeszinſen ausgezahlet werden ſoll, ſo beträgt ſie alsdenn $\frac{1}{r-1} \cdot (r^n - 1)$ wo *n* die Zahl der Jahre iſt, welche A durchlebet. Das iſt, ſie iſt ſo groſs als eine durch *n* Jahre *aufgeſparte Jahrrente.* $r^n \cdot \frac{1}{r^n}$ · (Cap. I. §. 25.)

Wenn A vom Alter 40 Jahr iſt, wie in dem vorigen Exempel, §. 93. ſo iſt $r^n \cdot \frac{1}{r^n}$, für r = 1, 04, und n = 16, gleich 25. 0, 873 = 21, 925. Dieſs iſt mehr, als bey dem Tode des A zahlbar (nach §. 93.) geweſen ſeyn würde, wenn A nach 16 Jahren geſtorben wäre. Aber A hat in jenem Fall auch wirklich 16 Jahre leben müſſen, um dieſe Summe zu ſammeln. Die vorher §. 93. berechnete Summe wird in jedem Fall beym Tode von A bezahlet, dieſer erfolge früh oder ſpät.

96.

Satz 22. Soll die Ruhe der Leibrente, (oder der Auffchub des Genuſſes in den erſten Jahren) *dazu gebrauchet werden, um die jährlichen Hebungen für die folgenden Lebensjahre deſto gröſser zu haben, und man ſetzet zum voraus die Dauer der Ruhe auf n Jahre feſt, ſo ver-*

verhält ſich die jährliche Hebung der durch die Ruhe gewachſenen Leibrente zu der jährlichen Hebung der ſogleich lauffenden, wie der baare Wehrt der letztern zu dem baaren Wehrt einer auf n Jahre aufgeſchobenen.

Beweis. Es iſt eine *volle* Leibrente bezahlt, und ſoll doch nur eine *aufgeſchobene* genoſſen werden. Nun ſind in jedem Fall die *jährlichen Hebungen, bey derſelben Art von Renten, in dem Verhältniſs der baaren Wehrte*, die man dafür zahlt. Daher wird die jährliche Hebung der aufgeſchobenen Leibrente in dem Verhältniſs gröſser, als der dafür bezahlte baare Wehrt, das iſt der Wehrt der vollen Leibrente, gröſser iſt.

Ex. Eine 20 jährige Perſon bezahlt eine volle Leibrente, will aber erſt nach 16 Jahren Ruhe ſie genieſsen. Sie kann alſo für ihr Geld jährlich empfangen 2, 287 an ſtatt 1. Denn der Wehrt der vollen Leibrente iſt 13, 9379, und der auf 16 Jahre aufgeſchobenen Leibrente iſt 6, 093. Alſo jene zu dieſer wie 2, 287 : 1.

97.

Zuſatz. Sind die Jahre der Ruhe nicht zum voraus beſtimmt, ſondern hangen von der Willkühr des Empfängers ab, der, wenn er will, für die aufgeſparte Summe eine gröſsere Leibrente für künftig nehmen kann, ſo iſt der Wehrt der aufgeſparten, zu der Zeit, wenn die Rente aufhört, nach §. 95. zu berechnen. Der Rentenier erhält jährlich ſo viel mehr über die anfangs gekaufte Hebung,

als ihm an Rente *für die aufgeſparte Summe nach ſeinem dermaligen Alter gegeben werden kann.*

Z. B. Ein Zwanzigjähriger hat nach 16 Jahren ſeine jährliche Rente 1 aufgeſpart, und ſich dadurch erworben 21,925. Nun iſt er 36 Jahr alt; und der Wehrt einer Leibrente 1 für 36 Jahr iſt 13, 9379. Folglich $\frac{21,925}{13,9379} = 1,57$. Um ſo viel kann ſeine jährliche Hebung 1 gröſser werden, alſo fürs künftige 2, 57 ſeyn.

Vierter Abſchnitt.

Vom Wehrt der Erbſchaft.

98.

Satz 23. Der baare Wehrt einer Summe, welche bey dem Tode einer Perſon A, vom gegebenen Alter a zahlbar iſt, (das iſt der *baare Wehrt der Erbſchaft*) *iſt ſo groſs, als die zu empfangende Summe ſelbſt, wenn davon der baare Wehrt einer Leibrente ſo groſs als die Zinſen dieſer Summe für die Perſon A abgezogen wird.*

Beweis. Es iſt aus der Natur der Sache klar. Wenn ein Capital, es ſey das *Grundcapital*, hingelegt wird, ſo kann erſtlich die Perſon A davon, ſo lange ſie lebt, die Zinſen 1 heben, und wenn A ſtirbt in dem Termin, da die Rente empfangen iſt, ſo bleibt für B daſſelbige Capital zurück und bringt dem B die Zinſen 1 in dem nächſtfolgenden Termin.

Auf

Auf gleiche Art verhält es ſich mit jeder andern Summe. Wenn A ihre Zinſen lebenswierig genieſet, ſo bleibt bey dem Tode von A daſſelbige Capital für die Erben.

Daraus folget unmittelbar, daſs wenn B, an ſtatt den Tod von A abzuwarten, ſogleich den Wehrt einer den Zinſen der Summe gleichen Leibrente auszahlt, ſo könne es die ganze Summe ſogleich baar in Empfang nehmen.

Der baare Wehrt einer künftig bey dem Tode von A zu empfangenden Summe iſt alſo ſo groſs als dieſe Summe ſelbſt, weniger dem baaren Wehrt der den Zinſen gleichen Leibrente.

Es ſey die zu empfangende Summe p, der baare Wehrt einer den Zinſen von p, als Capital gleichen Leibrente $\lambda\overline{a}$, ſo iſt $p - \lambda\overline{a} = pT$, wenn T ſo viel iſt als der Wehrt einer Erbſchaft 1. §. 59.

99.

Zuſatz 1. Daraus folgt dann, daſs der baare Wehrt der Erbſchaft 1 ſey $1 - \frac{\lambda\overline{a}}{p}$.

Wenn p das Grundcapital iſt, ſo iſt $\lambda\overline{a}$ der Wehrt der Leibrente 1.

Die Erbſchaft iſt einerley mit einer beym Tode einer Perſon zahlbaren Summe, davon die Wehrte durch die XXI^ſte^ Tabelle gefunden werden. Die *Süſsmilchiſche* Sterblichkeitsordnung und 4 Proc. Zinſen vorausgeſetzt.

100.

Anmerkung 1. Dieser Satz wird gebraucht zur Berechnung der Einsätze in *Todtencassen*, das ist, der baaren Wehrte einer Summe, welche bey dem Tode einer Person ausgezahlet wird. Eine solche Summe kommt auch vor unter dem Namen einer *Assuranz des Lebens*. Es ist *eine Erbschaft, die einem andern bey dem Tode einer Person zufällt.*

Ex. A ist 50 Jahr alt, und geniesst die jährlichen Zinsen eines Capitals von 10000 Rthl., welches nach seinem Tode auf B fällt. A will die Forderung des B abkaufen, wie gros ist der jetzige Wehrt derselben? Die Zinsen des Capitals, 4 Procent gerechnet, machen 400 Rthl. Der baare Wehrt einer jährlichen Leibrente von dieser Grösse für einen Funfzigjährigen, ist 400. 10, 7961 = 4318, 44 Rthl. Folglich die Forderung des B, (der baare Wehrt seiner Erwartung) gleich 10000 Rthl. — 4318, 44 Rthl. = 5671, 56 Rthl.

101.

Anmerkung 2. Es ist einerley, ob es *eine Summe Geldes* ist, welche so gleich beym Tode einer Person ausgezahlt werden soll, oder ein *zinstragendes Capital*, oder ein *unbewegliches Vermögen*, wovon jährlich ein bestimmter Zins erhoben wird. Ist es das letztere, so bekommt der Erbe so gleich die nächstfolgenden Zinsen auf die, welche zuletzt von dem Erblasser genossen worden

worden sind. Ist es eine *Summe Geldes*, so ist *der Termin der Auszahlung die Zeit des Todes des Erblassers*, das ist, wenn auf *ganze* Jahre gerechnet wird, zugleich der Termin, in welchem dieser die letzte Jahrshebung empfangen hat.

102.

Anmerkung 3. D. *Price**) will die zwey Fälle unterschieden haben, und führt es als ein Versehen von *Simpson* und andern an, dass man auf diese Verschiedenheit nicht geachtet habe. Wenn es ein *immerwährendes*, *zinsentragendes Capital* ist, so rechnet er den Wehrt desselben für den Erben, so wie hier geschehen, nämlich

$$= r \frac{A}{r}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^2 A}{r^2} + + \right) = T \text{ (§. 59.)}$$

für das Capital 1; nicht aber so, wenns eine *baar auszuzahlende Summe Geldes* ist. In dem letzten Fall setzet er den Wehrt $\frac{T}{r}$, das ist, discontirt den auf die erste Art gefundenen Wehrt auf 1 Jahr zurück.

Es können die Bedingungen so gemacht werden, dass *Price* Recht hat. Man setze, die Casse solle nur jährlich auszahlen, also für die während des Jahrs Ab-

*) In den *Observations on reversionary Payments*, p. 34 und 291. In der neusten Ausgabe ist diese Stelle nicht verändert.

gehende nicht anders als am Ende deſſelben, ſo iſt der baare Wehrt der Summe 1, die in dem *nächſt auf den Todesfall folgenden Termin auszuzahlen iſt*,

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^{-1} A}{r^2} + + \frac{\Delta^{-x} A}{r^{x-1}} \right).$$

Allein wenn dagegen *unmittelbar beym Tode der Perſon die Auszahlung geſchehen ſoll, ſo muſs die Caſſe* auch im Anfang des Jahrs, für die im Lauf deſſelben Sterbende die Summe ſchon in Bereitſchaft haben; alſo *im Anfang der Jahre zahlen.* Folglich iſt wiederum der baare Wehrt der obigen Summe ſo groſs als T. Davon kann höchſtens der *halbjährliche Zins von der Hälfte dieſes Wehrts, auf ein halbes Jahr zurück discontirt*, abgerechnet werden, wenn man nämlich vorausſetzet, daſs die *Hälfte* der Abſterbenden in die erſte Hälfte des Jahrs, die übrigen in die letzte fallen. Alsdenn könnte die Caſſe *von dem im Anfang des Jahrs, für die im Lauf deſſelben Sterbenden, hinzulegendem Gelde, die Hälfte noch ein halbes Jahr Zinſen* tragen laſſen.

Wenn auf *jährliche* Leibrenten gerechnet, und die Zwiſchenzeit nicht in Anſchlag gebracht wird, ſo wird auch vorausgeſetzet, daſs *alle innerhalb des Jahrs Sterbende, gleich im Anfang deſſelben ſterben.* §. 39. Eine ähnliche Vorausſetzung liegt zum Grunde bey der Berechnung, wenn die Hebungen halbjährlich, vierteljährlich, und ſo ferner, ſeyn ſollen. *Was abgeht, geht ab im Anfang der Termine.* Derſelbe Grundſatz muſs

alſo

alſo auch hier beybehalten werden. Will man Zwiſchenzeiten rechnen, ſo geſchehe das wie bey den Leibrenten ſo bey den Erbſchaften. Man rechne auf augenblickliche Hebungen, ſo iſt ſicher der Termin der letzten Hebung einerley mit dem Termin der Auszahlung der Erbſchaft. In jedem Fall iſt der baare Wehrt der beym Tode zahlbaren Summe ſo groſs, als dieſe Summe ſelbſt, wenn der Wehrt der Leibrente ſo groſs als ihre Zinſen davon abgezogen wird. *)

*) *Zuſ.* §. 27.

Zusätze
zum zweyten Capitel
von Leibrenten.

I.

Beweis des Satzes §. 49.

Für das Jahr, wo $\overset{x}{-}A = o$ ist, ist auch $\Delta \overset{x}{-}A = o$.

Für das Jahr $x-1$ ist $\overset{x-1}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A$, denn es gehen alle im Anfang desselben Lebende auch sogleich ab.

Ferner ist $\overset{x-2}{-}A = \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A$, weil $\overset{x-2}{-}A - \Delta \overset{x-2}{-}A = \overset{x-1}{-}A$ ist. Also $\overset{x-2}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A$.

Ferner $\overset{x-3}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A + \Delta \overset{x-3}{-}A$; und

$\overset{3}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A + \Delta \overset{x-3}{-}A + ++ + \Delta \overset{3}{-}A$.

$\overset{2}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A + \Delta \overset{x-3}{-}A + ++ + \Delta \overset{3}{-}A + \Delta \overset{2}{-}A$.

$\overset{1}{-}A = \Delta \overset{x-1}{-}A + \Delta \overset{x-2}{-}A + \Delta \overset{x-3}{-}A + ++ + \Delta \overset{3}{-}A + \Delta \overset{2}{-}A + \Delta \overset{1}{-}A$

Folglich $\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x-1}{-}A = \Delta \overset{1}{-}A + 2\Delta \overset{2}{-}A + 3\Delta \overset{3}{-}A + + (x-1)\Delta \overset{x-1}{-}A$.

2.

Es sey M N O P G *Fig. 1. die Curve der Mortalität.* Auf der *Abscisse* A Q werden die *Jahre des Alters* genommen;

nommen; die *Ordinaten* B N, C O, D P, ſtellen die *Lebenden* vor, von dem Alter A B, A C, A D, ſo iſt $\int \frac{y\,dx}{A}$ die *mittlere Lebensdauer* auf *Augenblicke*, dx, berechnet. Dieſs *Integral* iſt $= o$, wenn $x = o$ und $y = A$ iſt.

Die Reihe $\int y\,dx$ wird auch gegeben durch $\int x\,dy$, und die *mittlere Lebensdauer* durch $\int \frac{x\,dv}{A}$, wenn nämlich, was vorher *Ordinate*, y, war, nun *Abſciſſe* iſt, und umgekehrt. Aber alsdenn werden x und y zugleich zu o, wenn das Integral $= o$ iſt. Sonſt iſt, die ganze Fläche genommen, das iſt, wenn integriret und die Integralia vervollſtändigt ſind, $\int \frac{y\,dx}{A} = \int \frac{x\,dy}{A}$. Dahin gehört der Fall im vorhergehenden §., aber es findet dieſe Gleichheit nicht überhaupt ſtatt.

3.

Zu §. 59.

Es iſt $\lambda a = \frac{1}{\overline{a}A}\left(\frac{\overline{a+1}A}{r} + \frac{\overline{a+2}A}{r^2} + + \frac{\overline{a+x}A}{r^x}\right)$

oder wenn A die Anfangszahl für das Jahr a bezeichnet,

$$\lambda \overline{a} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}A}{r^2} + + \frac{\overline{x}A}{r^x}\right).$$

Es ſey $R = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta \overline{1}A}{r^2} + \frac{\Delta \overline{2}A}{r^3} + + \frac{\Delta \overline{x}A}{r^{x+1}}\right)$.

Weil nun $^{1}A + \Delta A = {}^{0}A$

$$^{2}A + \Delta\, {}^{1}A = {}^{1}A$$

$$^{x}A + \Delta\, {}^{x-1}A = {}^{x-1}A, \text{ und}$$

$$\Delta\, {}^{x}A = {}^{x}A,$$

so ist

$$\lambda a + R = \frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} + \frac{{}^{1}A}{r^2} + \frac{{}^{2}A}{r^3} + + \frac{{}^{x}A}{r^{x+1}}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\lambda a}{r}.$$

Folglich $\lambda a \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} - R$

und $\lambda a = \frac{1}{r-1} - \frac{r.R}{r-1} = p - p.rR$

und $r\,R$ ist der *Werth der Erbschaft* $1. = T$,

4.

Zu §. 60.

Es sey

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta\, {}^{1}A}{r^2} + \frac{\Delta\, {}^{2}A}{r^3} + + \frac{\Delta\, {}^{x-1}A}{r^x} + \frac{\Delta\, {}^{x}A}{r^{x+1}} = M = A.R.$$

Ferner

$$\Delta A - \Delta\, {}^{1}A = \Delta\Delta A, \text{ also } \Delta A - \Delta\Delta A = \Delta\, {}^{1}A.$$

$$\Delta\, {}^{1}A - \Delta\, {}^{2}A = \Delta\Delta\, {}^{1}A, \text{ also } \Delta\, {}^{1}A - \Delta\Delta\, {}^{1}A = \Delta\, {}^{2}A.$$

$$\Delta\, {}^{2}A - \Delta\, {}^{3}A = \Delta\Delta\, {}^{2}A, \text{ also } \Delta\, {}^{2}A - \Delta\Delta\, {}^{2}A = \Delta\, {}^{3}A.$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$\Delta\, {}^{x}A - \Delta\, {}^{x+1}A = \Delta\Delta\, {}^{x}A, \text{ also } \Delta\, {}^{x}A - \Delta\Delta\, {}^{x}A = \Delta\, {}^{x+1}A.$$

Aber

Aber $\Delta^{\overline{x+1}}A = o$, weil $^{x+1}A = o$, alſo auch

$$\Delta^{\overline{x}}A = \Delta\,\Delta^{\overline{x}}A.$$

Noch ſey $\frac{\Delta\Delta A}{r} + \frac{\Delta\Delta^{\overline{1}}A}{r^2} + \frac{\Delta\Delta^{\overline{2}}A}{r^3} + + \frac{\Delta\,\Delta^{\overline{x}}A}{r^{x+1}} = N.$

Folglich $M - N = \frac{\Delta^{\overline{1}}A}{r} + \frac{\Delta^{\overline{2}}A}{r^2} + + \frac{\Delta^{\overline{x}}A}{r^x}$

$= r\,M - \Delta\,A.$

Alſo $(r-1)\,M = \Delta\,A - N$

$$M = \frac{\Delta A - N}{r-1}, \text{ und } \frac{M}{A} = R = \frac{\Delta A - N}{A\,(r-1)}.$$

Ferner $\lambda\overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r-1} \cdot r.\,R$ (§. 3.)

$= \frac{1}{r-1} - \frac{1}{(r-1)^2}\ r.\ \frac{\Delta A - N}{A}$

$= p - p^2.\ r.\ \left(\frac{\Delta A - N}{A}\right),$

5.

Zu §. 61.

Die Reihe N kann wiederum aus einer Reihe von $\frac{\Delta^3 A}{r} + \frac{\Delta^{3\overline{1}}A}{r^2} + \frac{\Delta^{3\overline{2}}A}{r^3} + + \frac{\Delta^{3\overline{x}}A}{r^{x+1}} = O$, gefunden werden.

Wenn $\Delta^2 A - \Delta^{2\overline{1}}A = \Delta^3 A$

$\Delta^{2\overline{1}}A - \Delta^{2\overline{2}}A = \Delta^{3\overline{1}}A$, u. ſ. f.

$\Delta^{2\overline{x}}A - \Delta^{2\overline{x+1}}A = \Delta^{3\overline{x}}A$, geſetzet wird.

Alsdenn

Alsdenn erhellet, dafs N aus O auf dieselbige Art bestimmt werde, wie vorher M aus N. Also ist

$$N = \frac{\Delta^2 A - O}{(r-1)}.$$

Folglich $M = \frac{\Delta A - N}{r-1} = \frac{\Delta A}{r-1} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^2} + \frac{O}{(r-1)^2}$

und $\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{A} \cdot r, \left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + \frac{O}{(r-1)^3}\right)$

Noch weiter. Wenn P eine ähnliche Summe von $\frac{\Delta^3 A}{r} - \frac{\Delta^3 A}{r} = \frac{\Delta^4 A}{r}$, u. s. f. ist, so wird O aus P, wie N aus O. Also wird

$$M = \frac{\Delta A}{r-1} - \left(\frac{\Delta^2 A}{(r-1)^2} + \frac{\Delta^3 A}{(r-1)^3} - \frac{\int P}{(r-1)^3}\right)$$

Und die *Leibrente*, $\lambda \overline{a}$, ist

$$= \frac{1}{r-1} - \frac{r}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + \frac{\Delta^3 A}{(r-1)^4} - \frac{\int P}{(r-1)^4}\right).$$

Ueberhaupt

$$\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{r}{A}\left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + - \right.$$

$$\left. + - \left(\frac{\Delta^{n-1} A}{(r-1)^n} - \int \frac{\Delta^n A}{(r-1)^n}\right)\right)$$

wo $\int \Delta^n A$ die *Summe der letzten discontirten Differenzen* ist, die von der Ordnung n sind,

$\frac{\Delta^n A}{r} + \frac{\Delta^{n-1} A}{r^2} + + \frac{\Delta^{n-x} A}{r^x}$, wenn die *Decremente* als die *ersten Differenzen* angesehen werden.

6.

Setzet man ſtatt der Leibrentenreihe

$\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}A}{r^2} + + \frac{\overline{x}A}{r^x} \right)$ die folgende:

$\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{A}{r} + \frac{\overline{1}A}{r^2} + \frac{\overline{2}A}{r^3} + + + \frac{\overline{x}A}{r^{x+1}} \right) = \frac{\overline{\lambda_3} + 1}{r} = L,$

ſo wird L aus M, auf eine ähnliche Art wie M aus N, wie N aus O u. ſ. f. Es iſt nämlich

$$L = \left(\frac{A - M}{r - 1} \right) \frac{1}{A},$$

$$M = \frac{\Delta A - N}{r - 1},$$

$$N = \frac{\Delta^2 A - O}{r - 1} \text{ u. ſ. f.}$$

Folglich $L = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{A}{r-1} - \frac{\Delta A}{(r-1)^2} + \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + - \right.$

$$\left. \left(\frac{\Delta^{n-1} A}{(r-1)^n} - \int \frac{\Delta^n A}{(r-1)^n} \right) \right).$$

7.

Zu §. 61.

Noch eine leichtere Methode, die *Leibrenten* zu finden, iſt folgende, nur daſs man keine ſo bequeme allgemeine Vorrichtung dabey für alle Alter anbringen kann. Man multiplicire die auf einander folgende Zeitrenten $\int \frac{1}{r}$, $\int \frac{1}{r^2}$, $\int \frac{1}{r^3}$, u. ſ. f. in der III^ten

Tabelle

Tabelle bis $\int \frac{1}{r^{x-1}}$, wenn x die *Altersergänzung* ist, jede in die dazu gehörigen *Decremente*, welche nur kleine Zahlen sind, und zwar $\int \frac{1}{r}$ in $\Delta^{-1}A$, das ist, in das Decrement des *zweyten* Jahrs. Ferner $\int \frac{1}{r^2}$ in $\Delta^{-2}A$ und so fort. So ist

$$\Delta^{-1}A \int \frac{1}{r} + \Delta^{-2}A \int \frac{1}{r^2} + \Delta^{-3}A \int \frac{1}{r^3} + + \Delta^{-x-1}A \int \frac{1}{r^{x-1}} = A\,\lambda\,\overline{a}.$$

Es ist nämlich, (weil $^{-x}A = 0$), $\frac{^{-x+1}A}{r^{x-1}} = \frac{\Delta^{-x-1}A}{r^{x-1}}$,

$$\frac{^{-x-2}A}{r^{x-2}} = \frac{^{-x-1}A}{r^{x-2}} + \frac{\Delta^{-x-2}A}{r^{x-2}} = \frac{\Delta^{-x-1}A}{r^{x-2}} + \frac{\Delta^{-x-2}A}{r^{x-2}},$$

$$\frac{^{-x-3}A}{r^{x-3}} = \frac{^{-x-2}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta^{-x-3}A}{r^{x-3}} = \frac{\Delta^{-x-1}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta^{-x-2}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta^{-x-3}A}{r^{x-3}},$$

$$+ \quad + \quad + \quad +$$

$$\frac{^{-2}A}{r^2} = \frac{\Delta^{-x-1}A}{r^2} + \frac{\Delta^{-x-2}A}{r^2} + \frac{\Delta^{-x-3}A}{r^2} + + + \frac{\Delta^{-2}A}{r^2}.$$

und

$$\frac{^{-1}A}{r} = \frac{\Delta^{-x-1}A}{r} + \frac{\Delta^{-x-2}A}{r} + \frac{\Delta^{-x-3}A}{r} + + \frac{\Delta^{-2}A}{r} + \frac{\Delta^{-1}A}{r}.$$

Folglich $\frac{^{-1}A}{r} + \frac{^{-2}A}{r^2} + + + \frac{^{-x-1}A}{r^{x-1}} + \frac{^{-x}A}{r^{x-2}} = A.\,\lambda\,\overline{a}$

$$= \Delta^{-1}A \int \frac{1}{r} + \Delta^{-2}A \int \frac{1}{r^2} + \Delta^{-3}A \int \frac{1}{r^3} + + + \Delta^{-x-1}A \int \frac{1}{r^{x-1}}.$$

Auch

Auch ist

$$\frac{\overline{-}^{1}A}{r} = \frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r}$$

$$\frac{\overline{-}^{2}A}{r^2} = \frac{A}{r^2} - \frac{\Delta A}{r^2} - \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{r^2}$$

$$\frac{\overline{-}^{3}A}{r^3} = \frac{A}{r^3} - \frac{\Delta A}{r^3} - \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{r^3} - \frac{\Delta \overline{-}^{2}A}{r^3}$$

$$\frac{\overline{-}^{x}A}{r^x} = \frac{A}{r^x} - \frac{\Delta A}{r^x} - \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{r^x} - \frac{\Delta \overline{-}^{2}A}{r^x} - \cdots - \frac{\Delta \overline{-}^{x-1}A}{r^x}$$

Daher

$$A.\lambda \overline{-}^{a} = A\int\frac{1}{r^x} - \Delta A\int\frac{1}{r^x} - \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{r}\int\frac{1}{r^{x-1}}$$

$$- \frac{\Delta \overline{-}^{2}A}{r^2}\int\frac{1}{r^{x-2}} - \cdots - \frac{\Delta \overline{-}^{x-1}A}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit dem Vorhergehenden, so bekommt man

$$A\int\frac{1}{r^x} = \Delta A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overline{-}^{1}A\left(\int\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\int\frac{1}{r^{x-1}}\right)$$

$$+ \Delta \overline{-}^{2}A\left(\int\frac{1}{1^2} + \frac{1}{r^2}\int\frac{1}{r^{x-2}}\right) + +$$

$$\Delta \overline{-}^{x-1}A\left(\int\frac{1}{r^{x-1}} + \frac{1}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}\right).$$

$$= \Delta A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overline{-}^{1}A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overline{-}^{2}A\int\frac{1}{r^x} + +$$

$\Delta \overline{-}^{x-1}A\int\frac{1}{r^x}$ wie sonst auch unmittelbar klar ist. Denn es ist überhaupt $\int\frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}}$.

8.

Beweis der Sätze von Moivrischen Leibrenten.
Zu §. 63.

Es ist $\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{1}A}{r} + \frac{\overline{2}A}{r^2} + + \frac{\overline{x}A}{r^x}\right)$

wo x die *Altersergänzung ist.* Aber nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* ist

$$\overline{1}A = A - \Delta A$$
$$\overline{2}A = A - 2.\Delta A$$
$$\overline{x}A = A - x.\Delta A.$$

Folglich $\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r} + \left(\frac{A - 2.\Delta A}{r^2}\right) + + \left(\frac{A - x.\Delta A}{r^x}\right)\right) = \int\frac{1}{r^x} - \frac{\Delta A}{A}.\int\frac{x}{r^x}$, und weil $A = x.\Delta A$, so ist $\frac{\Delta A}{A} = \frac{p}{x}$,

$$\lambda \overline{a} = \int\frac{1}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x}{r^x}.$$

Allein $\int\frac{x}{r^x} = r\,p\int\frac{1}{r^x} - \frac{p\,x}{r^x}$. (*Zusätze zu Cap. I. §. 14.*)

Daher $\int\frac{1}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x}{r^x} = p - \frac{p}{r^x} - \frac{pr}{x}\int\frac{1}{r^x} + \frac{p}{r^x}$

$= p - \frac{pr}{x}\int\frac{1}{r^x}$.

9.

Zu §. 65 und 66.

Nach dem hier angenommenen Gesetz der *Decremente*, wird zuerst die *mittlere Lebensdauer* für jedes gegebene Alter, von 15 Jahren und darüber, auf folgende Weise gefunden. Es ist, wenn $E\overline{}_a$ diese *mittlere Lebensdauer* anzeigt

$$E\overline{}_a = \frac{(\overline{\overline{}}^{a+1}A + \overline{}^{a+2}A + \ldots + \overline{}^{66}A)}{\overline{}^{a}A} + \frac{(\overline{}^{67}A + \ldots + \overline{}^{x}A)}{\overline{}^{a}A} + \tfrac{1}{2}.$$

Hier ist $\overline{}^{a}A$ die *Zahl der Lebenden* vom Alter a, oder die *Anfangszahl* für das *gegebene Alter*.

Dieser allgemeine Ausdruck besteht aus zwey Theilen. In jedem stehen *die Decremente in einer arithmetischen* Reihe, davon die erste bis aufs Jahr 65 — 66; die zwote von da bis 95 — 96 geht. Das letzte Jahr ist noch für sich ein eigener nicht sehr beträchtlicher Theil.

Es sey das *erste Decrement* im $(a+1)^{ten}$ Jahr d; die *beständige Differenz* dieser Decremente in der ersten Reihe sey δ, $= 1$.

Das *erste Decrement* in der *zwoten Reihe* sey d' und die *beständige Differenz* dieser Decremente $\delta' = 2\frac{1}{2}$.

Weil nun

$$\overline{\overline{}}^{a+1}A = \overline{}^{a}A - d$$
$$\overline{\overline{}}^{a+2}A = \overline{}^{a}A - 2.d - \delta$$
$$\overline{\overline{}}^{a+3}A = \overline{}^{a}A - 3.d - 3.\delta$$
$$\overline{\overline{}}^{a+4}A = \overline{}^{a}A - 4.d - 6.\delta$$

und so ferner, so dass die Factores von δ die *Trigonalzahlen* sind. ~~Dies giebt das~~ *allgemeine Glied der Reihe* x gehe 2 : 1

$$\frac{{}^{a}\overline{A} - x\delta}{{}^{a}\overline{A}} \cdot \frac{x.(x-1)\delta.}{2\,{}^{a}\overline{A}} = \frac{{}^{a}\overline{A} - x(\delta - \frac{1}{2}\delta) - x^2\frac{\delta}{2}}{{}^{a}\overline{A}}.$$

Die *Summe* des ersten Theils von $E\overline{a}$ ist also

$$= 66 - a - \frac{(d - \frac{1}{2})\,S\overline{66-a}}{{}^{a}\overline{A}} - \frac{\frac{1}{2}\,S\,66-a)^2}{{}^{a}\overline{A}}.$$

Für das *zwote* Stück, $\frac{{}^{67}\overline{A} + {}^{68}\overline{A} + + {}^{96}\overline{A}}{{}^{a}\overline{A}}$

ist gleichfalls ${}^{67}\overline{A} = {}^{66}\overline{A} - d'$

$${}^{68}\overline{A} = {}^{66}\overline{A} - 2.d' + \delta'$$

$${}^{69}\overline{A} = {}^{66}\overline{A} - 3.d' + 3.\delta'.$$

Daher für dieses Stück der *Terminus generalis*

$$= \frac{{}^{66}\overline{A} - x\,d' + \frac{(x.(x-1)).\delta'}{2}}{{}^{a}\overline{A}}.$$

Die *Summe* davon ist, (weil $d' = 85\frac{1}{2}$, und $\delta' = -2\frac{1}{2}$)

$$= \frac{30.{}^{66}\overline{A} - (85\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4})\,S\overline{30} + 1\frac{1}{4}.\,S\overline{30^2}}{{}^{a}\overline{A}}.$$

Also *beyde Theile zusammen* geben

$$E\overline{a} = 66 - a - \frac{(d - \frac{1}{2})\,S\overline{60-a} - \frac{1}{2}\,S(66-a)^2}{{}^{a}\overline{A}}$$

+

$$+\frac{1}{{}^{a}_{-}A}\left({}^{66}_{-}A.30-(85\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{4})\,S\overline{30}+1\tfrac{1}{4}\,S\overline{30}^{2}\right)$$

$$+\frac{7\frac{1}{2}}{{}^{a}_{-}A}+\tfrac{1}{2}.$$

Wenn $a = 66$, oder gröſser, ſo fällt das erſte Stück ganz weg. Wenn a gröſser als 66, ſo kommt im zweyten Stück ſtatt 30, das *Complement des Alters* zu 96 Jahr, und ſtatt ${}^{66}_{-}A$ kommt ${}^{a}_{-}A$. Für $a = 66$ wird das *künftige mittlere Leben* $= 9,97$; was nach der unveränderten *Süſsmilchiſchen* Tabelle $= 9,50$ iſt.

10.

Die Formel für die *Leibrente* nach derſelben Tabelle entſteht auf eine ähnliche Art.

Der *Terminus generalis* des erſten Stücks iſt

$$=\frac{{}^{a}_{-}A-x\,d-\frac{x.(x-1)\,\delta}{2}}{{}^{a}_{-}A\,r^{x}},\ (\text{wo } \delta = 1),$$

$$=\frac{{}^{a}_{-}A-(d-\tfrac{1}{2})\,x-\tfrac{1}{2}x^{2}}{{}^{a}_{-}A.\,r^{x}}.$$ Alſo iſt die *Summe* davon bis aufs 67ſte Jahr

$$=\int\frac{1}{r^{\infty-a}}-\frac{1}{{}^{a}_{-}A}\left((d-\tfrac{1}{2})\cdot\int\frac{\overline{66-a}}{r^{66-a}}+\frac{1}{2}\int\frac{(66-a)^{2}}{r^{66-a}}\right)$$

Das zwote Stück hat zum *Terminus generalis*

$$\frac{{}^{66}_{-}A-(d+1\tfrac{1}{4})\,x+1\tfrac{1}{4}x^{2}}{{}^{a}_{-}A.\ r^{66-a}\ .\ r^{x}}.$$

Daher ist die ganze Summe, bis $x = 30$,

$$= \frac{{}^{66}A\int\frac{1}{r^{30}} - (85\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4})\int\frac{30}{r^{30}} + 1\tfrac{1}{4}\int\frac{30^2}{r^{30}}}{{}^{a}A.\ r^{66-a}}.$$

Der unbeträchtliche Theil für das letzte Jahr ist

$$= \frac{7\tfrac{1}{2}}{{}^{a}A\, r^{66-a}}.$$

Folglich

$$\lambda\,\overline{a} = \left({}^{a}A\int\frac{1}{r^{66-a}} - (d-1:2)\int\frac{\overline{66-a}}{r^{66-a}}\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}\int\frac{(66-a)^2}{r^{66-a}}\right) : {}^{a}A + \frac{1}{{}^{a}A\, r^{66-a}}.$$

$$\left({}^{66}A\int\frac{1}{r^{30}} - (85\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4})\int\frac{30}{r^{30}} - 1\tfrac{1}{4}\int\frac{30^2}{r^{30}}\right)$$

$$+ \frac{7\tfrac{1}{2}}{A.r^{96-a}}.$$

Ist $a = 66$, so fällt das erste Stück weg, und ist a gröfser, so wird statt 30 das *Complement des Alters* gesetzet, und für ${}^{66}A$ kommt die Anfangszahl ${}^{a}A$.

II.

Von der Sterblichkeitslinie.

Wenn in *Fig. 1.* die gerade Linie A G als eine *Abscissenlinie* das *Alter* anzeiget, und die senkrechten dazu gehörigen *Ordinaten*, die *Zahl der in jedem Alter Lebenden*, so heifst die Linie M N P G die *Sterblichkeitslinie.*

Nach

Nach *Moivres* Hypotheſe iſt ſie eine *gerade Linie*, und ſchneidet beym Alter von 86 Jahren die *Abſciſſe*. Es ſey GA und GE, GD, GB die *Abſciſſe* von G an, als die *Ergänzungen des Alters* = x, die *Ordinate*, y, ſo iſt nach *Moivre* $dx = n\,dy$ und $x = ny$.

Man kann und muſs annehmen, daſs ſie eine *krumme Linie* ſey. *D' Alembert* und *Lambert* haben Unterſuchungen darüber angeſtellt. Der letztere gab eine Gleichung an, nach welcher ſie aus einer *paraboliſchen* und *logarithmiſchen* Linie zuſammengeſetzt ſeyn ſoll. *) Aber er hatte jene blos als zunächſt zutreffend, aus der Londoner Tabelle durch Verſuche herausgebracht, und in einem Briefe an *Fontana* vom 16. Mart. 1776 **) ſcheint er ſelbſt ſich kein Genüge hierin gethan zu haben.

So viel ſieht man wohl, die Curve muſs *hyperboliſch* ſeyn, und die gerade Linie zur *Aſymptote* haben. Sie kann dieſe nicht ſchneiden, weil ſie an der andern Seite keine *negative Ordinaten* haben kann. Aber zugleich iſt auch klar, ſie kann keine *Aſymptote* haben, die durch die Gleichung $xy = c$ ausgedruckt würde, ſondern nur eine von einer höhern Ordnung $x^n y = c$. Denn aus jenem würde folgen, daſs unter der ganzen Menge von

*) *Lamberts Beyträge.* III. Theil. §. 483.

**) Dieſer Brief iſt abgedruckt in *Fontana's Dottrina degli Azzardi. Diſcorſo Prelim.* p. LV.

Menschen auf der Welt, Einer oder der Andere jedes noch so hohe Alter erreichen müsste. Wie klein die zu $x = 1000$ Jahren gehörige *Ordinate* auch seyn mögte, so könnte sie bey einer gröfsern Anfangszahl $= 1$ werden, und für eine *unendlich* grofse Anfangszahl würde y für jedes noch so grofse x endlich seyn. Diefs folgt aber nicht, wenn x^n eine höhere Potenz von x, die Asymptote also von einer höhern Ordnung ist.

Ferner zeigen sich folgende Eigenschaften dieser Linie, die merkwürdig sind, ob sie gleich ihre Natur nicht völlig bestimmen.

1) *Die Sterblichkeit*, oder das Verhältnifs der in jedem Jahr Abfterbenden zu den Lebenden im Anfang der Jahre, oder $\frac{dy}{y} = s$ *nimmt ab* von dem ersten Jahre des Alters an, bis auf ein gewisses Alter vom zehnten, eilften, zwölften Jahre; *nachher nimmt sie immerfort wieder zu*, bis sie zuletzt $= 1$ wird. Diefs ist die Grenze, die sie nicht ganz erreicht, wenn die Curve asymptotisch ist, der sie sich aber unendlich nähert. So ist einmal $s = \frac{dy}{y}$ ein Minimum. Die Tabellen stimmen zwar hierin nicht völlig zusammen; aber bey den meisten sind die Abweichungen entweder so unerheblich, oder fallen so, dafs man geneigt werden mufs, sie nicht so wohl in der Natur der Sache, als in der Unvollständigkeit der Verzeichnisse selbst zu suchen. Die *Süfsmilchische* Tafel zeiget die bemerkte Regel am deutlichsten.

lichſten. Denn wenn auch hier Jahre zwiſchen andern vorkommen, die Ausnahmen machen, ſo iſt es faſt einleuchtend, daſs dieſs an den zu klein genommenen Zahlen in der Tabelle liege. Ein anders iſt es, ob nicht, wie die Abnahme der Sterblichkeit in den erſten Jahren, ſo die *Zunahme* in der Folge ſelbſt, in einigen Jahren vorzüglich viel gröſser ſey als in andern? Sind gewiſſe Perioden im Leben vorzüglich gefährlich, (denn die Vorurtheile von beſondern *Stufenjahren* werden durch die Tabellen widerlegt,) ſo kann es darin beſtehen, daſs alsdenn die Sterblichkeit auf einmal ſchneller zunimmt, ohne daſs ſie eben gröſser ſeyn dürfe, als in den folgenden Jahren.

2) Eben ſo *die mittlere Lebensdauer. Dieſe nimmt zu* in den erſten Jahren; *wird ein Gröſstes*, und *nimmt alsdenn beſtändig ab*, bis o, welches ihre unerreichbare Grenze iſt. Sie iſt $\frac{S.ydx}{y}$. Dieſs wird einmal ein *Maximum*, oder $d\frac{S.ydx}{y}$ wird einmal $= o$.

3) *Die jährlichen Decremente* nehmen (wenige unbeträchtliche Abweichungen bey Seite geſetzt) *anfangs ab* bis zum zehnten, eilften, zwölften Jahr; *dann wachſen ſie wiederum* bis zwiſchen 60 und 70, nach *Süſsmilch*, *und von da an nehmen ſie von neuem ab.* Die Decremente werden alſo einmal ein *Minimum* und einmal ein *Maximum.* Das iſt, die Aequation $\frac{ddy}{dx^2} = o$ muſs *zwo reelle* Wurzeln haben.

Diese Eigenschaften führen aber zu keiner bestimmten Gleichung, ob man gleich so viel leicht sieht, dass die Linie *hyperbolischer* oder *logarithmischer Art* seyn müsse. In dem Jahr, wo die anfangs abnehmende Sterblichkeit am kleinsten ist, kann man die Linie theilen, und sie aus *zweyen Stücken* logarithmischer Linien zusammen setzen. Für den Theil von da an bis ans Ende wird die Voraussetzung, *dass die Sterblichkeit in dem gleichen Verhältniss der Jahre zunehme, mit den bisher bekannten Tabellen am meisten übereinstimmen.*

Nach dieser Voraussetzung sey die Sterblichkeit für das Jahr, wo sie ein *Minimum* ist s, für die folgenden Jahre also $= s + nx$, wenn x die Jahre ausdrücket.

Es ist n eine beständige Gröse. Es sey nun die Anfangszahl a, die Zahl der Gestorbenen z, so ist die Sterblichkeit für das Jahr x, oder $\frac{dz}{a-z} = (s + nx)\,dx$, wo dx eine beständige Gröse ist; so wie auch s. Dies ist eine Gleichung für eine *logarithmische* Linie. Wird $a - z = y$ gesetzt, da denn y die Zahl der *Lebenden* ist, so wird $-log.\ y = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x$.

Wenn $x = o$, so ist $y = a$. Folglich die *vollständige Gleichung*

$$log.\ a - log.\ y = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x, \text{ oder}$$

$$log.\ \frac{a}{y} = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x.$$

Für

Für $y = o$, das ist, für den Fall, wenn alle weggestorben seyn sollen, ist $\log. \frac{a}{y} = \log. o = \infty$, also x ein *unendliches*. Das ist, die Linie muss angesehen werden als eine *asymptotische*, und zwar nach dem obigen als eine solche, deren Asymptote von einer höhern Ordnung ist.

Ueberhaupt aber ist in jeder Linie, wenn z die Zahl der Verstorbenen nach x Jahren ist, und A die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter a, der baare *Wehrt der Leibrente*, oder

$$\lambda \overline{a} = \int \frac{(A-z)}{A.r^x}\, dx = \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{A} \int \frac{z\,dx}{r^x}.$$

Ingleichen ist die *mittlere Lebensdauer* oder

$$E\overline{a} = x - \frac{1}{A} \int z\, dx.$$

12.

Ferner ist in jeder Sterblichkeitslinie die *mittlere Lebensdauer* von der *wahrscheinlichen* verschieden, ausgenommen, wenn die Linie eine gerade ist. Dieß ist eine Folge aus der Natur einer jeden Cürve überhaupt. *Lambert* gab davon schon einen allgemeinen Beweis.*) Es läßt sich kurz so zeigen. Es sey *Fig. 2.* $EG = x$ das *Complement des Alters*, $EM = y$, die *Summe der Lebenden im Alter* E; so ist nach dem obigen die *mittlere Lebensdauer* $= \int \frac{y\,dx}{y}$. Diese sey $= EF$. Soll

*) *Beyträge* 3ter Theil. p. 503.

nun EF zugleich das *wahrscheinliche künftige Leben seyn*, so ist die Applicata in F, oder $FV = \frac{1}{2} ME$. Es sey aber überhaupt $x = a y^n + b y^m + +$, so ist $y dx = n a y^n dy + m b y^m dy + +$ und

$$\frac{S. y dx}{y} = \frac{n}{n+1} \cdot a y^n + \frac{m}{m+1} \cdot b y^m + + = EF,$$

der *mittlern Lebensdauer*. Es sey auch GF, x' wozu die Ordinate y' gehöret, so ist $x' = a' y'^n + b y'^m + + +$. Soll nun $y' = \frac{1}{2} y$ seyn, so ist

$$x' = a \left(\frac{1}{2} y\right)^n + b \left(\frac{1}{2} y\right)^m + +$$

Daher

$$x - x' = EF = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) a y^n + \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) b y^m + +$$

Dieser letzte Wehrt von EF mit dem ersten verglichen, erfordert, dass $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^n}$ sey.

Aber daraus folgt $\frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und $n+1 = 2^n$, welche Gleichung nur für zwey Fälle mögliche Wehrte giebt, nämlich für $n = o$ und $n = 1$.

Dieselbigen Wehrte kommen auch für m.

Also ist entweder $x = a+b+c++$ was nicht angeht, oder $x = (a+b+c++) y$, welches eine Gleichung für die gerade Linie ist. Man sehe auch die Beweise davon beym *Lambert* *) und *Florencourt.* **)

Wenn

*) *Beyträge* 3 Theil, p. 501 und folg.

**) *Abhandlung aus der politischen Arithmetik.* p. 78 und folg.

Wenn die Linie *gerade* ist, so erfolgt das Absterben *gleichförmig*. Dass in diesem Fall auch die *mittlere Lebensdauer* mit der *wahrscheinlichen* zusammen fallen müsse, kann sehr leicht erwiesen werden. Denn nach der Voraussetzung ist

$\overset{1}{-}A = A - \Delta A$; $\overset{2}{-}A = A - 2.\Delta A$, und

$\overset{n}{-}A = A - n\Delta A$; $\overset{x}{-}A = A - x.\Delta A$,

Folglich ist die *mittlere Lebensdauer* oder

$$E\overline{a} = \frac{A - \Delta A + A - 2\Delta A + + A - x\Delta A}{A} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{xA - \frac{(x+1)x}{2}.\ \Delta A}{A} + \frac{1}{2}.$$

und (weil $A = x.\Delta A$) auch $= x - \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$.

Hier ist x die *Altersergänzung*. Die *wahrscheinliche Dauer* ist $= n$ wenn $A - n\Delta A = \frac{1}{2}A$, also $n = \frac{x}{2}$ ist.

Indessen ist der Unterschied zwischen beyden nicht sehr gross. Dass auch ein Mann wie *Dan. Bernoulli* *) (und dazu um 1760, da schon *Simpsons Select Exercises* 1752 gedruckt sind,) glauben können, es liege blos an Fehlern der Tabellen, wenn beyde nicht gleich gros herauskommen, (bey *Seyberth* und andern, die diese Meinung gehabt, ist es so befremdend nicht) gehört zu den mehreren Fehlschlüssen in diesem Theil der Arithmetik, wofür sich auch die grösten Männer nicht gehütet

*) *Memoires de l' Academie des Sciences.* Paris 1760.

gehütet haben. Das vorlauffende allgemeine Raisonnement, was man als eine Art von Ueberschlag in Gedanken zu machen pflegt, hat hier mehrmalen sehr irre geführt. Auch *Lambert* *) scheint noch die Leibrenten mit den Zeitrenten für die mittlere Lebensdauer verwechselt zu haben, wie *Seyberth* und *Departieux* es gethan hatten. Ein ähnlicher Fehlschluss von *Moivre* kommt unten vor.

13.

Zu §. 67.

Sollen die *Theile des Jahrs*, die der Rentenier noch durchlebet, ausser den *ganzen* Jahren gerechnet, dabey aber die dafür zu zahlende Rente nicht eher als am Ende des Jahrs erleget werden, so wird das zu dem baaren Wehrt der Leibrente auf volle Jahre noch hinzukommende so berechnet.

1) Wenn nur vollendete *halbe* Jahre gerechnet werden, so wird die Hälfte der in einem Jahr Sterbenden auf den Anfang des Jahrs gesetzet, und dafür nichts weiter bezahlet; die andere Hälfte aber als in der Mitte des Jahrs sterbend angenommen. Folglich ist dafür noch an diese letzteren eine halbjährige Hebung zu erlegen. Diese macht für das *erste* Jahr $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta A}{r}$, für das zweyte $\frac{1}{4}\frac{\Delta\frac{1}{r}A}{r^2}$, und so ferner.

Folglich

*) *Beyträge* 3 Theil. §. 34. p. 499.

Folglich für alle Jahre zuſammen

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta A}{r}+\frac{\Delta^{-1}A}{r^2}++\right)=\frac{1}{4r}\left(1-\frac{\lambda_a}{p}\right)=\frac{1}{4}\frac{T}{r}=\frac{1}{4}R.$$

§. 3.

Soll das, was für die Zwiſchenzeiten fällt, ſogleich *beym Tode des Renteniers* bezahlet werden, ſo beträgt ſolches für das erſte Jahr $\frac{1}{4}\frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{2}}}$; für das zweyte $= \frac{1}{4}\frac{\Delta^{-1}A}{r^{\frac{1}{2}}}$ u. ſ. f. Das iſt für alle Jahre zuſammen $= \frac{1}{4}\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$. T.

Werden die *halbjährigen* Renten in dieſem letztern Fall gerechnet zu $\frac{r-1}{2}$, ſo beträgt das am Ende des erſten Jahrs mehr zu zahlende

$$\frac{1}{4}\Delta A+\frac{r-1}{4}\Delta A=\frac{r+1}{8}.\ \Delta A.$$

davon der baare Wehrt $\frac{r+1}{8.\ r}\Delta A$ iſt. Für das zweyte Jahr bekommt man $\frac{r+1}{8}.\frac{\Delta^{-1}A}{r^2}$ u. ſ. f.

Folglich für alle Jahre zuſammen $\frac{r+1}{8}.\ \frac{T}{r}$.

2) Sollen *Vierteljahre* gerechnet werden, ſo iſt am Ende des erſten Jahrs nachzuzahlen,

$$\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\Delta A+\frac{2}{4}\Delta A+\frac{1}{4}\Delta A\right)=\frac{3}{8}\Delta A,$$

davon der baare Wehrt $\frac{3}{8}.\ \frac{\Delta A}{r}$ iſt.

Denn

Denn $\frac{3}{4}\,\Delta\,A$ lebt noch ein Vierteljahr; dann

$\frac{2}{4}\,\Delta\,A$ auch ein Vierteljahr, und endlich

$\frac{1}{4}\,\Delta\,A$ noch ein Vierteljahr.

Auf alle Jahr zusammen macht dieſs $\frac{3}{8}\cdot\frac{T}{r}$.

3) Wenn auf $\frac{1}{n}^{\text{tel}}$ *Theile* des Jahrs zu rechnen iſt, ſo wird die Zulage für das erſte Jahr

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)}{n}\cdot\Delta A + \frac{n-2}{n}\cdot\Delta A + + \frac{\Delta A}{n}\right)$$

$$= \frac{n.\,\overline{n-1}}{2\,n^2}\cdot\Delta A,$$ davon der baare Wehrt

$$= \frac{n.\,(n-1)}{2\,n^2}\cdot\frac{\Delta A}{r}$$ iſt. Dieſs für alle Jahr zuſammen macht $\frac{n.(n-1)}{2\,n^2}\cdot\frac{T}{r}$ das iſt $= \frac{1}{2}\,\frac{T}{r}$, wenn n unendlich groſs iſt.

Sollen dieſe Theile der Renten *ſogleich bey dem Tode des Renteniers* bezahlt werden, ſo iſt für das erſte Jahr zuzulegen

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{n-2}{n}\cdot\frac{\Delta A}{r^{\frac{2}{n}}} + + \frac{\Delta A}{r^{1}}\right).$$

Wenn n unendlich groſs iſt, ſo iſt das ſo viel als eine $\frac{1}{n}^{\text{tel}}$ jährige Rente, deren Wehrt $\frac{1}{n}$ iſt. Der baare Wehrt derſelben verhält ſich zum baaren Wehrt der am Ende des Jahrs zahlbaren Rente 1, wie $p' : p$. (*Zusätze zum erſten Cap.* §. 9.) $= \frac{1}{\log.\,nat.\,r} : \frac{1}{r-1}$. Folglich

iſt

ist das zuzulegende Stück für das erste Jahr $= \frac{p'}{p} \cdot \frac{\Delta A}{r}$.

So für das zweyte Jahr $\frac{p'}{p} \cdot \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r}$, u. s. f. Also für alle Jahr zusammen $\frac{p'}{pr} \cdot T$, was sehr wenig mehr als $\frac{T}{r}$ oder den auf Ein Jahr zurück discontirten Wehrt der Erbschaft 1, ausmacht.

14.

Zu §. 68.

Von halb- und vierteljährlich zahlbaren Leibrenten.

Wenn *jedes halbe* Jahr die Leibrente $\frac{1}{2}$ bezahlet wird, so wird selbige auch noch an *die Hälfte der im Lauf eines jeden Jahrs Sterbenden bezahlet*, folglich ist die Ausgabe auf ihren baaren Wehrt reducirt, am Ende des ersten halben Jahrs

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{\frac{1}{2}}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\overset{1}{-}A + \frac{1}{2} \Delta A}{r^{\frac{1}{2}}} \right);$$

Am Ende des *zweyten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{r^1},$$ des *dritten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \frac{\overset{1\frac{1}{2}}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A} \frac{\left(\overset{\frac{1}{2}}{-}A + \frac{1}{4} \Delta \overset{1}{-}A\right)}{r^{1\frac{1}{2}}}$$

des *vierten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} \cdot$$

und

und für das *letzte halbe* Jahr, (oder das $(2x-1)^{te}$ *halbe* Jahr.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{x-1}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} A \frac{\left(\overset{x}{-}A + \frac{1}{2}\Delta\overset{x-1}{-}A\right)}{r^{x-\frac{1}{2}}}$$

Der folgende Termin für das $2x^{te}$ halbe Jahr ist

$$\frac{1}{2}\frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} = 0.$$

Alſo iſt der ganze baare Wehrt S in *halbjährlichen* Zahlungen

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{1}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + + \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\overline{a} + \frac{1}{2} \cdot r^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} r^{\frac{1}{2}} R.$$

wenn $R = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r^2} + ++ \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^x}\right)$

wie vorher geſetzet wird.

Und weil $1 - (r-1)\lambda\overline{a} = r R$ (*Zuſätze zu Cap. II.* §. 3.) alſo $\frac{1}{4r^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4} r^{\frac{1}{2}}\lambda\overline{a} + \frac{1}{4r^{\frac{1}{2}}} \cdot \lambda\overline{a} = \frac{r^{\frac{1}{2}} \cdot R}{4}$,

ſo bekommt man $S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}}\lambda\overline{a} + \frac{1}{4r^{\frac{1}{2}}} \cdot$

Allein

Allein für die Praxis muſs man hier wiederum ſo rechnen, wie im Cap. I. §. 22., nämlich *die Zinſen der in der Mitte des Jahrs zu zahlenden Termine werden angenommen als die Hälfte der jährlichen Zinſen*, und die Sache ſo angeſehen, als ſey am *Ende des erſten Jahrs folgendes zu zahlen*:

1) Das was auch bey jährlichen Zahlungen vorkommt, nämlich $\frac{1}{A}$, deſſen baarer Wehrt $\frac{1}{Ar}$ iſt.

2) Die halbjährlichen Zinſen von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A}$, welche Ausgabe in der Mitte des Jahrs vorgefallen iſt. Davon iſt der baare Wehrt

$$\frac{1}{2}(r-1) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{Ar} = \frac{(r-1)\,\frac{1}{A}}{4.\,Ar}.$$

3) Die Ausgabe an die Hälfte der in dieſem Jahr Abgeſtorbenen, welche in der Mitte des Jahrs die Rente halb empfangen haben, und die halbjährigen Zinſen davon am Ende des erſten Jahrs. Beydes macht zuſammen,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta A}{A} + \frac{1}{4} \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{r-1}{2},$$ davon der baare Wehrt

$$= \frac{1}{4} \frac{\Delta A}{Ar} + \frac{1}{4} \frac{\Delta A}{Ar} \frac{r-1}{2}$$

Auf gleiche Weiſe iſt die Ausgabe am Ende des *zweyten* Jahrs auf ihren baaren Wehrt reducirt

$$= \frac{2}{Ar^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{}{r-1} \frac{2}{Ar^2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \frac{1}{A}}{Ar^2} + \frac{1}{4}(r-1) \frac{\Delta \frac{1}{A}}{Ar^2}$$

Folglich ist die gesammte Ausgabe S für alle Jahre

$= \lambda\overline{a} + \frac{r-1}{4} \cdot \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} R + \frac{1}{4} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot R$

Aber $(r-1)\lambda\overline{a} = 1 - rR$ (§. 3.) und $(r-1)\lambda\overline{a} + rR - (r-1)R = (r-1)\lambda\overline{a} + R = 1 - (r-1)R$.

Daher wird $S = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} - \frac{(r-1)R}{4}$

$+ \frac{1}{4} \frac{(r-1)}{2} \cdot R = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} - \frac{r+1}{8} \cdot R.$

Es ist R schon für sich eine kleine Gröfse, es ist nämlich der baare Wehrt einer beym Tode der Person zahlbaren Summe 1, auf ein Jahr zurück discontirt. Noch mehr ist $\frac{(r-1)R}{8} = \frac{R}{8p}$ unerheblich. Also ist ganz nahe $S = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4}$ das ist $\frac{1}{4}$tel einer Jahrszahlung mehr als der baare Wehrt der jährlichen Leibrente.

So giebt es auch *Simpson* an. *) Hr. *Florencourt* hat in dem von ihm berechneten Beyspiel **) blos den Unterschied, der aus den Zinsen entstehet, in Betracht gezogen, aber den zweyten Unterschied aus der Acht gelassen, daher der letzte zu klein ausfällt.

Sollen *vierteljährliche* Zahlungen geschehen, so ist der Unterschied des baaren Wehrts nahe an $\frac{3}{8}$tel einer Jahreinnahme, vorausgesetzt nämlich, dafs ein Viertel der

*) *Select Exercises.* p. 283.

**) *Abhandlungen aus der Arithmetik.* Cap. IV. §. 14. p. 131.

der Jahreszinsen für die *vierteljährlichen* und die Hälfte der Jahreszinsen für die *halbjährlichen* genommen werden.

Es sey der baare Wehrt der Leibrente in *vierteljährlichen* Zahlungen = S, so ist, wenn auf den jährlichen Zinsfuss r gerechnet wird.

$$S = \frac{1}{4A}\left(\frac{\frac{1}{4}A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{2}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{3}{4}A}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{1A}{r^{1}} + + +\right)$$

$$= \frac{1}{4A}\left(\frac{1A}{r} + \frac{2A}{r^{2}} + + \frac{xA}{r^{x}}\right) + \frac{1}{4A}\left(\frac{\frac{1}{4}A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{1\frac{1}{4}A}{r^{1\frac{1}{4}}} + \frac{2\frac{1}{4}A}{r^{2\frac{1}{4}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{\frac{1}{2}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1\frac{1}{2}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + +\right) + \frac{1}{4A}\cdot\left(\frac{\frac{3}{4}A}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{1+\frac{3}{4}A}{r^{1+\frac{3}{4}}} + +\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lambda a + \frac{1}{4A}\left(\frac{1A + \frac{3}{4}\Delta A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{2A + \frac{3}{4}\Delta 1A}{r^{1\frac{1}{4}}} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{1A + \frac{2}{4}\Delta A}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{2A + \frac{2}{4}\Delta 1A}{r^{1\frac{1}{4}}} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{1A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{1\frac{3}{4}}} + \frac{2A + \frac{1}{2}\Delta A}{r^{1\frac{3}{4}}} + +\right).$$

(Es wird nämlich angenommen, dass während eines Jahrs das Absterben gleichförmig sey.) Also

$$\frac{\frac{1}{4}}{1}A = A - \frac{1}{4}\Delta A = \frac{1}{1}A + \frac{3}{4}\Delta A.$$

Folglich $S = \frac{1}{4}\lambda\overline{a} + \frac{1}{4}\cdot r^{\frac{3}{4}}\lambda\overline{a} + \frac{1}{4}r^{\frac{3}{4}}\lambda\overline{a} +$

$+ \frac{1}{4}\ r^{\frac{1}{4}}\lambda\overline{a} + \frac{3}{16}\cdot\ r^{\frac{3}{4}}.\ R.$

$+ \frac{2}{16}\cdot\ r^{\frac{1}{2}}.\ R + \frac{1}{16}\cdot\ r^{\frac{1}{4}}\ R$

wenn wiederum $R = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\Delta' A}{r} + \frac{\Delta^{-1}A}{r} + +\right)$.

Dagegen, wenn man auf dieſelbige Art rechnet, wie vorher, nämlich die Zinſen der innerhalb des Jahrs fallenden Termine zu $\frac{r-1}{4}\cdot\frac{r-1}{2}, \frac{3}{4}(r-1)$ ſo bekommt man als Ausgabe am Ende des *erſten* Jahrs

1) das gewöhnliche bey jährlichen Zahlungen $\frac{^{-1}A}{Ar}$.

2) die Zinſen der drey vorhergehenden Termine

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{^{-1}A}{A}\cdot\left(\frac{(r-1)}{4}\cdot 3 + \frac{\overline{r-1}}{4}\cdot 2 + \frac{\overline{r-1}}{4}\cdot 1.\right)$$

deren baarer Wehrt ausmacht

$$\frac{3}{8}\ \frac{\overline{\quad}}{r-1}\cdot\frac{^{-1}A}{Ar}.$$

3) Was aufſerdem bezahlt iſt an die in dem Lauf des Jahrs abgegangene ΔA, mit ſeinen Zinſen bis Ende des Jahrs, nämlich für den *erſten vierteljährlichen* Termin

$\frac{1}{4}\cdot$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \frac{\Delta A}{A} \left(1 + \frac{\overline{r-1}}{4} \cdot 3\right)$; für den *zweyten*

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \frac{\Delta A}{A} \left(1 + \frac{\overline{r-1}}{4} \cdot 2\right)$; für den *dritten*

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta A}{A} \left(1 + \frac{\overline{r-1}}{4}\right)$.

Dieſes zuſammen auf ſeinen baaren Wehrt reducirt, macht

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta A}{Ar} \cdot (3+2+1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{r-1}{4} \cdot \frac{\Delta A}{Ar} \cdot (3.3+2.2+1.1)$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\Delta A}{Ar} + \frac{7}{32} (r-1) \cdot \frac{\Delta A}{Ar} \cdot \cdot$$

Da nun für das *zweyte* Jahr die Ausgabe, ebenfalls auf den baaren Wehrt reducirt, alle drey Theile zuſammen genommen, iſt

$$= \frac{\overline{-}^{2}A}{Ar^2} + \frac{\overline{-}^{2}A}{Ar^2} \cdot \frac{3}{8}(r-1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\Delta^{1}A}{Ar^2} + \frac{7}{32}(r-1) \frac{\Delta^{1}A}{Ar^2},$$

ſo hat man für alle Jahre zuſammen

$$S = \left(1 + \frac{3}{8}(r-1)\right) \left(\frac{\overline{-}^{1}A}{Ar} + \frac{\overline{-}^{2}A}{Ar^2} + + \right)$$

$$+ \tfrac{3}{8} \left(\frac{\Delta A}{Ar} + \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{Ar^2} + +\right) + \tfrac{7}{32}(r-1)\left(\frac{\Delta A}{Ar} + \frac{\Delta \overline{-}^{1}A}{Ar^2} + +\right)$$

$$= \lambda \overline{a} + \tfrac{3}{8}(r-1)\lambda \overline{a} + \tfrac{3}{8} \cdot R + \tfrac{7}{32}(r-1) R$$

und weil $(r-1)\lambda \overline{a} = 1 - r R$

und $(r-1)\lambda \overline{a} + R = 1 - (r-1) R$

ſo wird $S = \lambda \overline{a} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}(r-1) R + \frac{7}{32} \cdot (r-1) R$

$= \lambda \overline{a} + \frac{3}{8} - \frac{5}{32}(r-1) R.$

das iſt ſehr nahe $\lambda \overline{a} + \frac{3}{8}$, wie auch *Simpſon* annimmt.

15.

Anmerkung. Wenn die *jährliche* Leibrente *pränumerirt* wird, also die erste Zahlung gleich unmittelbar im Anfang geschiehet, so ist klar, dass ihr Wehrtum *Eine Jahrshebung* gröfser sey, als wenn sie, wie vorher gerechnet ist, *am Ende des Jahrs* erst zahlbar ist.

Wird die *halbjährliche* pränumerirt, so ist sie nur um *eine Halbjahrshebung* gröfser, als wenn sie am Ende der Termine bezahlet wird. Und da die *halbjährliche gewöhnliche* um $\frac{1}{4}$ einer Jahrshebung besser ist, als die jährliche gewöhnliche, so ist die *halbjährliche vorauszuzahlende* um $\frac{3}{4}^{\text{tel}}$ Jahrshebung besser als *die jährliche gewöhnliche.* Sollen sie aber beyde vorausbezahlt werden, so ist die *jährliche* um $\frac{1}{4}^{\text{tel}}$ Hebung besser als die halbjährliche. Ueberhaupt ist es klar, „wenn die Termine „kleiner sind, so ist der Unterschied zwischen den *vor-* „*auszuzahlenden* und den *nachzuzahlenden* Renten auch „geringer. Die Wehrte der *nachzuzahlenden* Renten „sind bey *kleinern* Terminen *gröfser*, aber die der *vor-* „*auszuzahlenden*, *kleiner.*“

16.

Wenn die Leibrente in $\frac{1}{n}^{\text{tel}}$ Terminen, welches *augenblickliche* Termine sind, wenn n unendlich grofs ist, bezahlet werden soll, so kann ihr baarer Wehrt S, erstlich so gesuchet werden, dass man den Jahreszinsenfuss durchaus beybehält; zweytens aber auch auf die zwote

Art,

Art, so dass die Zinsen für die $\frac{1}{n}^{tel}$ Termine sich verhalten, wie die Termine selbst. Man kann hiervon zuweilen Gebrauch machen. Wenn die Rechnung nach dem *jährlichen* Zinsenfuss gemacht wird, und die Termine *augenblickliche* seyn sollen, so bekommt man für das erste Jahr anstatt $\frac{A-\Delta A}{Ar}$, folgende Theile, (jede auf ihren baaren Wehrt reducirt),

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{A-\frac{\Delta A}{n}}{Ar^{\frac{1}{n}}}+\frac{A-\frac{2\Delta A}{n}}{Ar^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{A-\Delta A}{Ar}\right)$$

Dieß macht $\frac{1.A}{n.A}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r}\right)$

$$-\frac{\Delta A}{A.n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}\right)$$

Nun ist $\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\ldots\right)=\int\frac{dx}{r^x}$, wo nach der Integration $x=1$ wird. Das ist gleich *dem Wehrt einer in augenblicklichen Terminen zu zahlenden Rente*, welcher (§. 9. *Zusätze* zu Capitel I.) sich zu $\frac{1}{r}$ verhält, wie $p' : p$, wenn p das *Grundcapital*, und $p'=\frac{1}{\log.nat.\,r}$, oder das ähnliche *Grundcapital bey augenblicklichen Terminen* ist. Folglich ist auch

$$\frac{A}{A}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right)=\frac{A}{A}\cdot\frac{p'}{pr}\cdot$$

Ferner ist $\frac{1}{n^2}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\text{+}+\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}\right)=\int\frac{x\,dx}{r^x}$,

(wenn nach der Integration $x=1$) $=\frac{p'}{pr}\ (p'-p)$.

(§. 23. *Zus.* zu Cap. I.)

Denn

$$\int\frac{x\,dx}{r^x}=p'\left(p'-\frac{p}{r}\right)-\frac{p'}{r}=\frac{p'p'(r-1)}{r}-\frac{p'}{r}$$

$$=\frac{p'}{pr}\ (p'-p).$$

Also kommt für das *erste* Jahr

$$\frac{A}{A},\ \frac{p'}{pr}-\Delta A\ \frac{p'}{pr}\ (p'-p);$$

Für das *zweyte* Jahr bekommt man

$$\frac{1}{Ar}\left(^{1}A-\frac{\Delta^{1}A}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{Ar}\left(^{1}A-\frac{2\Delta^{1}A}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$$

$$+\text{+}\frac{1}{Ar}\left(^{1}A-\frac{n\,\Delta^{1}A}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{^{1}A}{A}\cdot\frac{p'}{p.r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{p'}{p.r}\ (p'-p).$$

Auf eine ähnliche Art hat man aus allen Jahren zusammen

$$\frac{1}{A}\cdot\left(A+\frac{^{1}A}{r}+\frac{^{2}A}{r^2}+\text{+}\right)\frac{p'}{pr}$$

$$-\frac{1}{A}\left(\Delta A+\frac{\Delta^{1}A}{r}+\frac{\Delta^{2}A}{r^2}+\text{+}\right)\frac{p'}{pr}\cdot(p'-p)$$

=

$= \frac{p'}{pr} \cdot (1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr}(p'-p.)\ r\,R$ (*Zuſ.* zum I. Cap. §. 14. und *Zuſ.* zum II. Cap. §. 3),

Für $r = 1,04$ iſt $\frac{1}{\log.nat.\,r} = \frac{1}{0,03922} = 25,49$ ganz nahe; $p = 25$, alſo $p' - p = 0,49$ und $\frac{p'}{p} = 1,0196$, $\frac{p'}{pr} = 0,98$.

Daraus wird *der geſuchte Wehrt der Leibrente für augenblickliche Hebungen* $= 0,98\,(1+\lambda\overline{a}) - 0,98.0,49.rR$, und weil $1 - \frac{\lambda\overline{a}}{p} = r\,R$, ſo bekommt man $0,98\,(1+\lambda\overline{a} - 0,49 + \frac{0.49}{25}\lambda\overline{a})$, was ganz nahe iſt $= (0,98+0,02)\lambda\overline{a} + 0,5 = \lambda\overline{a} + \frac{1}{2}$.

Zuſatz. Wenn in der Gleichung für augenblickliche Leibrenten

$S = \frac{p'}{pr}(1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr}(p'-p)\ r\,R$ für $\lambda\overline{a} = p - p.\,rR$, §. 3. und für $p = \frac{r}{r-1}$, die letzten Ausdrücke geſetzet werden, ſo wird

$S = \frac{p'}{pr} + \frac{p'}{r}(1 - rR) - \frac{p'p'}{p}R + p'R$

$= \frac{p'}{r}\left(\frac{1}{p}+1\right) - \frac{p'p'}{p}\cdot R = p' - \frac{p'p'.R}{p}$.

17.

Zusatz. Setzet man in dem obigen Ausdruck

$\frac{p'}{pr}(1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr}(p'-p)\ r\ R,\ p'=p,$

so wird solcher

$= \frac{\lambda\overline{a}}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda\overline{a}}{r} + \frac{\lambda\overline{a}}{pr} + R = \lambda\overline{a} + R.$

Anmerkung. Nach der Voraussetzung des *gleichförmigen Absterbens* ist $R = \frac{1}{\alpha}\cdot\int\frac{dx}{r^x}$, das ist gleich der *Zeitrente auf die Altersergänzung, dividirt durch diese letztere.* Dieß ist nach *Simpson* *) der Unterschied zwischen der *augenblicklichen Leibrente* und der *jährlichen.* Das ist es aber nicht; auch nach der erwähnten Hypothese nicht, wenn nicht zugleich $p'=p$ gesetzet wird. Nach der letzten Hypothese würde die Rechnung für augenblickliche Leibrenten folgende seyn.

Es ist $\lambda\overline{a} = \int\frac{\alpha-x}{\alpha}\cdot\frac{dx}{r^x} = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}$

$= p'\left(1-\frac{1}{r^x}\right) - \frac{1}{\alpha}p'\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^\alpha}\right).$

Da nun nach der Integration $x=\alpha$ wird, so wird

$\lambda\overline{a} = p' - \frac{p'}{r^\alpha} - \frac{1}{\alpha}p'\int\frac{dx}{r^\alpha} + \frac{p'}{r^\alpha}$

$= p'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{r^x}\right)$

Allein für *jährliche* Renten ist §. 8. $\lambda\overline{a} = p\left(1-\frac{r}{\alpha}\int\frac{dx}{r^x}\right)$.

Folglich

*) *Select. Exercises.* p. 324.

Folglich der Unterſchied $p' = p + \left(\frac{rp - p'}{\alpha}\right) \int \frac{dx}{r^{\alpha}}$

was dann erſt $= \frac{1}{\alpha} \int \frac{dx}{r^{\alpha}}$ wird, wenn $p' = p$ geſetzet wird.

§ 18.

Nun auch, wenn die $\frac{1}{n}$tel jährlichen Zinſen zu $\frac{r-1}{n}$ angenommen werden.

Die Ausgabe für das *erſte* Jahr iſt:

1) wie bey jährlichen Terminen $\frac{\frac{1}{n}A}{A.r}$

2) Die Zinſen der in dem Jahr gefallenen, an $\frac{\frac{1}{n}A}{A}$ bezahlten Termine, welche noch am Ende des Jahrs nachzuzahlen ſind, auf ihren baaren Wehrt zurück discontirt. Dieſe Zinſen für ſich machen

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}A}{A}\left(\frac{n-1}{n} \cdot \overline{r-1} + \frac{n-2}{n}(r-1) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \overline{r-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{n}A}{A} \cdot \frac{(n^2-n)}{2n^2}(r-1) \text{ und discontirt}$$

$$\frac{\frac{1}{n}A}{Ar} \cdot \left(\frac{n^2-n}{2n^2}\right) \cdot \overline{r-1};$$

3) Die noch auſserdieſs an die in dem Lauf des Jahrs Abgegangenen gezahlten Termine, nebſt den Zinſen davon. Die Termine ſelbſt discontirt, ſind

$$\frac{\Delta A}{Ar} \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{\Delta A}{A.r}\left(\frac{n^2-n}{2n^2}\right).$$

Die

Die Zinſen davon, wie ſolche am Ende des Jahrs nachzuzahlen ſind, und discontirt, machen

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{A.r}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1).(r-1)}{n}+\frac{1}{n}\frac{\Delta A}{Ar}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-2}{n}(r-1)++$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{Ar}\cdot(r-1)\left(\frac{(n-1)^2+(n-2)^2}{n^2}++\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\Delta A}{A.r}\cdot r-1\ \frac{(n-1).n.(n+1)}{1.2.3.\ n^3}.$$

Alſo die Summen aller Stücke zuſammen,

$$=\frac{\overline{1}A}{Ar}+\frac{\overline{1}A}{Ar}\cdot(r-1)\frac{(n^2-n)}{2n^2}$$

$$+\frac{\Delta A}{Ar}\frac{(n^2-n)}{2n^2}+\frac{\Delta A}{Ar}(r-1)\frac{(n-1).n.(n+1)}{1.2.3.\ n^3}.$$

Für das *zweyte* Jahr iſt die Ausgabe,

$$\frac{\overline{2}A}{Ar^2}+\frac{\overline{2}A}{Ar^2}\cdot(r-1)\frac{n^2-n}{2n^2}+$$

$$\Delta\frac{\overline{1}A}{Ar^2}\frac{(n^2-n)}{2n^2}+\frac{\Delta\overline{1}A}{Ar^2}(r-1)\frac{\overline{n-1}.n.\overline{n+1}}{1.2.3.\ n^3}$$

Und ſo ferner für die folgende Jahre,

Folglich die *Ausgabe für alle Jahre zuſammen*

$$S=\lambda\overline{a}+\frac{n^2-n}{2n^2}(r-1)\lambda\overline{a}$$

$$+\frac{n^2-n}{2n^2}\cdot R+\frac{\overline{n-1}.n.\overline{n+1}}{1.2.3.\ n^3}\cdot(r-1)R.$$

Und weil $(r-1)\lambda\overline{a}+R=1-(r-1)R$, ſo iſt

$$S=\lambda\overline{a}+\frac{n^2-n}{2n^2}-\left(\frac{n^2-n}{2n^2}-\frac{n-1.n.n+1}{2.3.\ n^3}\right)r-1.R.$$

Wird

Wird n unendlich groſs, wie bey augenblicklichen Zahlungen, ſo hat man $S = \lambda \overline{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(r-1)R$, ganz nahe $\lambda \overline{a} + \frac{1}{2}$.

19.

Zu §. 76.

Wenn die Rente *veränderlich* iſt, und nach einem gewiſſen Geſetze ſteiget oder fällt, ſo iſt der allgemeine Ausdruck für die *Leibrente*

$$\lambda \overline{\overline{a}} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{{}^{1}A}}{r}\,\overline{{}^{1}l} + \frac{\overline{{}^{2}A}}{r^2}\,\overline{{}^{2}l} + \frac{\overline{{}^{3}A}}{r^3}\,\overline{{}^{3}l}\right), \text{ wo}$$

$\overline{{}^{1}l}$ die Rente des erſten Jahrs und $\overline{{}^{2}l}\,\overline{{}^{3}l}$ u. ſ. w. die *veränderten Penſionen* der folgenden Jahre ſind,

Wenn die jährliche Hebung in einem geometriſchen Verhältniſs ſteiget, deſſen Exponent n iſt, ſo hat man

$$L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{{}^{1}A}}{r}\cdot 1 + \frac{\overline{{}^{2}A}}{r^2}\cdot n.\ 1 + + \right) \text{ und}$$

$$n\,L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{{}^{1}An}}{r}\,1 + \frac{\overline{{}^{2}A}}{r^2}\,n^2\ 1 + + +\right)$$

wo dann wiederum ſtatt 1. die Einheit geſetzet, und $\frac{1}{r:n}$ für $\frac{n}{r}$, wird

$$n\,L\overline{\overline{a}} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{{}^{1}A}}{r:n} + \frac{\overline{{}^{2}A}}{r^2:n^2}\right).$$

Zuſatz 1. Es iſt alſo $n\,L\overline{\overline{a}}$ eine Leibrente nach dem Zinsfuſs $r:n$ berechnet.

Zuſatz

Zusatz 2. Diese Leibrente kann aber berechnet werden durch die Reihe $\frac{\Delta A}{r:n} + \frac{\Delta \overline{{}^{1}A}}{r^2:n^2} + +$ oder durch eine Reihe der folgenden Differenzen

$\frac{\Delta^n A}{r:n} + \frac{\Delta^n \overline{{}^{1}A}}{(r:n)^2} +$ wie es oben bey den gewöhnlichen Leibrenten gewiesen ist, §. 3 — 6.

Zusatz 3. Wenn r:n von einem der gewöhnlichen Zinsfüsen, wornach die Tabellen berechnet sind, nicht sehr abweichet, so läßt sich der Wehrt durch die Approximation, nach Cap. II. §. 73. 74. erhalten.

20.

Zu §. 77.

Wenn die Rente im ersten Jahre 1 ist, im zweyten 2; im dritten 3; und so weiter, so ist der Wehrt dieser Leibrente

$$L\overline{a} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overline{{}^{1}A}}{r} + \frac{2\overline{{}^{2}A}}{r^2} + \frac{3\overline{{}^{3}A}}{r^3} + + \frac{x\overline{{}^{x}A}}{r^x} \right)$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r} + \frac{2\overline{{}^{1}A}}{r^2} - \frac{2\Delta\overline{{}^{1}A}}{r^2} \right.$$

$$+ \frac{3\overline{{}^{2}A}}{r^3} - \frac{3\Delta\overline{{}^{2}A}}{r^3} + - + -$$

$$\left. + \frac{x.\overline{{}^{x-1}A}}{r^x} - \frac{x.\Delta\overline{{}^{x-1}A}}{r^x} \right).$$

Wenn

Wenn nun die Reihe

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta^{\overline{1}}A}{r^2} + \frac{3\Delta^{\overline{2}}A}{r^3} + \cdots + \frac{x\Delta^{\overline{x-1}}A}{r^x} = M;$$

und $\frac{M}{A} = S$ gesetzet wird,

so ist $L\overline{a} = \frac{L\overline{a} + \lambda\overline{a}}{r} + \frac{1}{r} - S.$

Denn $\frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} + \frac{2^{\overline{1}}A}{r^2} + \frac{3^{\overline{2}}A}{r^3} + \cdots + \frac{x^{\overline{x-1}}A}{r^x}\right)$

$= \frac{A}{Ar} + \frac{1}{Ar}\left(\frac{^{\overline{1}}A}{r} + \frac{^{\overline{2}}A}{r^2} + \cdots + \frac{^{\overline{x}}A}{r^x}\right)$

$+ \frac{1}{Ar}\cdot\left(\frac{^{\overline{1}}A}{r} + \frac{2^{\overline{1}}A}{r^2} + \frac{3^{\overline{2}}A}{r^3} + \frac{(x-1)^{\overline{x-1}}A}{r^{x-1}}\right)$

$= \frac{1}{r} + \lambda\overline{a} + \frac{1}{r}L\overline{a}.$

Also $L\overline{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\lambda\overline{a} + \frac{1}{r}L\overline{a} - S.$

Folglich $r\,L\overline{a} = \lambda\overline{a} + L\overline{a} + 1 - r\,S.$

Und $L\overline{a} = \frac{\lambda\overline{a} + 1 - r\,S}{r-1}.$

21.

Die Reihe $M = \frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta^{\overline{1}}A}{r^2} + \frac{3\Delta^{\overline{2}}A}{r^3} + \cdots$

kann aus einer ähnlichen Reihe der Differenzen der zweyten Ordnung gefunden werden, nämlich aus der Reihe

$$\frac{\Delta^2 A}{r} + \frac{2.\Delta^{2\overline{1}}A}{r^2} + \frac{3.\Delta^{2\overline{2}}A}{r^3} + \cdots$$

wenn

wenn schon vorher die Reihe

$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^{-1}A}{r^2} + \frac{\Delta^{-2}A}{r^3} + +$ die zu den unveränderlichen Leibrenten gehört, bekannt ist.

Denn es ist

$\Delta A - \Delta^{-1}A = \Delta\Delta A$

$\Delta^{-1}A - \Delta^{-2}A = \Delta\Delta^{-1}A$

$\Delta^{x-1}A - \Delta^{-x}A = \Delta\Delta^{x-1}A.$

Daher

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta^{-1}A}{r^2} + \frac{3\Delta^{-2}A}{r^3} + + = \frac{\Delta^{-1}A + \Delta^2 A}{r}$$

$$+ \frac{2\Delta^{-2}A + 2.\Delta^{2-1}A}{r^2} + + \frac{x.\Delta^{-x}A}{r^x} + \frac{x\Delta^{x-1}A}{r^x}.$$

Nun sey auch die ähnliche Reihe der zwoten Differenz

$\frac{\Delta\Delta A}{r} + \frac{2\Delta\Delta^{-1}A}{r^2} + + = \Delta M$ und die Reihe

$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^{-1}A}{r^2} + + = R'$ (= R. A. §. 3.),

so ist $M = \Delta M + \frac{\Delta^{-1}A}{r} + \frac{2'\Delta^{-2}A}{r^2} + \frac{3\Delta^{-3}A}{r^3} + +$

weil aber $M = \frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta^{-1}A}{r^2} + \frac{3\Delta^{-2}A}{r^3} + +$

so ist $rM = \Delta A + \frac{2\Delta^{-1}A}{r} + \frac{3\Delta^{-2}A}{r^2} + +$

Folglich

Folglich $r M = r R' + \frac{\Delta^1 A}{r} + \frac{2 \Delta^2 A}{r^2} + +$

$= r R' + M - \Delta M$. Daher dann ferner

$(r - 1) M = r R' - \Delta M$.

Es iſt $r R' = r. A. R$, das iſt, *der Wehrt der Erbſchaft*, aus dem man die gewöhnliche Leibrente berechnet, mit A multiplicirt, §. 3. Wird nun dazu die Reihe ΔM geſucht, die ſich bey der *Süſsmilchiſchen* Sterblichkeitsordnung leichter finden läſst, weil ſie weniger Glieder hat, ſo wird auch der Wehrt der veränderlichen Leibrente leicht berechnet.

Es iſt nämlich

$(r - 1) L\bar{a} = 1 + \lambda \bar{a} - r S$

und $S = \frac{M}{A}$, und $M = \frac{r R' - \Delta M}{r - 1}$.

Alſo $(r - 1) L\bar{a} = 1 + \lambda \bar{a} - \frac{r. (r R' - \Delta M)}{A (r - 1)}$

$\left(\text{und weil } p = \frac{1}{r - 1}\right) = 1 + \lambda \bar{a} - p r \left(\frac{r R' - \Delta M}{A}\right)$

folglich $L\bar{a} = p \left((1 + \lambda \bar{a}) - p r \cdot \frac{(r R' - \Delta M)}{A}\right)$.

Zuſatz 1. Und da $\frac{p r R'}{A} = p - \lambda \bar{a}$

alſo $r. \frac{p r R'}{A} = r p - r \lambda \bar{a}$

ſo wird $L\bar{a} = p \left((1 + r) \lambda \bar{a} + 1 - rp + p. \frac{\Delta M}{A}\right)$.

22.

Zusatz 2. Nach der Voraussetzung vom *gleichförmigen Sterben* ist die Reihe

$$S = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta^{\overline{1}}A}{r^2} + + \frac{x.\,\Delta^{\overline{x-1}}A}{r^x}\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{^{\overline{x-1}}A}{r} + \frac{^{\overline{x-2}}A}{r^2} + + \frac{^{\overline{1}}A}{r^{x-1}} + \frac{A}{r^x}\right).$$

Denn weil die Decremente ΔA alle einander gleich sind, und ΔA so viel als das letzte Glied in der Reihe der Lebenden, $^{\overline{x-1}}A$, so wird

$$\frac{x.\,\Delta^{\overline{x-1}}A}{r^x} = \frac{x\,\Delta A}{r^x} = \frac{A}{r^x}.$$ Eben so ist

$$\frac{2\Delta^{\overline{x}}A}{r^2} = \frac{\Delta^{\overline{1}}A + \Delta^{\overline{1}}A}{r^2} = \frac{^{\overline{x+1}}A}{r^2} + \frac{\Delta^{\overline{x-1}}A}{r^2} = \frac{^{\overline{x-2}}A}{r^2},$$

und so weiter.

Folglich wenn zu der Reihe S addirt wird die Reihe

$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{^{\overline{1}}A}{r} + \frac{^{\overline{2}}A}{r^2} + + \frac{^{\overline{x}}A}{r^x}\right)$ wo das letzte Glied $\frac{^{\overline{x}}A}{r^x} = o$ ist, so wird

$$S + \lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\left(\frac{^{\overline{1}}A + \Delta A}{r}\right) + \left(\frac{^{\overline{2}}A}{r^2} + \frac{2\Delta^{\overline{1}}A}{r^2}\right)\right.$$

$$\left. + + \left(\frac{^{\overline{x}}A}{r^x} + \frac{x\Delta^{\overline{x-1}}A}{r^x}\right)\right) = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A}{r} + \frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^3} + + \frac{A}{r^x}\right)$$

$$= \int\frac{1}{r^x}.$$ Daher auch $S = \int\frac{1}{r^x} - \lambda\overline{a}$.

Wenn

Wenn dieſer Wehrt von S in den Ausdruck für $L\overline{a}$ in §. 19. geſetzet wird, ſo bekommt man

$$L\overline{a} = p\left(1+\lambda\overline{a} - r\left(\int\frac{1}{r^x} - \lambda\overline{a}\right)\right)$$

$$= p\left((1+r)\lambda\overline{a} + 1 - r\int\frac{1}{r^x}\right) = (2p+1)\lambda\overline{a} + p - rp\int\frac{1}{r^x}.$$

Und weil ferner $r\int\frac{1}{r^x} = 1 + \int\frac{1}{r^{x-1}}$, ſo iſt

$rp\int\frac{1}{r^x} = p + p\int\frac{1}{r^{x-1}}$. Daraus wird noch kürzer der Ausdruck: $L\overline{a} = (2p+1)\lambda\overline{a} - p\int\frac{1}{r^{x-1}}$

23.

Zuſatz 2. Für *augenblickliche* Renten, dieſelbe Hypotheſe beybehalten, iſt $\lambda\overline{a} = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}$, wo α die Altersergänzung iſt. §. 17.

Und $L\overline{a} = \int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$. Aber

$\int\frac{x^2\,dx}{r^x} = 2p'\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{p'x^2}{r^x}$, und

$\int\frac{x\,dx}{r^x} = p'\int\frac{dx}{r^x} - \frac{p'x}{r^x}$, wo p' wiederum $= \frac{1}{\text{log. nat. } r}$, oder das Grundcapital zu augenblicklichen Renten iſt.

Daher $L\overline{a} = p'\int\frac{dx}{r^x} - \frac{p'x}{r^x} - \frac{2p'}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{p'x^2}{\alpha r^x}$.

Nach der Integration ist $x = \alpha$.

Also $L\overline{a} = p' \lambda \overline{a} - \frac{1}{\alpha} p' \int \frac{x\,dx}{r^\alpha}$

$= p' \lambda \overline{a} + p' \lambda \overline{a} - p' \int \frac{dx}{r^\alpha} = 2\,p' \lambda \overline{a} - p' \int \frac{dx}{r^\alpha}$,

wo $\int \frac{dx}{r^\alpha}$ *die Zeitrente auf* α *Jahre bey augenblicklichen Terminen*, so wie hier $\lambda \overline{a}$ auch die Leibrente bey augenblicklichen Hebungen ist.

Es ist $2p' = 2p + 0,98$. §. 16. Also ist der Unterschied in diesem Zusatz und in dem vorhergehenden nicht sehr erheblich.

24.

Anmerkung. Leibrenten, die nach andern Gesetzen wachsen oder abnehmen, als die bisher betrachteten sind, übergehe ich, weil sie nicht leicht in der Praxis vorkommen. Wenn das ist, müssen sie auf eine ähnliche Art wie die vorigen gesucht werden. Es ist überhaupt klar, dass wenn ein allgemeines Gesetz für die Folge der *Decremente* angenommen wird, so lassen sich auch allgemeine Ausdrücke für *die Wehrte der Leibrenten* geben, die sich nach einer allgemeinen Regel verändern.

25.

Zu §. 81.

Soll eine Leibrente im ersten Jahr 1 seyn, im zweyten $1 + \frac{1}{n}$, und nun weiter jährlich um $\frac{1}{n}$tel steigen, so ist der Wehrt derselben

=

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\overline{A}^{1}}{r} + \frac{\overline{A}^{2}}{r^2} + \frac{\overline{A}^{3}}{r^3} + \ldots + \frac{\overline{A}^{x}}{r^x}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{nr}\frac{\overline{A}^{2}}{r^2} + \frac{2}{nr}\frac{\overline{A}^{3}}{r^3} + \ldots + \frac{(x-1)}{nr}\frac{\overline{A}^{x}}{r^x}\right).$$

Dieſer Wehrt ſey = V, ſo iſt

$$V = \lambda\overline{a} + \frac{1}{A}\left(\frac{1}{n}\frac{\overline{A}^{2}}{r^2} + \frac{2}{n}\frac{\overline{A}^{3}}{r^3} + \ldots + \frac{(x-1)}{n}\frac{\overline{A}^{x}}{r^x}\right).$$

Wenn $\frac{L\overline{(a+1)}}{n}$ der Wehrt einer Leibrente für das Alter $\overline{a+1}$ iſt, welche mit $\frac{1}{n}$tel anfängt, und im zweyten Jahr $\frac{2}{n}$tel iſt, und ſo ferner ſteiget, ſo iſt

$$\frac{L\overline{a+1}}{n} = \frac{1}{\frac{1}{A}}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\overline{A}^{2}}{r} + \frac{2}{n}\cdot\frac{\overline{A}^{3}}{r^2} + \ldots + \frac{(x-1)}{n.}\frac{\overline{A}^{x}}{r^{x-1}}\right)$$

Folglich iſt $\frac{L\overline{a+1}}{n.\,r}\cdot\frac{\overline{A}^{1}}{A} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\overline{A}^{2}}{r^2} + \right.$

$$\left.\frac{2}{n}\cdot\frac{\overline{A}^{3}}{r^3} + \ldots + \frac{x-1}{n}\cdot\frac{\overline{A}^{x}}{r^x}\right).$$

Daher $V = \lambda\overline{a} + \frac{\overline{A}^{1}}{A}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{L\overline{a+1}}{n}$

$$= \lambda\overline{a} + \frac{L\overline{a+1}}{n.\,r}\left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right).$$

26.

Zu §. 87.

Soll eine *arithmetisch* nach der natürlichen Ordnung der Zahlen *steigende Leibrente* 1 auf *n* Jahre *aufgeschoben* werden, so ist ihr baarer Wehrt bezeichnet durch

$$\overline{\overline{{}^{n}La}} = \frac{1}{A}\left(\frac{(n+1)\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r^{n+1}} + + \frac{x\,\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x}}\right).$$

Es wird nämlich der erste zahlbare Termin $n+1$, weil die Rente, wie vorher, so gleich zu wachsen anfängt, nur die ersten Jahre nicht gehoben wird.

Aber $\overline{La+n} = \frac{1}{\overline{\overline{{}^{n}A}}} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r} + + (x-n)\frac{\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x-n}}\right)$

Also $\frac{\overline{La+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{\overline{{}^{n}A}}}\left(\frac{\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r^{n+1}} + + \frac{(x-n)\,\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x}}\right)$

Ferner $\frac{\overline{\lambda a+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{\overline{{}^{n}A}}}\left(\frac{\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r^{n+1}} + + \frac{\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x}}\right)$

und n. $\frac{\overline{\lambda a+n}}{r^{n}} = \frac{n}{\overline{\overline{{}^{n}A}}} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r^{n+1}} + + \frac{\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x}}\right)$

Folglich n. $\frac{\overline{\lambda a+n}}{r^{n}} + \frac{\overline{La+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{\overline{{}^{n}A}}}\left((n+1)\frac{\overline{\overline{{}^{n+1}A}}}{r^{n+1}} + + x.\frac{\overline{\overline{{}^{x}A}}}{r^{x}}\right)$

Also $\left(n.\frac{\overline{\lambda a+n}}{r^{n}} + \frac{\overline{La+n}}{r^{n}}\right) \cdot \frac{\overline{\overline{{}^{n}A}}}{A} = \overline{\overline{{}^{n}La}}.$

27.

Zu §. 101.

Der Wehrt einer in *augenblicklichen Terminen* zu hebenden Leibrente, wo nämlich in jedem $\frac{1}{n}^{tel}$ Theil des Jahrs auch $\frac{1}{n}$ gezahlet wird, ist nach §. 16. $= p' - \frac{p'p'}{p} \cdot R.$

wo $R = \frac{1}{A}\left(\frac{dA}{r} + \frac{d^2A}{r^2} + + \frac{d^xA}{r^{x-1}}\right)$ ist, und p' das Grundcapital für augenblickliche Zinsen $\frac{1}{p}$, p aber dasjenige, wovon jährlich der Zins $= 1$ ist.

Nun ist aber $R\frac{p'}{p} = rR\frac{1}{n} \cdot \int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$ (*Zusätze zu* Cap. I. §. 9.). Folglich die augenblickliche Leibrente $S = p' - p'rR\frac{1}{n}\int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$. Aber $rR\frac{1}{n} \cdot \int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$ ist der Wehrt von der Grösse rR, wenn anstatt den ganzen jährlichen Abgang der Lebenden auf den Anfang des Jahrs zu setzen, solcher durch alle Augenblicke vertheilet wird, das ist, wenn die beym Tode einer Person zahlbare Summe 1. in demselbigen Moment, in welchem jene stirbt, bezahlt werden soll. *Folglich ist wiederum der baare Wehrt des beym Tode zu zahlenden Capitals p, gleich diesem Capital, weniger einer den Zinsen desselben gleichen Leibrente von solchen augenblicklichen Hebungen,*

Drittes Capitel.

Erſter Abſchnitt.

Von der mittlern Dauer des Zuſammenlebens zwoer Perſonen.

103.

Satz 24. *A ſey eine Perſon vom Alter a und B von b. Laſs dieſe beyden Ein zuſammenlebendes Paar am Anfang des Jahrs ſeyn, und man nehme eine Anzahl N ſolcher Paare; ſo wird die am Ende eines jeden der folgenden Jahre noch übrige Zahl dieſer Paare auf folgende Weiſe aus der Mortalitätstabelle gefunden.*

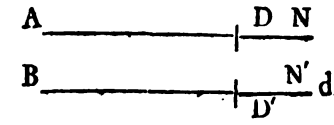
1) Die Zahl der *Lebenden* in der Tabelle für das Jahr *a*, (die *Anfangszahl*) ſey A; für die folgenden Jahre ſey die Zahl der Lebenden $\overset{1}{-}A$, $\overset{2}{-}A$ u. ſ. f. $\overset{x}{-}A = o$ wie vorher. Die *Anfangszahl* für das Alter *b* ſey B, und für die folgenden Jahre $\overset{1}{-}B$, $\overset{2}{-}B$ u. ſ. f. bis $\overset{y}{-}B = o$ wird. Man mache die Producte $\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B + +$ bis Einer der Factoren entweder $\overset{x}{-}A$ oder $\overset{y}{-}B = o$ wird.

2) Jedes dieſer Producte multiplicirt mit der anfänglichen Zahl der Paare N, und dividirt durch das Product A. B, giebt die noch übrige Zahl der Paare für jedes folgende Jahr.

So

So ist $\frac{-^{1}A.\ -^{1}B}{A.\ B}$. N die Zahl der noch zusammenlebenden Paare nach dem ersten Jahr; $\frac{-^{2}A\ -^{2}B}{A.\ B}$. N. nach zwey Jahren, und so ferner.

Beweis. Da von A Personen vom Alter *a* nach *einem* Jahr nur $-^{1}A$ übrig sind, so sind von N desselben übrig $\frac{N.\ -^{1}A}{A}$. Wenn von den Personen B keiner in demselben Jahr abgegangen wäre, so würden auch $\frac{N.\ -^{1}A}{A}$ *Paare* übrig seyn. Eben dieſs würde auch erfolget seyn, wenn aus den Personen B gerade dieselbigen gestorben wären, die zu den abgegangenen A gehörten, das ist, die mit diesen zusammen die Paare ausmachten, was aber nicht geschehen ist. Es stellen die Linien



die anfänglichen Personen A und B vor. Von A sind am Ende des ersten Jahrs noch A D am Leben, D N aber gestorben. Nun nehme man an, die Personen B in der Linie B N' sollen so gestellet seyn, dass jede von diesen zu der gehöre, welche in A N gerade über ihr stehet, wie D' zu D. Die abgegangenen von A sollen alle zwischen D und N gesetzet seyn. Es ist klar, wenn aus den Theilen der Linie B N' keine ausgefallen wären, so würden A D (= B D') Paare

übrig ſeyn. Allein aus dem Theile B D′ ſind gleichfalls einige abgegangen. Daher ſo viel Paare mehr getrennet ſind als D N; Die Zahl der letztern wird ſo gefunden. Es bleiben von B Perſonen vom Alter b am Ende des Jahrs, $\overset{1}{-}B$, folglich gehen ab $B - \overset{1}{-}B$. Alſo da von B abgehen $B - \overset{1}{-}B$, ſo gehen von denen zwiſchen B und D′ oder von ſo viel als zwiſchen A und D in der Linie A N ſtehen, ab $N \frac{\overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B}$. Dieſs von $N \frac{\overset{1}{-}A}{A}$ abgezogen, macht

$$N \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(1 - 1 + \frac{\overset{1}{-}B}{B}\right) = N \frac{\overset{1}{-}A \cdot \overset{1}{-}B}{A \cdot B},$$ Dieſs iſt die Zahl der übrigen Paare.

Es iſt klar, daſs man dieſelbigen Schlüſſe machen müſſe, für die nach zweyen Jahren noch übrigen Paare. Es ſey A D die aus A nach zwey Jahren noch übrige Zahl $= \frac{\overset{2}{-}A}{A} \cdot N$, ſo findet man die aus den zwiſchen B und D′ in der Linie B N′ in derſelben Zeit abgegangene, wenn man ſo ſchlieſſet. Von B gehen in 2 Jahren ab $B - \overset{2}{-}B$, folglich von $N \cdot \frac{\overset{2}{-}A}{A}$, die Zahl $N \frac{\overset{2}{-}A}{A} \cdot \frac{(B - \overset{2}{-}B)}{B}$. Alsdenn iſt

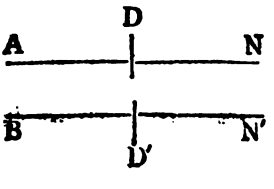
$$\frac{N \overset{2}{-}A}{A} - \frac{N \overset{2}{-}A}{A} \cdot \frac{(B - \overset{2}{-}B)}{B} = \frac{N \cdot \overset{2}{-}A \overset{2}{-}B}{A \cdot B}.$$

Eben

Eben so für die folgenden Jahre, für das n^{te} Jahr ist sie $\frac{N.\overset{n}{\frown}A.\overset{n}{\frown}B}{A.\ B}$; bis man entweder auf $\overset{x}{\frown}A = o$, oder auf $\overset{y}{\frown}B = o$ kommt.

104.

Satz 25. Die Zahl der ganz ausgestorbenen Paare aus der anfänglichen Zahl derselben N für jedes Jahr, das ist, *die Zahl derer, wovon beyde Theile todt sind, wird gefunden, wenn das Product der aus A und B gestorbenen in einander, durch das Product A. B dividirt, und der Quotient mit der gegebenen Zahl N multiplicirt wird.* Das ist, nach n Jahren ist die Zahl der ganz ausgestorbenen Paare $= N. \frac{(A - \overset{n}{\frown}A)}{A} . \frac{(B - \overset{n}{\frown}B)}{B}$.



Beweis. Dieſs wird ſehr leicht auf dieſelbige Art eingeſehen. Denn wenn wiederum in der Linie A N die *Ausgeſtorbenen* A, alle zwiſchen D und N geſetzet ſind, und die mit ihnen anfangs verbundenen in B N′ unter jenen, zwiſchen D′ N′; ſo geben die von B geſtorbenen zwiſchen B und D′ keine ganz ausgeſtorbene Paare, weil die mit ihnen verbundenen A noch am Leben ſind. Auch ſind nicht alle zwiſchen D′ und N′ todt, daher auch nicht *alle* Paare in D N und D′ N′, ganz ausgeſtorben ſind.

ſind. Solcher Paare, davon keine Perſon übrig iſt, giebt es alſo nicht mehr, als Geſtorbene von B in D′ N′ ſich finden. Nun iſt die Zahl in D N in der Linie A N, oder in D′ N′ in der Linie B N′, $= N \frac{(A - {}^{n}\!A)}{A}$. Und weil von B nach n Jahren geſtorben ſind $B - {}^{n}\!B$ aus der Zahl B, ſo ſind aus $N \frac{(A - {}^{1}\!A)}{A}$ geſtorben

$N. \frac{(A - {}^{n}\!A)}{A} . \frac{(B - {}^{n}\!B)}{B}$. Dieſs ſind die *ganz ausgeſtorbenen Paare.*

105.

Zuſatz 1. Die Summe der getrennten Paare, wovon A noch am Leben iſt, B aber geſtorben, iſt ſo groſs als die Zahl der Geſtorbenen in B N′ zwiſchen B und D′

$= N. \frac{{}^{n}\!A}{A} . \frac{(B - {}^{n}\!B)}{B}$.

Zuſatz 2. Imgleichen *die Summe der getrennten Paare*, wovon A geſtorben und B noch am Leben iſt, iſt gleich der Summe der Lebenden von B zwiſchen D′ und N′ $= N. \frac{(A - {}^{n}\!A)}{A} . \frac{{}^{n}\!B}{B}$.

106.

Anmerkung. Dieſs ſind die *Halleyiſchen Grundſätze*, wovon auch die Berechnung der *Ehepaare*, die

aus

aus einer gewissen Anzahl Ehen nach gewissen Jahren noch *stehen geblieben* oder die *ganz* und *halb ausgestorben* sind, abhängt. *Halley* drückte es so aus. Es sey N eine *Anzahl Personen* von einem bestimmten aber gleichen Alter, *wovon jede mit einer Person von einem bestimmten*, unter sich gleichfalls gleichem *Alter verbunden ist.* Nun sollen von den ersten nach *n* Jahren noch *am Leben* seyn L; und *gestorben* seyn T; von den andern *am Leben seyn l*, und *gestorben seyn t;* so ist $\frac{Ll}{N}$ die Summe der *noch übrigen* Paare; $\frac{T.t}{N}$ der *ganz ausgestorbenen* Paare; $\frac{L.t}{N}$ die Summe der *getrennten Paare*, von denen noch einer der ersten lebet und einer der letztern todt ist; und $\frac{lT}{N}$ die Summe der *getrennten Paare*, aus denen einer der erstern todt ist, und einer der letztern noch lebet. Auch ist

$$\frac{Ll}{N} + \frac{Tt}{N} + \frac{Lt}{N} + \frac{Tt}{N} = \frac{(L+T).(l+t)}{N}$$

$$= N.\frac{N}{N} = N.$$ In diesen Ausdrücken ist L was vorher AD war, oder

$$\frac{-^{n}A}{A}.\ N;\ l = \frac{-^{n}B}{B}.N;\ T = \frac{A - -^{n}A}{A}.\ N;$$

$$t = \frac{B - -^{n}B}{B}.\ N.$$

Zusatz

Zusatz 3. Weil N. $\frac{{}^{n}\!A \; {}^{n}\!B}{A. \; B}$ die Summe der *übrigen* Paare ist aus der anfänglichen Zahl N; so ist von *Einem* Paar übrig $\frac{{}^{n}\!A. \; {}^{n}\!A}{A. \; B}$, das ist, es ist die *Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Paar nach n Jahren noch übrig sey*, $= \frac{{}^{n}\!A. \; {}^{n}\!B}{A. \; B.}$.

Zusatz 4. Eben so ist die *Wahrscheinlichkeit, dass Ein gewisses Paar nach n Jahren ganz ausgestorben sey*, $= \frac{(A - {}^{n}\!A)}{A}. \; \frac{(B - {}^{n}\!B)}{B}$.

Zusatz 5. Die Wahrscheinlichkeit, dass von einem getrennten Paar die Person A noch lebe, $= \frac{A. \; (B - {}^{n}\!B)}{A. \; B}$; und die *Wahrscheinlichkeit*, dass B noch lebe und A todt sey $= \frac{{}^{n}\!B. \; (A - {}^{n}\!A)}{A. \; B}$.

107.

Anmerkung. Halley trug diese Sätze auch geometrisch vor, mittelst eines Parallelogramms. Es sey (Fig. 3.) A B ein Quadrat A N = N = A M, gleich der *anfänglichen Zahl der Paare;* A D = L, *die Zahl der aus A N Lebenden nach n Jahren;* A D′ = *l die Zahl der Lebenden aus A M zu derselben Zeit;* D N die Zahl

der

der *Gestorbenen aus AN*, nach *n* Jahren = G, und D′ N′ = *g*, die Zahl der *Gestorbenen* aus AM zu derselben Zeit; ferner DE, und HC parallel mit den Seiten AM, AN.

Nun ist die *anfängliche Zahl* der Paare zu der nach *n* Jahren, wie $N : \frac{L.\,l}{N} = NN : Ll$, und die *Wahrscheinlichkeit, dass ein anfängliches Paar nach n Jahren noch übrig sey* $= \frac{Ll}{NN}$.

Wenn also die Fläche des ganzen *Quadrats* die *anfängliche Summe* der Paare vorstellt, so giebt das *Rectangulum A F die Zahl der nach n Jahren übrigen Paare.*

Auf gleiche Art erhellet, dass die *Fläche* DC = G. l; HE = L. g und FB = G. *g*, die Summen der *halb* und *ganz ausgestorbenen* Paare vorstellen, wenn AB die Summe *aller* vorstellet, und $\frac{DC}{AB}$, $\frac{HE}{AB}$, $\frac{FB}{AB}$ die *Wahrscheinlichkeiten des Ausgestorbenseyns.*

Weil aber auch $N : \frac{N.\,{}^{n}\!A\,{}^{n}\!B}{A.\,B}$ wie die anfängliche Zahl der Paare zu den übrigen = A. B : ${}^{n}\!A.\,{}^{n}\!B$, und $\frac{{}^{n}\!A.\,{}^{n}\!B}{A.\,B}$ die *Wahrscheinlichkeit des Zusammenlebens* eines Paars nach *n* Jahren ist (§. 106), so kann, anstatt des *Quadrats*, dessen Seite = N ist, ein *Parallelogramm*, dessen eine Seite A, die andere B ist, gebraucht werden.

Man

Man mache A N = A, und A D = $\overset{n}{-}$A, ſo iſt DN = A — $\overset{n}{-}$A; imgleichen A M = B, und A H = $\overset{n}{-}$B ſo iſt H M = B — $\overset{n}{-}$B. Wird das Parallelogramm alsdenn durch die Linien DE parallel mit A M, und durch H C parallel mit A N getheilt, ſo können dieſe Theile auf dieſelbige Art gebraucht werden, wie vorher die Theile des Quadrats.

108.

Satz 26. Die mittlere Dauer des Zuſammenlebens (die Dauer der Coexiſtenz, die Verbindungsdauer) wird gefunden, wenn die in jedem Jahre übrigen Paare ſummirt, und ihre Summe durch die anfängliche Zahl derſelben dividirt wird.

Wird dieſe mittlere Dauer für ein Paar vom Alter *a*, und *b* bezeichnet durch C. $\overline{a\,b}$, und bedeutet $\overset{1}{-}$A, $\overset{2}{-}$A... daſſelbe was vorher, ſo iſt

$$C.\overline{a\,b} = \frac{1}{A.B}\left(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}A.\ \overset{3}{-}B + +\right)$$

Beweis. Es iſt für ſich ſelbſt klar. Denn das erſte Jahr durch haben beſtanden $\overset{1}{-}$A. $\overset{1}{-}$B; Paare, wenn die anfängliche Zahl derſelben A. B iſt (§. 103). Das zweyte Jahr durch $\overset{2}{-}$A. $\overset{2}{-}$B, dazu $\overset{3}{-}$A. $\overset{3}{-}$B das dritte Jahr durch u. ſ. f. Jede Zahl von übrigen Paaren in 1 multiplicirt, und addirt, oder die Zahl der übrigen Paare ſelbſt

selbst addirt, giebt die Dauer aller Paare zusammen. Diese Summe dividirt durch die Summe der anfänglichen Paare giebt die *mittlere Dauer.*

109.

Satz 27. Wenn statt der übrigen Paare für jedes Jahr die Zahl der getrennten genommen wird, so erhält man die mittlere Dauer des Ueberlebens der einen Person über die andere verbundene.

Beweis. Die Zahl der Paare, von denen A am Leben, B todt ist, ist für die folgenden Jahre

$= {}^{1}\!A.\ (B - {}^{1}\!B) + {}^{2}\!A\ (B - {}^{2}\!B) + +$

bis auf das höchste Lebensziel von A, oder bis ${}^{x}\!A\ (B - {}^{x}\!B)$. Alsdenn wird ${}^{x}\!A = o$, und noch mehr ${}^{x+1}\!A = o$, also die folgenden Glieder alle $= o$.

Wenn A jünger ist, als B, so ist x die *Ergänzung des Alters von A* gröser als die Ergänzung des Alters B, y. Wo ${}^{y}\!B = o$, da ist $B - {}^{y}\!B = B$ das ist, die Zahl der *Gestorbenen* der *anfänglichen Zahl gleich;* und für die folgenden Jahre ist der Factor $B - {}^{y+1}\!B$ dann auch $= B$.

Jede Zahl der Paare, worin A überlebend ist über B, für jedes Jahr in 1 multiplicirt, oder die Summe dieser Zahlen selbst genommen, und durch die Zahl der

anfänglichen Paare dividirt, giebt *im Durchſchnitt die Zeit für jedes einzelne Paar*, die A überlebet über B.

$$= \frac{{}^{1}_{-}A.\,(B - {}^{1}_{-}B) + {}^{2}_{-}A.\,(B - {}^{2}_{-}B) + \ldots + {}^{x}_{-}A\,(B - {}^{x}_{-}B)}{A.\ B.}$$

$$= S.\frac{{}^{x}_{-}A.(B - {}^{x}_{-}B)}{A.\ B}.$$

Eben ſo iſt *die mittlere Dauer des Überlebens von B*

$$= \frac{{}^{1}_{-}B.\,(A - {}^{1}_{-}A) + {}^{2}_{-}B\,(A - {}^{2}_{-}A) + \ldots + {}^{y}_{-}B\,(A - {}^{y}_{-}A)}{A.\ B}$$

$$= \frac{S\,{}^{y}_{-}B.\,(A - {}^{y}_{-}A)}{A.\ B}.$$ Hier iſt *y* die Altersergänzung von B.

Dieſs iſt die mittlere Dauer des *getrennten Lebens*, des *Lebens nach der Trennung*. Bey Eheleuten iſt es die mittlere Dauer des *Wittwer*- und des *Wittwenſtandes*.

IIO.

Satz 28. Die mittlere Zeit, die ein Paar ganz ausgeſtorben iſt, nach x Jahren, wenn x die Altersergänzung der jüngern Perſon iſt, das iſt, die Zeit, die es alsdenn ausgeſtorben iſt, wenn die anfänglichen Paare nothwendig alle ausgeſtorben ſeyn müſſen, iſt

$$= \frac{(A - {}^{1}_{-}A)\ (B - {}^{1}_{-}B)}{A\ \ B} + \frac{(A - {}^{2}_{-}A)\ ({}^{1}_{-}B - {}^{2}_{-}B)}{A\ \ \ B}$$

$$+ \ldots + \frac{(A - {}^{x}_{-}A)\ (B - {}^{x}_{-}B)}{A\ \ \ B} = S\,\frac{(A - {}^{x}_{-}A).\ (B - {}^{x}_{-}B).}{A\ B}$$

III.

Anmerkung. Es ist auch diese *Zeit des Ganzausgestorbenseyns der Ueberschuss der Altersergänzung der jüngsten Person, über die Dauer des längsten Lebens* von beyden, wie unten erwiesen werden soll.

Zusatz 1. *Die vier mittlern Zeiten*, nämlich, *die Dauer der Verbindung*, *die Dauer des Ueberlebens des einen* und *des andern*, *die Zeit des Ganzausgestorbenseyns*, sind zusammen so gross als die *Altersergänzung des jüngern Lebens*, denn für jedes Jahr ist

$$\frac{{}^{n}\!A.\ {}^{n}\!B}{A.\ B} + \frac{{}^{n}\!A.\ (B - {}^{n}\!B)}{A\ B} + \frac{{}^{n}\!B\ (A - {}^{n}\!A)}{A.\ B}$$

$$+ \frac{(A - {}^{n}\!A).\ (B - {}^{n}\!B)}{A\ B} = \frac{A\ B}{A\ B} = 1.$$

Solcher Glieder giebt es x in der ganzen Reihe, deren Summe also x ist.

II2.

Zusatz 2. Von diesen *vier* erwähnten Grösen darf nur Eine gesuchet werden, so kann daraus, und aus *der mittlern Lebensdauer für einzelne Personen*, der Wehrt der übrigen dreyen gefunden werden.

Ist die *Verbindungsdauer* berechnet, so ist die *Dauer des Ueberlebens von A über B.*

$$= \frac{{}^{1}\!A.\ (B - {}^{1}\!B)}{A.\ B.} + \frac{{}^{2}\!A\ (B - {}^{2}\!B)}{A.\ B} + +$$

$$= \frac{(\overline{}^{1}A + \overline{}^{2}A + +)}{A} - \frac{\overline{}^{1}A\,\overline{}^{1}B + \overline{}^{2}A.\overline{}^{2}B + +}{A\,B}$$

$$= E\,\overline{a} - C\,\overline{a\,b}.$$

Die *Dauer des Ueberlebens von B über A* iſt

$$= \frac{\overline{}^{1}B\,(A - \overline{}^{1}A) + \overline{}^{2}B\,(A - \overline{}^{2}A)}{A\,B} + +$$

$$= E\,\overline{b} - C\,\overline{a\,b}.$$

Und *die mittlere Zeit des Ganz ausgeſtorbenſeyns*

$$= \frac{(A - \overline{}^{1}A)\,(B - \overline{}^{1}B)}{A\,B} + \frac{(A - \overline{}^{2}A)\,(B - \overline{}^{2}B)}{A\,B} + +$$

$$= \frac{(AB + AB + +)}{AB} - \frac{(A.\,\overline{}^{1}B + A\,\overline{}^{2}B + +)}{A\,B}$$

$$- \frac{(B\,\overline{}^{1}A + B\,\overline{}^{2}A + +)}{AB} + \frac{(\overline{}^{1}A\,\overline{}^{1}B + \overline{}^{2}A\,\overline{}^{2}B + +)}{A\,B} =$$

$= x - (E\,\overline{b} + E\,\overline{a}) + C\,\overline{a\,b}$, wenn x die Altersergänzung des *jüngſten* Lebens iſt.

Und wiederum alle vier Gröſsen zuſammen geben $C\overline{ab} + E\overline{b} - Cab + E\overline{a} - C\overline{ab} + x - E\overline{b} - E\overline{a} + C\overline{ab} = x$.

113.

Zuſatz 3. Zu dem Ausdrucke für *die mittlere Dauer der Verbindung im §. 108.* wird noch $\frac{1}{2}$ als eine *Correction* zugeſetzet. Jener Wehrt iſt nur richtig, wenn bloſs *ganze* Jahre gerechnet werden. Alsdenn wird auch hier wie oben vorausgeſetzt, daſs *alle Trennungen der Paare*

Paare im Anfang des Jahrs geschehen. Allein für die Praxis muss man annehmen, dass sie im Lauf des Jahrs gleichförmig entstehen. Das ist denn so viel als jede aufhörende Verbindung habe noch bis zur Hälfte des Jahrs bestanden. Es ist also zu dem *ersten* Jahr noch zuzulegen $\frac{\Delta(AB)}{2\,A\,B}$, wenn $\Delta(AB)$ die *Differenz ist zwischen* AB und $\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B$, das ist zwischen der anfänglichen Zahl der Verbindungen und derer, die im Anfang des nächsten Jahrs noch übrig sind, oder die Zahl der im ersten Jahr aufgehobenen Verbindungen. Zu dem zweyten Jahr ist zuzulegen $\frac{\Delta(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B)}{2\,A\,B}$, und zum *x*ten Jahr $\frac{\Delta(\overset{x-1}{-}A.\ \overset{x-1}{-}B)}{2\,A\,B}$. Da nun

$$\frac{\Delta(AB)+\Delta(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B)+\ldots+\Delta(\overset{x-1}{-}A.\overset{x-1}{-}B)}{A\ \ B}=\frac{AB}{AB}=1,$$

so macht dieſs für alle Jahre zusammen $\frac{1}{2}$ aus. Man sehe auch die *Zusätze zu diesem Capitel.* *)

114.

Die XXII^te^ Tabelle enthält die *mittlere Dauer des Zusammenlebens* zwoer Personen nach der *Süssmilchischen* Mortalitätstafel, wenn der Unterschied am Alter nicht über 46 Jahre, und die jüngste Person nicht unter 15 Jahren alt ist. Es ist die Correction $\frac{1}{2}$ schon addirt. Diese Tabelle wird für die meisten Fälle hinreichen.

*) §. 1.

Die *Interpolation für die zwiſchenfallenden Jahre* wird gewöhnlich auf folgende Art vorgenommen. Iſt *a* das Alter von A = 30 Jahren, und *b* das Alter von B, 40 Jahr, ſo iſt C. $\overline{30.40}$ = 17,11 und C $\overline{30.45}$ = 15,51; die Differenz = 1, 6 für die Differenz von 5 Jahren im Alter von B. Dieſs macht für 2 Jahre Unterſchied 0,64. Alſo iſt C. $\overline{30.42}$ = 16,47.

Für a = 34, b = 42 Jahr rechnet man ſo. Es iſt C. $\overline{30.42}$ nach dem vorhergehenden 16, 47. Nun wird auf dieſelbe Art C. $\overline{35.42}$ berechnet, und gefunden 15, 65. Die Differenz C. $\overline{30.42}$ — C. $\overline{35.42}$ iſt = 16, 47 — 15, 65 = 0, 82, das iſt für 5 Jahre im Alter von A. Alſo für 4 Jahre 0, 66. Folglich iſt C. $\overline{34.42}$ = 15, 81.

115.

Satz 29. Nach der Vorausſetzung eines gleichförmigen Abſterbens iſt die mittlere Dauer des Zuſammenlebens ſo zu finden. Es ſey die Altersergänzung für das jüngere Alter *a*, α, und für das ältere *b*, β, ſo iſt die *mittlere Dauer ihrer Coexiſtenz*, *) oder $C.\overline{ab} = \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{6\alpha}\right)$ wozu $\frac{1}{2}$ als die Correction zuzulegen iſt.

Zuſatz. Wenn das Alter beyder gleich iſt, alſo auch $\alpha = \beta$, ſo iſt die Dauer der Coexiſtenz = $\frac{1}{3}\beta$.

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 4.

116.

Anmerkung. Braucht man die Dauer nicht sehr genau, so kann sie auf diese Art nach der Hypothese gesucht werden, nur dass alsdenn auch nach *Simpsons* Methode (Cap. II. §. 63.) die *doppelte mittlere Lebensdauer der einzelnen Personen*, genau berechnet, *für die Altersergänzung* genommen werde. Es weicht weiter ab, wenn man sie mit *Moivre* für den Abstand vom höchsten Alter nimmt, und dieß letztere auf 86 Jahre setzet.

Ex. 1. Es sey $a = 20$, $b = 40$ Jahr, so ist nach der XV^ten^ Tabelle die zwiefache mittlere Lebensdauer für $a = 2.\ 35,\ 03 = 70,\ 06 = \alpha$; und für $b = 2.\ 22,\ 64 = 45,\ 28 = \beta$.

Folglich $\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha} = 22,64 - 4,88 = 17,76$. Der wahre Wehrt ist 18,51. Die Differenz 0,75.

Ex. 2. Für $a = 20$, $b = 60$ ist $\alpha = 2,35,03 = 70,06$, und $\beta = 2.\ 12,\ 07 = 24,\ 14$. Also $\frac{1}{6} - \frac{24,14}{420,36} = 0,5 - 0,057 = 0,443$ und $24,14 \cdot 0,443 = 10,69$. Der genaue Wehrt ist 10, 70, die Differenz also fast nichts.

Ex. 3. Für $a = b = 15$ ist $\frac{1}{3}\beta = \frac{2.38,562}{3} = 25,7$. der wahre Wehrt 27, 68. Der Unterschied = 1,98.

Ex. 4. Für a = b = 60 iſt $\frac{1}{3}\beta = \frac{1}{3}$. 2, 12, 07 = 8, 046. Der wahre Wehrt 7, 48. Die Abweichung 0, 566.

Dieſe Abweichungen ſind für ſich noch etwas wichtig. Allein die davon abhangenden Abweichungen in dem Wehrte der Renten für das Zuſammenleben ſind ſchon geringer. Die meiſten male mögte man in der Praxis mit der auf ſolche Art gefundenen Dauer ſich begnügen. Allein im Ganzen iſt das doch nicht genau genug. Und weil es, wie gleich gezeiget werden ſoll, auch ſo ſehr mühſam nicht iſt, jene völlig genau zu haben, ſo iſt das Bedürfniſs ſo groſs nicht, zu Hypotheſen ſeine Zuflucht zu nehmen. Uebrigens wird es doch zu andern Abſichten nützlich, darnach zu rechnen.

117.

Methode die mittlere Dauer der Verbindungen zwoer Perſonen zu berechnen.

Hier will ich die Hülfstabelle einſchalten, deren ich ſchon oben (Cap. I. §. 89.) erwähnt habe. Sie dient, die Wehrte einer nach der natürlichen Ordnung der Zahlen ſteigenden *Leibrente*, auch die *mittlere Dauer der Verbindungen*, und in dem nächſtfolgenden Abſchnitte die *Wehrte der Verbindungsrenten* leicht zu berechnen.

A. Jahre.	B. Decremente.	C. Differenzen der Decremente.	D. Summen der Summen der Lebenden.	E. Summen der Summen der discontirten Zahlen der Lebenden.
0	250	+ 161	857202	210074, 50
1	89	+ 46	827219	197643, 02
2	43	+ 18	799231	186211, 54
3	25	+ 11	771993	175501, 21
4	14	+ 2	745416	165402, 01
5	12	+ 1	719457	155852, 21
6	11	+ 2	694091	146809, 31
7	9	+ 1	669304	138242, 31
8	8	+ 1	645084	130123, 42
9	7	+ 2	621420	122427, 04
10	5	+ 1	598303	115130, 35
11	4	0	575725	108212, 35
12	4	0	553679	101653, 78
13	4	0	532160	95437, 48
14	4	0	511164	89547, 87
15	4	0	490687	83969, 96
16	4	0	470725	78689, 45
17	4	0	451274	73692, 68
18	4	0	432330	68966, 60
19	4	— 1	412889	64498, 75
20	5	0	395947	60277, 22
21	5	0	378500	56290, 64
22	5	0	361544	52228, 15
23	5	0	345074	48978, 93
24	5	0	329085	45632, 67
25	5	0	313572	42479, 54
26	5	0	298530	39510, 16
27	5	— 1	283954	36715, 58
28	6	0	269839	34087, 28
29	6	0	256180	31617, 13
30	6	0	242972	29297, 38

A.	B.	C.	D.	E.
31	6	0	230209	27120, 32
32	6	0	218885	25078, 61
33	6	0	206994	25165, 27
34	6	— 1	195530	21373, 65
35	7	0	184487	19697, 42
36	7	0	173859	18130, 56
37	7	0	163640	16667, 35
38	7	0	153823	15302, [illegible]
39	7	0	144401	14029, 38
40	7	0	135367	12844, 08
41	7	0	126714	11741, 31
42	7	0	118435	10716, 44
43	7	0	110523	9765, 07
44	7	0	102971	8883, 93
45	7	— 1	95772	8066, 35
46	8	0	88919	7311, 27
47	8	0	82405	6614, 23
48	8	0	76228	5971, 84
49	8	— 1	70365	5380, 73
50	9	0	64828	4837, 71
51	9	0	59589	4339, 76
52	9	0	54655	3884, 02
53	9	0	50012	3467, 65
54	9	0	45651	3087, 97
55	9	0	41563	2742, 44
56	9	0	37739	2428, 66
57	9	0	34170	2144, 37
58	9	0	30847	1887, 44
59	9	0	27761	1655, 85
60	9	0	24903	1447, 70
61	9	— 1	22264	1261, 10
62	10	0	19835	1094, 56
63	10	0	17607	946, 39
64	10	0	15571	815, 69
65	10	0	13717	699, 17

A.	B.	C.	D.	E.
66	10	0	12035	597, 23
67	10	0	10515	507, 95
68	10	0	9147	430, 09
69	10	0	7921	362, 49
70	9	+ 1	6827	304, 06
71	9	0	5855	253, 78
72	9	+ 1	4995	210, 69
73	8	0	4238	173, 96
74	8	+ 1	3575	142, 81
75	7	0	2997	116, 51
76	7	+ 1	2496	94, 44
77	6	0	2064	76, 01
78	6	0	1694	60, 73
79	6	+ 1	1379	48, 13
80	5	+ 1	1113	37, 83
81	4	0	890	29, 47
82	4	0	704	22, 72
83	4	+ 1	550	17, 30
84	3	0	424	13, 00
85	3	+ 1	322	9, 63
86	2	0	240	7, 00
87	2	0	175	4, 98
88	2	0	124	3, 44
89	2	+ 1	85	2, 30
90	1	0	56	1, 48
91	1	0	35	0, 90
92	1	0	20	0, 50
93	1	0	10	0, 24
94	1	0	4	0, 09
95	1	+ 1	1	0, 02
96	0	0	0	

II8.

Es iſt dieſe Tabelle zwar nur allein nach der *Süſsmilchiſchen* Mortalitätstafel gemacht, aber ſie kann bey jeder andern Sterblichkeitsordnung leicht eingerichtet werden. Sie erfordert die oben (Cap. 2. §. 56.) gegebene Tabelle für einfache Leben. Aus der letztern kann jene in weniger als einer Stunde Zeit verfertigt werden. Es beſteht alles in einem leichten Addiren von Zahlen. Die ganze Arbeit, die etwas mühſam heiſsen kann, iſt die, daſs man in der erſten Tabelle für einzelne Perſonen die *discontirten Zahlen der Lebenden*, (die Zahlen in der Columne E,) berechne. Alsdenn iſt alles übrige ſo gut als eingerichtet.

Die vorſtehende Tabelle enthält in der Columne C (denn von A und B ſieht man durch den Anblick, was ſie ſind) die *Unterſchiede der Decremente in B.* Der Unterſchied eines Decrements von dem nächſtfolgenden wird jenem zur Seite geſetzet, und dieſer iſt *poſitiv*, wenn das folgende Decrement kleiner iſt, *negativ* im entgegengeſetzten Fall.

Die Columne D enthält hier die *Summe* der Zahlen in der Columne D der obigen Tabelle. Die Summen der in jedem Jahr Lebenden ſind von neuem von hinten an ſummirt, ſo daſs *die Zahl, welche bey einem Jahre ſtehet, die Summe iſt von allen Zahlen, welche in der obigen Tabelle bey demſelben Jahre ſtehet, und auf ſie bis ans Ende der Tabelle folgen.* Hier ſteht bey dem

Jahr 15 die Zahl 490687. Dieſs iſt die Summe von 19962, bey 15 Jahr in der obigen Tabelle, und aller folgenden Zahlen zuſammen.

Die *Summen der Lebenden* in der obigen Tabelle für ein gewiſſes Alter *a* ſind $\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A + + \overset{x}{-}A$. Wird dieſe Reihe durch $\int\overset{1}{-}A$ ausgedrückt, ſo kann die Zahl in der *gegenwärtigen Tabelle*, Columne D, bey demſelben Jahr bezeichnet werden durch $S.\int\overset{1}{-}A$. Sie enthält nämlich $(\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A + + + +) + (\overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A + +) + (\overset{3}{-}A + +) + +$

$= \int\overset{1}{-}A + \int\overset{2}{-}A + \int\overset{3}{-}A + + = S.\int\overset{1}{-}A.$

So weit geht die Tabelle zur Berechnung *der Verbindungsdauer*. Die letzte Columne E gehört zur Berechnung der *Renten*, die ſo lange zu zahlen ſind, als die Verbindungen dauern, davon nachher. Es iſt dieſe Columne E eben ſo durchs Summiren aus der Columne E der obigen Tabelle gemacht, wie die Zahlen dieſer letztern aus den discontirten Zahlen der Lebenden. Wenn die *Reihe der discontirten Zahlen der Lebenden* für ein gewiſſes Alter

$$= \frac{1}{r^a} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} \right)$$

bezeichnet wird durch $\int\frac{\overset{1}{-}A}{r^{a+1}}$, ſo iſt dieſs die Zahl,

welche

welche in der obigen Tabelle bey dem Jahre a ſtehet. Diejenige aber, welche hier in der Columne E bey a ſtehet, iſt

$$= \frac{1}{r^a}\left(\frac{{}^{1}\!A}{r^1} + \frac{{}^{2}\!A}{r^2} + \frac{{}^{3}\!A}{r^3} + + \frac{{}^{x}\!A}{r^x}\right.$$

$$\left. + \frac{{}^{2}\!A}{r^2} + \frac{{}^{3}\!A}{r^3} + + \frac{{}^{x}\!A}{r^x}\right.$$

$$\left. + \frac{{}^{3}\!A}{r^3} + + \frac{{}^{x}\!A}{r^x} + +\right.$$

$$= S.\int \frac{{}^{t}\!A}{r^{a+t}}.$$

Bey dem Gebrauch der letzten Tabelle muſs man die Columne B und C der erſten zugleich vor ſich haben. Ich befürchtete, die Tabelle möchte zu breit werden für den Raum der Seite, ſonſt hätten dieſe Columnen hier wieder eingerückt werden können.

119.

Aus dieſer Tabelle werden die *Wehrte der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen wachſenden Leibrenten* $L\overline{a}$ (§. 76. Cap. II.) *durch eine Diviſion gefunden.* Die Zahl *beym Alter* $a+t$ in der *Columne E*, wird durch die Zahl *der discontirten Lebenden* der Columne C der *erſten* Tabelle dividirt. Der Quotient iſt der *geſuchte Wehrt der ſteigenden Leibrente* (Cap. I. §. 89.) Der Quotient nämlich iſt

=

$$= \frac{1}{r^a} \cdot \frac{1}{A : r^a} \cdot \left(\frac{{}^{1}A}{r^1} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + + \frac{{}^{x}A}{r^x} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + + \frac{{}^{x}A}{r^x} \right).$$

Z. B. Das gegebene Alter sey 20 Jahr $= a$. Die bey 21 Jahr stehende Zahl ist 56290, 64. Die discontirte Zahl der Lebenden in der obigen Tabelle ist 224, 69. Daher $\frac{56290,64}{224,69} = 251, 64$. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben war der Wehrt 248, 805 (Cap. I. §. 79.)

120.

Ferner läst sich die *Dauer der Verbindung* sehr leicht finden, wenn man mit einer *Näherung* zufrieden seyn will, fast eben so leicht, als wenn sie nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben berechnet wird, (§. 115.) und noch wohl genauer auf folgende Art. Es sey das gegebene Alter von A wiederum a und die *Altersergänzung*, oder hier die doppelte mittlere Lebensdauer α; von B das *Alter* b, so wie B selbst die *Anfangszahl der Lebenden*. Auch sey b das gröste Alter.

1) Man dividire die Summe in der Columne D, bey dem Alter b, durch die *Anfangszahl* B.

2) Dividire diesen Quotienten von neuen durch die *Altersergänzung der jüngern Person*, durch α.

3) Dieser

Dieſer Quotient abgezogen von der *mittlern Lebensdauer der ältern Perſon*, giebt die *mittlere Dauer der Verbindung* beyder.

Ex. a = 20 Jahren; b = 40 Jahren, ſo iſt die zu 41 Jahr gehörige Summe der Columne D = 126714. Die Zahl der Lebenden für 40 Jahr iſt 374 und $\frac{126714}{374}$ iſt = 338, 82. Dieſs mit der Altersergänzung α, (oder hier der doppelten mittlern Lebensdauer genau berechnet,) = 70, 6 dividirt, 4, 8. Die mittlere Lebensdauer von B iſt aus Tab. XV. nach der *Süſsmilchiſchen* Tafel, 22, 64. Folglich 22, 64 — 4, 8 = 17, 84 = der *mittlern Dauer der Coexiſtenz*. Der wahre Wehrt iſt 18, 51. (Tab. XXII.). Die Abweichung alſo 0, 67.

Suchet man die Dauer nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben für die Altersergänzung (nämlich die genau berechnete mittlere Lebensdauer einzelner Perſonen doppelt genommen) (§. 116.), ſo erhält man zufolge des *zoſten Satzes* §. 115, worin nun β = 45, 28; α = 70, für die Verbindungsdauer $45,28\left(\frac{1}{2} - \frac{45,28}{6.70,6}\right) = 17,66$, wo die Abweichung 0, 85 iſt.

Ex. 2. Beyde Perſonen ſind 50 Jahr alt. Alſo α = 2. 16, 95 = 33, 9. Die Zahl, welche bey dem 51ſten Jahre ſteht, iſt 59589. Die Zahl der Lebenden für das Jahr 50 — 51 iſt 300. Alſo $\frac{59589}{300}$ = 198, 63.

Dieſs

Dieſs von neuem dividirt durch 33,9 giebt den Quotienten 5,86; und 16,95 — 5,86 = 11,09. Der genaue Wehrt iſt 10,97. Die Abweichung alſo 0,12.

Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben iſt die Verbindungsdauer = $\frac{1}{3}$. 2. 16,95. (§. 115.) = 11,19. Die Abweichung 0,13.

Den Beweis für dieſs Verfahren ſehe man in den *Zuſätzen* zu dieſem Capitel. *)

121.

Zu dem eigentlichen Zweck dieſer Tabelle gehöret die folgende *Methode*, *die Dauer der Verbindung für zwo Perſonen genau zu finden.*

Das Alter der jüngern ſey *a*, der ältern *b*.

1) Den Summen in der Columne D, von der an, welche bey dem Jahre $b+2$ ſteht, ſchreibe man die *Differenzen in der Columne* C zur Seite, ſo daſs bey der Summe des Jahrs $b+2$, die Differenz für das Jahr *a* geſetzet werde, und ſo die folgenden Differenzen jede bey der folgenden Summe.

Man hats bequemer, wenn die Differenzencolumne beweglich iſt. Dieſer Streiffen darf dann nur den Summen zur Seite gelegt werden. Bey den Differenzen nach der Süſsmilchiſchen Tafel iſt das nicht nöthig, weil man ohne dieſs gleich ſieht, welche Summen auszuheben ſind.

*) §. 39.

ſind. *Jede Summe wird in die zur Seite ſtehende Differenz multiplicirt*, und dieſe Producte bringt man in eine Summe.

Dieſs kann der beſchwerlichſte Theil der Arbeit ſeyn. Allein bey der *Süſsmilchiſchen* Tafel iſt es keine, weil alle Differenzen entweder o, oder 1 ſind. Die Summen, wobey die letztern ſtehen, werden alſo nur ausgeſchrieben und addirt. Weil aber die Differenzen bald *poſitiv*, bald *negativ* ſind, ſo müſſen die poſitiven und negativen Producte (hier die Summen ſelbſt) beſonders ſummirt, und am Ende von einander abgezogen werden. Es verſteht ſich alsdenn, daſs wenn die poſitiven mehr ausmachen, ſo iſt das ganze poſitiv, oder zu addiren; dagegen zu ſubtrahiren, wenn die negativen die gröſsten ſind.

2) Man multiplicire die Summe der Columne D, welche bey $b+1$ ſteht, mit dem Decrement des erſten Jahrs der Anfangszahl A, nämlich mit ΔA.

3) Von dieſem letztern Product ziehe man die vorher gefundene Summe der Producte ab, (oder *addire* ſie, wenn ſie *negativ* iſt) und dividire den Reſt durch das Product der Anfangszahlen A. B.

4) Den gefundenen Quotienten ziehe man ab von der *corrigirten mittlern Lebensdauer der ältern Perſon* aus der Tabelle, ſo bekommt man *die Dauer der Verbindung*.

Dieſe

Diese Vorschriften sind in folgendem Ausdruck enthalten

$$C\overline{ab} = E.\overline{b} - \frac{1}{AB} \cdot \left(\Delta A.\, S.\int^{1} B - \Delta\Delta A.\, S.\int^{2} B - \Delta\,\Delta^{-1} A\, S.\int^{3} B - \right).$$

Zusätze zu diesem Cap. *)

Es ist $E.\overline{b}$ die *mittlere Lebensdauer* für das Alter *b*; ΔA das *Decrement* der Zahl A, die zum Jahr *a* gehört; $\Delta\Delta A$ die *Differenz* für das Jahr *a*; $\Delta\Delta^{-1} A$ für das Jahr $a+1$, u. s. f. Auch $S.\int^{1} B$ die Summe der Columne D, beym Jahr $b+1$; $S.\int^{2} B$, beym Jahr $b+2$.

Folgendes Exempel wird zeigen, wie viel oder wenig die Weitläuftigkeit der Arbeit auf sich habe. Es sey $a = 15$ Jahr und $b = 20$ Jahr.

1) Setzet man die Differenz beym Jahr 15 gegen die Summe bey 22 in Columne D, das ist, bey $S.\int^{2} B$, so übersieht man gleich, dass jede Differenz zu einer Summe gehöre, die um 7 Jahr weiter fällt. Man schreibet also nur

für die Differenzen bey den Jahren			*die Summen bey den Jahren.*		
19)	—	1	26)	—	298530
27)	—	1	34)	—	195530
34)	—	1	41)	—	126714
45)	—	1	52)	—	54655
49)	—	1	56)	—	37739
61)	—	1	68)	—	9147
				—	722315

*) §. 7.

	Ferner				
70)	+	1	77)	+	2064
72)	+	1	79)	+	1379
74)	+	1	81)	+	890
76)	+	1	83)	+	550
79)	+	1	86)	+	240
80)	+	1	87)	+	175
83)	+	1	90)	+	56
85)	+	1	92)	+	20
89)	+	1	96)	+	00
				+	5374
				—	722315
				—	716941

2) Bey dem Jahr 21 ſteht die Summe 378500. Das Decrement für das Jahr 15 iſt 4; alſo 4. 378500 = 1514000, wozu 716941 zu *addiren* iſt, weil die letzte Zahl *negativ* iſt. Beydes macht 2230941.

3) Dieſs dividirt durch das Product der Anfangszahlen der Lebenden im 15ten und 20ſten Jahre, das iſt, durch 511. 491 = 250901. giebt 8,89. Und da nun die mittlere corrigirte Lebensdauer einer 20jährigen Perſon 35,03 iſt, ſo bekommt man 35,03 — 8,89 = 26,14 die Dauer der Coexiſtenz genau.

Ex. 2. Beyde ſind 50 Jahr alt, ſo gehören zu den jedesmaligen *Differenzen* die *Summen*, welche zwey Jahre weiter ſtehen. Man ſchreibt alſo aus der Tabelle die Summe

63)	— 17607, 72)	+	4995
	74)	+	3575
	76)	+	2496
	78)	+	1694
	81)	+	890
	82)	+	704
	85)	+	322
	87)	+	175
	91)	+	35
		+	14886
		—	17607
		—	2721 Hierzu wird
addirt 9.	59589	= +	536301
	Summa		539022

dividirt durch 300.309 = 5, 99

Die mittlere Dauer für 50 Jahr ist 16, 95. Also die Dauer der Coexistenz = 10, 96.

122.

Anmerkung. Nach der *Northamptoner* und der Schwedischen Tabelle sind die Differenzen zwar nicht, wie bey der *Süssmilchischen* nach dem 15ten Jahr, alle entweder 1 oder 0. Aber dennoch ist die Arbeit weder mühsam noch langweilig. Eine Mortalitätstafel als die ist, welche *du Pré de Saint Maur* von Paris und der umliegenden Gegend bekannt gemacht, würde mehr Multiplicationen nothwendig machen, und mit grösern Zahlen, weil die Differenzen grösere Zahlen sind. In solchen Fällen könnte man *statt der Differenzen von*

neuen ihre Unterſchiede nehmen und damit arbeiten, nur müſsten alsdenn auch in einer neuen Hülfstabelle die *Summen der Summen* in der hieſigen Tabelle abermals ſummirt werden. *) Wenn man eine ſolche Tabelle vor ſich hat, wie die nach dem oben (Cap. I. §. 65.) geſchehenen Vorſchlag abzuändernde *Süſsmilchiſche* ſeyn würde, wo nämlich die *Differenzen der Decremente* entweder ganz durch einerley bleiben, oder doch nur ein oder zweymal ſich ändern; ſo iſt die Arbeit noch viel kürzer, wenn man ſich vorher nur die zuletzt erwähnte neue Hülfstabelle gemacht hat. Ein mittelmäſsig fertiger Calculator thut das in einer Stunde.

Uebrigens iſt hierbey noch zu merken, daſs es den Gebrauch dieſer Methode nicht hindert, wenn man auch für die gegebenen Perſonen *eine verſchiedene Sterbens-Ordnung* annehmen muſs; wenn ſie z. B. von verſchiedenen Geſchlechtern ſind, und jedes Geſchlecht ſeine eigene Mortalitätstafel haben ſoll. Nur verſteht ſichs dann, daſs man zwo Hülfstabellen haben, und jedesmal die Zahlen aus der dazu gehörigen nehmen müſſe.

123.

Satz. 30. Iſt die mittlere Verbindungsdauer für zwo Perſonen vom Alter a, und b gegeben, $\overline{Cab}$, ſo wird die Coexiſtenz für zwo andre, um gleich viele Jahre (n) älter, als jene, gefunden, wenn man von der erſten

Dauer

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 8.

Dauer die Summe der ersten (n) Glieder obiger Reihe (§. 102.), wodurch sie gegeben wird, abzieht, und den Rest durch das Product der zu den Jahren a und b gehörigen Anfangszahlen multiplicirt, und wiederum durch das Product der zu den Jahren a+n, und b+n gehörigen, dividirt.

Beweis. Es ist

$$C.\overline{ab} = \frac{1}{A.B}\left(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B + + \overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B\right)$$

$$+ \frac{1}{A.B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right).$$ Man setze das erste Stück $= Q$, so ist

$$C.\overline{ab} - Q = \frac{1}{A.B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + \overset{n+2}{-}A.\overset{n+2}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right)$$

Das ist die mittlere Dauer der Verbindung nach dem $n$ten Jahre, oder über das $n$te Jahr hinaus gerechnet. Nun ist auch

$$\frac{1}{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right) = C.\overline{\overline{(a+n)(b+n)}}.$$

Das ist die Coexistenz zweyer vom Alter $a+n$ und $b+n$.

Folglich $C.\overline{(a+n).(b+n)} = \frac{A.B}{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B} \cdot (C.\overline{ab} - Q)$.

124.

Zuſatz 1. Wenn $n = 1$, ſo iſt $Q = \frac{\frac{1}{A}\,\frac{1}{B}}{A.\ B}$.

Alſo $C\overline{(a+1)(b+1)} = \frac{A.\ B}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}}\left(C\overline{ab} - \frac{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}}{A.\ B}\right)$

$= \frac{A.\ B}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}} \cdot C\overline{ab} - 1.$

Wenn $A.\ B - \frac{1}{A}.\frac{1}{B} = \Delta\ (A.\ B)$, ſo iſt

$C\overline{(a+1)(b+1)} = C\overline{ab}\left(1 + \Delta\ \frac{(A\ B)}{\frac{1}{A}\,\frac{1}{B}}\right) - 1,$

Aber $\Delta\ (AB)$ iſt $= A\,\Delta\,B + B\,\Delta\,A - \Delta\,A.\,\Delta\,B.$

Zuſatz 2. Auch iſt $C\overline{ab} = \frac{\frac{1}{A}\,\frac{1}{B}}{A.\ B}(C\overline{(a+1)(b+1)} + 1)$

$= C\overline{(a+1)(b+1)} + 1 - C\overline{(a+b)(b+1)}.\ \frac{\Delta\,A\,B}{A.\ B}$

das iſt, aus der *Dauer der Verbindung zweer Perſonen wird die Dauer für zwo andre um 1 Jahr jüngere, gefunden.*

Anmerkung 1. Wenn nur ein Jahr Unterſchied des Alters bey beyden iſt, ſo bekommt man nach dieſen Formeln faſt eben ſo leicht die Wehrte, als nach der oben (§. 114.) gezeigten Art zu interpoliren, und man erhält ſie genauer.

Ex. Es ſey $a = 15$, $b = 20$, ſo iſt nach der Tabelle XXII. $C\overline{ab} = 26, 12.$ Man ſuche die

Dauer

Dauer der Verbindung für 16 und 21 Jahre. Es iſt $A = 511$, $B = 491$, $\Delta A = 4$; $\Delta B = 5$, und $\overset{1}{-}A = 507$; $\overset{1}{-}B = 486$. Alſo $511 \cdot 5 + 491 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 4499$; $\overset{1}{-}A \overset{1}{-}B = 246402$; und $\frac{4499}{246402} = 0,018$.

Nun nimmt man $26,12 - 1 = 25,12$, dazu addirt $26,12 \cdot 0,018 = 0,47$. Alſo iſt $\overline{C.16.21} = 25,12 + 0,47 = 25,59$. Die obige Interpolationsmethode giebt 25, 54, mit faſt eben ſo vieler Rechnung.

Anmerkung 2. Wenn man nach der Methode im §. 121. für ein Paar z. B. von 15 und 20 Jahren die Verbindungsdauer berechnet, ſo zeiget ſich zugleich, welche Zahlen aus der erſten Summe, die nach n. 1. zu ſuchen iſt, und die meiſte Mühe macht, ausfallen, im Fall *beyde* Perſonen 5, 10 und ſo mehrere Jahre älter ſind, Und da nun dieſer Unterſchied des Alters derſelbe bleibt, ſo kommen auch *dieſelben Differenzen* der Columne B *bey denſelben Summen* der Columne D zu ſtehen. Der erſten Vorſchrift kann alſo auf einmal für das Paar zu 15 und 20, und für alle ältere, die um gleich viele Jahre es ſind, ein Genüge geſchehen. Das übrige, was denn noch für jedes ältere Paar inſonderheit zu thun iſt, macht nicht viel aus. So erhält man durch die Rechnung für ein Paar, faſt zugleich die Reſultate für mehrere.

Zweyter Abſchnitt.

Von den Verbindungsrenten zwoer Perſonen.

125.

Erklärung.

Der *baare Wehrt der Verbindung* oder *des Zuſammenlebens* zwoer Perſonen *(der Wehrt der Coexiſtenz)* iſt der baare Wehrt einer jährlichen Rente 1, welche am Ende jedes Jahrs ſo lange ausgezahlt wird, als zwo Perſonen von gegebenen Alter zuſammen leben. *The Value of Annuity of joint Lives*, und kürzer *the Value of joint Lives.* Bey *Eheleuten* iſt es die *Ehezeitrente* oder die *Eherente.* Sie wird in dem folgenden bezeichnet durch $\lambda\overline{ab}$, wo a und b das Alter der Perſonen iſt.

126.

Satz 31. Der Wehrt der Verbindungsrente zwoer Perſonen von dem Alter a und b oder $\lambda\overline{ab}$, *iſt*

$$= \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{r^2} + + \right)$$

wenn r der Zinsfuſs, und $A, \overset{1}{-}A, \overset{2}{-}A, B, \overset{1}{-}B, \overset{2}{-}B$ wiederum die Zahlen aus der Mortalitätstabelle ſind. Alſo wenn β die *Altersergänzung* von dem gröſsern Alter b iſt, und die Reihe $\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{r^2} + + \frac{\overset{\beta}{-}A\ \overset{\beta}{-}B}{r^\beta}$

durch

durch $\int \frac{{}^{\beta}A \cdot {}^{\beta}B}{A.B\,r^{\beta}}$ bezeichnet wird, so ist $\lambda\overline{ab}$

$= \int \frac{{}^{\beta}A \; {}^{\beta}B}{A.B\,r^{\beta}}$.

Beweis. Die Theile der Reihe ${}^{1}A\;{}^{1}B,\; {}^{2}A\;{}^{2}B$, und so ferner, drücken für jedes Jahr die noch bestehenden Paare aus, die von A. B anfänglichen Paaren übrig sind, und an welche die Rente 1 zu zahlen ist. Davon ist also der baare Wehrt $\frac{{}^{1}A\;{}^{1}B}{r}$; $\frac{{}^{2}A\;{}^{2}B}{r^2}$ und so ferner. Folglich für *jedes einzelne Paar im Durchschnitt*, $\lambda\overline{ab}$

$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^{1}A\;{}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A\;{}^{2}B}{r^2} + + \right)$.

127.

Satz 32. Der baare Wehrt einer Rente, welche an eine der gegebenen Personen nach der Trennung lebenswierig bezahlet werden soll (der Wehrt des Ueberlebens, die Wittwer- oder die Wittwenrente bey Eheleuten) ist für eine Person, die zu A gehört

$= \frac{1}{A.B.} \cdot \left(\frac{{}^{1}A\,(B - {}^{1}B)}{r} + \frac{{}^{2}A\,(B - {}^{2}B)}{r^2} + + \right)$

$= \frac{1}{A.B} \cdot B. \left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + \frac{{}^{3}A}{r^3} + + \right)$

$- \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^{1}A\;{}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A\;{}^{2}B}{r^2} + + \right)$

$= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$.

Für

Für die vom Alter b, die zu B gehört, iſt der Wehrt des Ueberlebens

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^{1}B.\ (A - {}^{1}A)}{1} + \frac{{}^{2}B\ (A - {}^{2}A)}{1^2} + + \right)$$

$$= \lambda \overline{b} - \lambda \overline{a\,b} = \int \frac{{}^{1}B}{B\,1} - \int \frac{A.B}{A\,B\,1}.$$

Beydes erhellet aus §. 109.

128.

Zuſatz 1. Sollte die Rente 1 bezahlet werden für jedes Jahr, das ein Paar zuſammenlebender Perſonen *ganz ausgeſtorben* iſt, alſo nach dem Tode aller beyder, und zwar ſo lange, bis beyde nach den Tabellen durchaus geſtorben ſeyn müſſen, das iſt, ſo viele Jahre als die *Altersergänzung der jüngern Perſon* groſs iſt; wie denn ſo eine Art von *Waiſenpenſionen* vorkommen kann; ſo iſt *der baare Wehrt des Ganzausgeſtorbenſeyns*

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{(A - {}^{1}A)\ (B - {}^{1}B)}{1} + \right.$$

$$\left. \frac{(A - {}^{2}A)\ (B - {}^{2}B)}{1^2} + + \right) = \int \frac{(A - {}^{\alpha}A).\ (B - {}^{\alpha}B)}{1^{\alpha}}$$

wo α die Altersergänzung der jüngern iſt. Oder wenn ${}^{1}T, {}^{2}T, {}^{3}T + +$ die Zahl der nach 1, 2, 3 + + Jahren *Verſtorbenen von A;* und ${}^{1}t, {}^{2}t, {}^{3}t + +$ die *Verſtorbenen von B,* bezeichnen,

=

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^{1}T \; {}^{1}t}{r} + \frac{{}^{2}T. \; {}^{2}t}{r^2} + + \right) \S. \; 110.$$

Dieser Wehrt kann bezeichnet werden durch $\lambda \overline{\overline{ab}}$.

129.

Zusatz 2. Ist α die *Altersergänzung der jüngern*, β *der ältern Person*, so bricht die Reihe

$$\lambda \overline{\overline{ab}} = \frac{1}{AB} \left(\frac{{}^{1}A \; {}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A \; {}^{2}B}{r^2} + + \right)$$

bey dem βten Jahre ab, so dass $\frac{{}^{\beta}A \; {}^{\beta}B}{r^{\beta}}$ das letzte Glied ist. Hier ist ${}^{\beta}B$ schon $= o$; und so in allen folgenden.

Zusatz 3. Alle vier Wehrte, der der *Coexistenz*, $\lambda \overline{ab}$, des *Ueberlebens* von A, $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab}$, *des von B*, $\lambda \overline{b} - \lambda \overline{ab}$, und des *Ganzausgestorbenseyns* $\lambda \overline{\overline{ab}}$ *zusammen, machen den Wehrt einer Zeitrente auf* α *Jahre*, oder auf die Altersergänzung des jüngern gegebenen Alters a, aus.

Es ist nämlich diese Summe für jedes Jahr, z. B. für

das $m$te, $\frac{{}^{m}A. \; {}^{m}B}{AB r^m} + \frac{{}^{m}A. \; (B - {}^{m}B)}{AB r^m} +$

$\frac{{}^{m}B. \; (A - {}^{m}A)}{A.B r^m} + \frac{(A - {}^{m}A). \; (B - {}^{m}B)}{AB r^m} = \frac{1}{r^m}$.

Also für alle α Jahre zusammen, $= \int \frac{1}{r^{\alpha}}$.

130. *Zu-*

130.

Zuſatz 4. Die Reihe der Differenzen

$$\frac{A.\ B - {}^{1}\!A\ {}^{1}\!B}{A\,B\,r} + \frac{{}^{1}\!A.\ {}^{1}\!B - {}^{2}\!A.\ {}^{2}\!B}{A\,B\,r^2}$$

$$+ + \frac{{}^{n-1}\!A.\ {}^{n-1}\!B - {}^{n}\!A.\ {}^{n}\!B}{A.\,B\,r^n} \text{ ſey} = R.$$

Addirt man dieſe zu $\lambda\overline{a\,b}$, ſo bekommt man

$$\left(\frac{AB}{ABr} + \frac{{}^{1}\!A\ {}^{1}\!B}{ABr^2} + \frac{{}^{2}\!A\ {}^{2}\!B}{AB.r^2} + + \frac{{}^{n+1}\!A.\ {}^{n-1}\!B}{ABr^n}\right)$$

das iſt, weil das letzte Glied in $\lambda\overline{a\,b}$, nämlich

$$\frac{{}^{n}\!A\ {}^{n}\!B}{A\,B} = o \text{ iſt} = \frac{A\,B}{ABr} + \frac{\lambda\overline{a\,b}}{r}.$$

Alſo $\lambda\overline{a\,b} + R = \frac{1}{r} + \frac{\lambda\overline{a\,\beta}}{r}$. Daraus wird

$$\lambda\overline{a\,b} = \frac{1 - r.\,R.}{r - 1} = p\,(1 - rR) \text{ weil } p = \frac{r}{r-1}.$$

Es thut alſo dieſe *Reihe der Differenzen* dieſelben Dienſte, wie oben bey dem Wehrt der Leibrente, §. 59. Es iſt auch *r R der baare Wehrt einer Summe 1, welche bey aufhörender Verbindung zweyer Perſonen zahlbar iſt.*

131.

Zuſatz 5. Da aber ${}^{1}\!A\ {}^{1}\!B = (A - \Delta A)\,(B - \Delta B)$, ${}^{n}\!A.\ {}^{n}\!B = ({}^{n-1}\!A - \Delta\ {}^{n-1}\!A).\ ({}^{n-1}\!B - \Delta\ {}^{n-1}\!B)$, ſo iſt auch

$$R = \frac{A.\Delta B}{ABr} + \frac{{}^{I}\!A\ \Delta\ {}^{I}\!B}{ABr^2} + + \\ + \frac{B\,\Delta\,A}{ABr} + \frac{{}^{I}\!B\ \Delta\ {}^{I}\!A}{ABr^2} + + \\ - \left(\frac{\Delta A.\Delta B}{AB.r} + \frac{\Delta\ {}^{I}\!A.\ \Delta\ {}^{I}\!B}{AB.r^2} + + \right)$$

Allein ob hier gleich ΔA, ΔB kleine Zahlen sind, so wird man doch nicht kürzer abkommen, wenn man diese drey Theile von R erst einzeln, daraus R, und dann aus R wiederum $\lambda\,\overline{a\,b}$ berechnen will.

Diese Theile von R aber können durch andere Theile, die einzeln leichter zu finden sind, gesucht werden, zumal bey der Süssmilchischen Tafel, wo die Differenzen der Decremente entweder $= 1$, oder $= 0$ sind.

Dieses Verfahren ist in den *Zusätzen* weiter erörtert. *) Hier will ich darum nicht weitläuftiger davon handeln, weil für die Praxis das nächstfolgende um ein vieles kürzer und leichter ist.

132.

Methode die Verbindungsrenten zwoer Personen leicht zu finden.

Die im nächstvorhergehenden Abschnitte beygebrachte Hülfstafel wird auf dieselbige Art zur Berechnung

*) §. 10.

nung der *Verbindungsrenten* gebraucht, wie bey Berechnung der Dauer. Aller Unterschied besteht fast darin, dass hier die Zahlen der Columne E, die zwoten Summen der *discontirten Zahlen* der Lebenden genommen werden.

Die allgemeine Formel ist

$$\lambda_{\overline{ab}} = \int \frac{{}^{1}\!B}{Br} - \frac{1}{AB}\,\Delta A\, S.\int \frac{{}^{1}\!B}{r}$$

$$+ \frac{1}{AB}\cdot\Big(\Delta\Delta A.\, S.\int \frac{{}^{2}\!B}{r^2} +$$

$$\Delta\Delta {}^{1}\!A.\, S.\int \frac{{}^{3}\!B}{r^3} + \Delta\Delta {}^{2}\!A.\, S.\int \frac{{}^{4}\!B}{r^4} +$$

$$\Delta\Delta {}^{n-2}\!A\; S.\int \frac{{}^{n}\!B}{r^n}\Big).$$

Dieser Ausdruck enthält folgendes Verfahren.

1) *Die Differenzen* aus der Columne C, von der an, welche zu dem jüngsten gegebenen Alter *a* gehört, schreibe oder lege man zur Seite der Zahlen der Columne E, so dass die erste Differenz $\Delta\Delta A$ bey der Summe, welche zu dem Jahre $b+2$ gehört, komme, wo b das älteste gegebene Leben ist; die folgenden bey den folgenden der Ordnung nach.

Nun wird jede Differenz in die beystehende Zahl multiplicirt, und aus diesen Producten wird eine Summe gemacht, die *verneinend* oder *bejahend* ist, je nachdem die Producte aus den *verneinenden* Differenzen, oder die entgegengesetzten das meiste ausmachen.

2) Auch

2) Auch wird das *Decrement* des Jahrs a, ΔA, multiplicirt in die Summe aus E, beym Alter $b+t$. Dieſs Product iſt $\Delta A\, S.\int \frac{t}{r} B$.

3) Die nach der erſten Regel gefundene Summe der Producte wird *abgezogen* von dieſem letztern, wenn jenes *poſitiv* (hinzugeleget, wenn es *negativ*) iſt, und dieſer *Reſt* (oder Summe) wird durch das Product der Anfangszahl A in die discontirte Anfangszahl B, das iſt, durch $\frac{A.B.}{r^b}$, *dividirt*.

4) Dieſen Quotienten zieht man von der *Leibrente für das ältere gegebene Leben* ab, ſo bekommt man den Wehrt der Verbindung beyder Perſonen vom Alter a und b.

133.

Es iſt dieſe Methode hier eben ſo kurz, wie im vorigen Abſchnitt bey der mittlern Dauer der Verbindung. Uebrigens findet die dortige Anmerkung in §. 122. auch hier Statt.

Ex. 1. a ſey 15 Jahr, b = 20 Jahr, ſo ziehe man

1) aus der Tabelle, und zwar aus der Columne E

Für die Differenzen bey den Jahren.			Die Summen bey den Jahren.		
19)	—	1	26)	—	39510, 16
27)	—	1	34)	—	21373, 65
34)	—	1	41)	—	11741, 31
45)	—	1	52)	—	3884, 02
49)	—	1	56)	—	2428, 66
61)	—	1	68)	—	430, 09
				—	79367, 89
	Ferner.				
70)	+	1	77)	+	76, 01
72)	+	1	79)	+	48, 13
74)	+	1	81)	+	29, 47
76)	+	1	83)	+	17, 30
79)	+	1	86)	+	7, 00
80)	+	1	87)	+	4, 98
83)	+	1	90)	+	1, 48
85)	+	1	92)	+	0, 50
89)	+	1	96)	+	0, 00
				+	184, 87
				—	79367, 89
				—	79183, 02

2) Bey dem Jahr 21 ſteht die Summe 56290, 64. Das Decrement für das Alter 15 Jahr, oder Δ A, iſt 4. Alſo 4. 56290, 64 = 225162, 56. Dazu die vorige negative Summe, weil ſie negativ iſt, addirt, giebt 304345, 58.

3) Das Product AB: r^b iſt 511. 224, 09 (aus der obigen Tafel §. 56.) = 114509, 99 und $\frac{304345, 58}{114509, 99}$ = 2, 6578. Dieſen Quotienten von der Leibrente für

das

das Alter 20 Jahr, 16, 7905 abgezogen, hinterläßt 14, 1327, als den Wehrt der Verbindungsrente für 15 und 20 Jahre.

Ex. 2. Sind beyde *a* und *b* 50 Jahre, so sind

1) die aus der Tabelle zu ziehenden Summen

63)	—	946, 39	72)	+	210, 69
			74)	+	142, 81
			76)	+	94, 44
			78)	+	60, 73
			81)	+	29, 47
			82)	+	22, 72
			85)	+	9, 63
			87)	+	4, 98
			91)	+	0, 90
				+	576, 37
				—	946, 39
				—	370, 02

2) Bey dem Jahr 51 steht in der Columne E die Zahl 4339, 76, und das Decrement für das Jahr 50 ist 9; also 9. 4339, 76 = 39057, 84. Dazu addirt 370, 02, macht 39427, 86. Dieses dividirt durch das Product aus der Zahl der Lebenden und der discontirten Zahl derselben für das Jahr 50, das ist durch 300. 42, 21 = 12663, so wird $\frac{39427, 86}{12663} = 3, 1136$.

3) Diesen Quotienten abgezogen von der Leibrente für 50 Jahre, 10, 7961 hinterläßt 7, 6825, als den Wehrt der Verbindung.

Den Beweis für die allgemeine Richtigkeit dieses Verfahrens sehe man in den *Zusätzen* zu diesem Capitel. *)

134.

Satz 33. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben ist der Werth der Verbindungsrente zweier Personen, A und B, vom gegebenen Alter a und b so gross, als die Differenz zwischen der beständigen Leibrente der erstern und dem Quotienten, der herauskommt, wenn die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsende Leibrente für dieselbe ältere Person, durch die Altersergänzung (hier durch die doppelte mittlere Lebensdauer) der jüngern dividirt wird. Es ist $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{L\overline{b}}{\alpha}$, wo $L\overline{b}$, wie oben, eine nach der Ordnung der Zahlen steigende Rente für das Alter *b* ausdrucket; α aber die Altersergänzung zu dem gegebenen Alter *a*, oder hier, die doppelte mittlere Lebensdauer derselben ist. Den Beweis siehe in den *Zusätzen*. **)

135.

Anmerkung. 1. Folgt man gänzlich dieser Hypothese, nimmt also auch die *Altersergänzung* in ihrem eigentlichen Sinn, für den Unterschied zwischen dem gegebenen Alter und dem höchsten Lebensziel, in welchem Fall

*) §. 11.

**) §. 12. 13. 14.

Fall denn auch die mittlere Lebensdauer die hypothetische, nicht die wahre Hälfte davon ist, so würde auch der Wehrt der einfachen Leibrente nach derselben Voraussetzung genommen werden müssen; aber weil man weiss, dass die so gefundenen Wehrte zu weit von den wahren abgehen, so sucht man sie so, dass die Hypothese nur zu Hülfe kommt. Auch der oben Cap. II. §. 79. berechnete Wehrt für eine steigende Leibrente auf das Alter 20 Jahr, ist nicht durchaus der Hypothese gemäss.

136.

Zusatz. Nach der Süssmilchischen Tafel, oder einer jeden andern, nach der das Absterben nicht gleichförmig erfolgt, kann die Verbindungsrente auch nicht genau *) nach $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} L\overline{b}$ genommen werden. Will man aber nur *nähernde* Wehrte haben, so sind diese hinreichend, die sich mittelst der obigen Hülfstabelle gar leicht finden lassen.

Es sey z. B. $a = 15$; $b = 20$, so wird $L\overline{b}$ durch eine Division aus der Tabelle gefunden (nach §. 119.) 251,64. Die Altersergänzung zu 15 Jahren ist 81; und die Leibrente $\lambda\overline{b}$ nach dem 4 Proc. Zinsenfuss ist 16,7905. Nun hat man $16,7905 - \frac{251,64}{81} = 13,6838$.

Dieſs weicht vom wahren Wehrt 14, 1327 um 0,4489 ab.

*) *Zusätze* zu diesem Capitel. §. 16.

Nimmt man *ſtatt der Altersergänzung* die *doppelte mittlere Lebensdauer*, die für 15 Jahre 77,12 iſt, ſo erhält man $16,7905 - \frac{251,64}{77,12} = 13,3274$, welches um 0,6053 abweicht.

Noch ein Beyſpiel. Es ſey $a = 50 = b$. Alsdenn iſt aus der Tabelle (nach §. 119.) $\frac{4239,76}{42,21}$, (nämlich die beym Jahr 51 ſtehende Zahl der Columne E dividirt durch die Zahl der Lebenden bey 50 Jahr) $= 102,814 = L\overline{b}$, und weil hier α die Altersergänzung 46 Jahre, und die einfache Leibrente für 50 Jahr $= 10,7961$ iſt, ſo erhält man $10,7961 - \frac{102,814}{46}$ $= 8,5610$, welches von dem wahren Wehrt 7,6825 um 0,8785 unterſchieden iſt. Will man aber ſtatt der Altersergänzung die doppelte mittlere Lebensdauer gebrauchen, welche für 50 Jahre $= 33,9$ iſt, ſo bekommt man $10,7961 - \frac{102,814}{33,9} = 7,7635$, was nur um 0,081 abweicht.

137.

Anmerkung. Der *Morganiſchen Methode* will ich hier doch auch erwähnen, da Herr D. *Price* in der neueſten Ausgabe ſeiner *Obſervations*, ſie mit allem Recht als eine ſichere Methode ſehr rühmet, aber auch ohne Grund für ſo kurz und leicht ausgiebet, daſs ſie jede andere nun unnütz machen könne. Hieran fehlt noch

noch viel. Sie ist derjenigen ähnlich, die bey den einfachen Leibrenten von *Morgan* gebraucht wird. (Siehe oben Cap. I. §. 61.) Nämlich folgende.

1) Es werden alle Verbindungsrenten für *zwo* Personen, deren Alter so viele Jahre verschieden ist, als das Alter der gegebenen Personen *a* und *b* auf einmal gefunden, zuerst solcher zwo, wovon die ältere nur ein Jahr jünger ist, als das höchste Alter der Tabelle. Aus dieser die Rente für zwo Personen, deren jede ein Jahr jünger ist, als die vorigen, und so ferner aus der Rente eines Paars die nachfolgende für ein Paar, das um ein Jahr jünger ist. Dieß geschieht nach einer Formel, die unten noch vorkommen wird. Diese Wehrte werden in die *zweite Columne* der Tabelle gesetzet, da in der *ersten* die Zahlen der Jahre stehen, in der Ordnung von den höhern zu den niedrigen.

2) In der *dritten Columne* setzet man die *baaren Wehrte einer Summe 1 zahlbar, wenn von zweyen zugleich Gebohrnen einer das höchste Lebensjahr, das nächsthöchste, das dritte vom höchsten, und so weiter erreicht, der andere auch dabey zu einem Alter kommt, was von des ersten seinem so viel Jahre verschieden ist, als der gegebene Unterschied des Alters a und b beträgt.* Ist dieser Unterschied *d*, so sind die Wehrte zu bezeichnen durch

$$\frac{x-1-d}{A.\ A}A.\frac{x-1}{A}A \cdot \frac{1}{r^{x-1}},\ \frac{x-2-d}{A.\ A}A.\frac{x-2}{A}A \cdot \frac{1}{r^{x-2}}\text{ u. s. f.}$$

3) Alsdenn dieſe Zahlen der *dritten* Columne ſummirt in der vierten, ſo daſs die Summe der vorhergehenden zu den ältern Jahren gehörigen Zahlen, dem nächſtfolgenden niedrigern Altersjahr gegenüber ſteht.

Sind nun die Wehrte der zwoten Columne, das iſt, die Wehrte der Verbindungsrenten richtig berechnet, ſo muſs das Product aus jeder derſelben in die zur Seite ſtehende Zahl der *dritten* Columne, gleich ſeyn der Summe in der *vierten*. Dieſs iſt eine doppelte Rechnung, die zugleich Probe von ſich ſelbſt iſt.

Der Grundſatz, worauf dieſs Verfahren beruhet (auſser der Methode aus dem Wehrt der Verbindungsrente für zwey Leben, den Wehrt für zwey andere, jedes um ein Jahr jünger, zu finden) liegt darin. Es iſt

$$\lambda\,\overline{a\,b} = \frac{1}{A.B}\cdot\left(\frac{\overline{{}^{1}A}.\overline{{}^{1}B}}{r} + \frac{\overline{{}^{2}A}.\overline{{}^{2}B}}{r^2} + +\right)$$

Hier ſind A, B die Zahlen der Lebenden für die gegebene Altersjahre *a* und *b*. Man nehme A für die Zahl der *Gebohrnen* (oder der jüngſten Lebenden, ſo weit die Tabelle ſie enthält) ſo kann was vorher A war durch $\overline{{}^{a}A}$, das iſt A im Jahr *a*, und eben ſo B, durch $\overline{{}^{b}A}$, das iſt, die Zahl A im Jahr *b* bezeichnet werden. Daher läſst ſich $\lambda\,\overline{a\,b}$ durch

$$\frac{1}{\overline{{}^{a}A}\,\overline{{}^{b}B}}\left(\frac{\overline{{}^{a+1}A}.\overline{{}^{b+1}A}}{r} + \frac{\overline{{}^{a+2}A}.\overline{{}^{b+2}A}}{r^2} + +\right)$$

ausdrücken,

$$= \frac{r^b}{\overline{a}A.\overline{b}A}\left(\frac{\overline{a+1}A.\overline{b+1}A}{r^{b+1}} + \frac{\overline{a+2}A.\overline{b+2}A}{r^{b+2}} + +\right)$$

Dieſs werde multiplicirt mit $\frac{\overline{a}A.\overline{b}A}{A.A} \cdot \frac{1}{r^b}$. Das iſt, mit dem *baaren Wehrt einer nach b Jahren zahlbaren Summe 1, wenn einer* von zweyen das Alter *a*, *und auch* der andere das Alter *b* erreicht. Es iſt das Product

$$\frac{\overline{a}A.\overline{b}A}{A.A} \cdot \frac{1}{r^b}\lambda\overline{a\,b} = \frac{\overline{a+1}A\,\overline{b+1}A}{A.\;A.r^{b+1}} +$$

$$\frac{\overline{a+2}A\,\overline{b+2}A}{A.\;A.r^{b+2}} + +.$$ Das iſt gleich *der Summe aller folgenden Wehrte einer zahlbaren Summe 1*, wenn von zwey Gebohrnen (oder jüngſten in der Tabelle) einer das Alter $a+1$, der andere $b+1$; ferner einer $a+2$, der andere $b+2$ erreichet hat. Dieſe Summen ſtehen in der *vierten* Columne. Der Factor $\frac{\overline{a}A.\overline{b}A}{A.A}\frac{1}{r^b}$ ſteht in der *dritten* mit dem Wehrt $\lambda\overline{a\,b}$ in der zwoten in einer Linie.

Hieraus macht ſich jemand, wie ich meyne, leicht eine ſolche Tabelle, wenn er Luſt hat dieſer Methode nachzugehen. Es verſteht ſich nun auch, daſs Logarithmen gebraucht werden können, obgleich wohl nicht mit vielem Zeitgewinn für einen geübten Rechner.

138.

Satz 34. Wenn der Zinſenfuſs niedrig iſt, ſo iſt der Wehrt der Verbindungsrente für zwo Perſonen nahe ſo groſs als eine einfache Leibrente für ein Leben, deſſen mittlere Dauer der Verbindung gleich iſt. Wenn gar keine Zinſen gegeben würden, ſo würden beyde Wehrte völlig gleich ſeyn. Bey einem niedrigen Zinſenfuſs iſt die Abweichung geringe, wenn die Süſsmilchiſche Tafel zum Grunde gelegt wird. Aber bey einem *höhern* Zinſuſs als 4 Proc. iſt ſie doch ſchon erheblich. Sie iſt dieſs auch bey der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, nur daſs man alsdenn die Correction leicht findet. *)

Ex. 1. $a = 60$, $b = 60$, ſo iſt die *Dauer* der Coexiſtenz, 7,48 Jahr. Dieſs iſt die *Dauer eines Lebens* von 72, 28, deſſen *Leibrente* = 5, 565 iſt. Der *genaue Wehrt* der Coexiſtenz iſt 5, 5575. Die Abweichung alſo nur 0, 0075.

Ex. 2. $a = 25$, $b = 60$. Die *Dauer der Coexiſtenz* iſt 10, 70. Das iſt *die Dauer zu* 63, 05 Jahr, wozu die *Leibrente* 7, 5574 gehört. Die *Rente der Verbindung* iſt alſo 7, 5464. Die Abweichung vom wahren Wehrt 0, 011.

Aus mehreren Beyſpielen hat ſich gewieſen, daſs man auf dieſe Art dem wahren Wehrt immer ſehr nahe komme.

139.

*) *Zuſätze* zu dieſem Cap. §. 19. 20.

139.

Satz 35. Aufgabe. Die nach einem gewiſſen Zinsfuſs berechneten Wehrte der Verbindungsrenten in ſolche für einen andern Zinsfuſs zu verändern.

Erſtes Verfahren.

Man ſuche die Wehrte nach der *Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben*, nach dem einen und nach dem andern Zinsfuſs, nehme den *Unterſchied zwiſchen dieſen Wehrten auch für den Unterſchied zwiſchen den genauen Wehrten an*, der dann von dem gegebenen Wehrte nach dem erſten Zinsfuſs abgezogen oder hinzugelegt werden muſs.

Zuſatz. Man kömmt noch näher, wenn man annimmt, daſs die *Differenz zwiſchen den hypothetiſchen Wehrten ſich zu der Differenz zwiſchen den wahren Wehrten verhalte wie der hypothetiſche Wehrt zu dem richtigen*, nach demſelben Zinsfuſs.

Anmerkung. Dieſs iſt das Verfahren, was ſchon bey den einfachen Leibrenten oben (Cap. II. §. 73.) gewieſen iſt. D. *Price* verſichert in vielen Exempeln gefunden zu haben, daſs man bey den Verbindungsrenten auf dieſe Art den wahren Wehrt noch näher treffe, als bey den einfachen Leibrenten.

Ex. Die beyden Perſonen ſind vom Alter 15 und 20 Jahre; der richtige Wehrt der Verbindungsrente auf 4 Proc. iſt 14, 1329, der auf 5 Proc. wird geſucht.

Die

Die *arithmetiſche ſteigende Leibrente* für 20 Jahre, iſt nach der Hypotheſe, und bey dem 4 Proc. Fuſs, 248, 79. §. 79. Auch iſt die *doppelte mittlere Lebensdauer* eines 15 jährigen, 2. 38, 56 = 77, 12, und einer 20jährigen = 70, 06. Daraus wird der *hypothetiſche Wehrt der Verbindungsrente* nach §. 134.

$$\lambda\,\overline{20} - \frac{L\,\overline{20}}{77,12} = 16,7905 - \frac{248,79}{77,12} = 13,5645.$$

Nun muſs auch der hypothetiſche Wehrt von $L\,\overline{20}$ nach dem 5 Proc. Fuſs geſuchet werden; und zwar auf dieſelbe Art §. 79. aus der Zeitrente, und der ſimpeln Leibrente, und dem Grundcapital für dieſen Zinsfuſs. Wenn die Hülfstabelle im §. 117. auch nach dem 5 Proc. Fuſs zugleich eingerichtet iſt, ſo kann man dieſen zweyten hypothetiſchen Wehrt von $L\,\overline{20}$ auch daraus nehmen nach §. 119, aber alsdenn iſt man auch ohne dieſes Verfahren dem wahren geſuchten Wehrte der Verbindung ſchon nahe.

Nach dem 5 Proc. Fuſs iſt $L\,\overline{20} = 215, 116$, und weil hier nach ebendemſelben $\lambda\,\overline{20} = 14,6447$, ſo wird

$$\lambda\,\overline{15.\,20} = 14,6447 - \frac{215,116}{77,12} = 11,8553.$$

Alſo die Differenz beyder Wehrte nach 4 und 5 Proc. iſt $13,5645 - 11,8553 = 1,7092$. Dieſes abgezogen von 14, 1829, hinterläſst 12, 4237. Und wenn man noch genauer vorher die Differenz in dem Verhältniſs des wahren und des hypothetiſchen Wehrts nach dem

4 Proc.

4 Proc. Fuſs, oder wie 14, 1329 : 13, 5645 vergröſſert, ſo bekömmt man 12, 3870.

Zweytes Verfahren.

Man nehme die *einfache Leibrente nach dem erſten Zinsfuſs*, welche der gegebenen *Verbindungsrente nach demſelben Zinsfuſs* am nächſten kommt. Dazu ſuche man aus der *Leibrententafel* die *Leibrente* für daſſelbe Alter nach dem *neuen Zinsfuſs*, und ſage: *wie ſich eine einfache Leibrente nach dem erſten Zinsfuſs zu der nach dem zweyten für daſſelbe Alter verhält, ſo verhält ſich der gegebene Wehrt der Verbindungsrente zu dem geſuchten nach dem neuen Zinsfuſs.*

Ex. Die *Verbindungsrente* für 15 und 20 Jahre, nach dem 4 Proc. Fuſs, iſt 14, 1329. Die dieſer *nächſte einfache Leibrente* nach dem 4 Proc. Fuſs iſt die für 35 Jahre, 14, 1175. Nach dem *5 Proc.* Fuſs iſt die *einfache Leibrente* für daſſelbe Alter, 12, 5924. Alſo 14, 1175 : 12, 5924 = 14, 1329 : 12, 6298.

Unterſchied von dem auf vorige Art gefundenen Wehrte 0, 2061.

Anmerkung. Beyde Auflöſungen geben nur *nähernde Wehrte.* Die leztere iſt kürzer, wenn ſie auch etwas weniger genau ſeyn ſollte. Beyde ſetzen auch voraus, daſs die einfachen Leibrenten ſchon nach dem Zinsfuſs berechnet ſind, nach welchem man die Verbindungsrenten ſucht.

Nach

Nach dem 34ſten Satz im 138ſten §. kann die einfache *Leibrente* bey dem neuen Zinsfuſs, die zu demſelben Alter gehört, wofür die nach dem erſten Zinsfuſs gegebene *Verbindungsrente*, als einfache *Leibrente* betrachtet, zu nehmen iſt, als die *Verbindungsrente* nach dem neuen Zinsfuſs angeſehen werden. Allein auf dieſe Art würde die Abweichung doch beträchtlicher werden in den Fällen, wo der neue Zinsfuſs nicht mehr niedrig iſt, und 4 Proc. überſteiget.

140.

Satz 36. Aus dem Wehrt der Verbindungsrente für zwey Leben a und b, wird der Wehrt derſelben für zwey andere gefunden, die beyde um n Jahre älter ſind, wenn man von dem Wehrt $\lambda\overline{a\,b}$, *die erſten n Glieder der Reihe abzieht, und den Reſt multiplicirt* mit $r^n \cdot \frac{A\ B}{{}^n\!A\ {}^n\!B}$.

Oder es iſt $\lambda\overline{(a+n)(b+n)} = \frac{r^n \cdot A\,B}{{}^n\!A\ {}^n\!B}\,(\lambda\overline{a\,b} - Q)$, wenn Q ſtatt der erſten n Glieder jener Reihe geſetzet wird.

Beweis. Es iſt $\lambda\overline{a\,b} = \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^1\!A.\,{}^1\!B}{r} + + \frac{{}^n\!A.\,{}^n\!B}{r^n}\right) + \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{{}^{n+1}\!A.\,{}^{n+1}\!B}{r^{n+1}} + +\right)$ Das erſte Stück $= Q$ iſt der *Wehrt einer Rente des Zuſammenlebens, die nach n Jahren aufhöret*, und

$\lambda\overline{a\,b}$

$\lambda\overline{ab} - Q = \frac{1}{AB}\left(\frac{\overline{n+1}A\ \overline{n+1}B}{r^{n+1}} + +\right)$ ist der Werth einer auf n Jahre *aufgeschobenen Verbindungsrente;* und $\frac{A.Br^n}{\overline{n}A.\overline{n}B} \cdot (\lambda\overline{ab} - Q) = \frac{1}{\overline{n}A.\overline{n}B} \cdot \left(\frac{\overline{n+1}A.\overline{n+1}B}{r} + +\right) = \lambda\overline{(a+n)(b+n)}$.

141.

Zusatz 1. Wenn $n = 1$, so ist $Q = \frac{\overline{1}A\ \overline{1}B}{A\,Br}$ und $\lambda\overline{(a+1)(b+1)} = \frac{A.B}{\overline{1}A.\overline{1}B} \cdot r\left(\lambda\overline{ab} - \frac{\overline{1}A.\overline{1}B}{A.Br}\right) = \frac{A.Br}{\overline{1}A.\overline{1}B} \cdot \lambda\overline{ab} - r = \frac{\left(\overline{1}A\,\overline{1}B + \Delta.(AB)\right)r\lambda\overline{ab}}{\overline{1}A\,\overline{1}B} - r.$

$= \lambda\overline{ab} + \left(r - 1 + \frac{r.\Delta(AB)}{\overline{1}A\,\overline{1}B}\right)\lambda\overline{ab} - r.$

Zusatz 2. Und weil $\lambda\overline{(a+1)(b+1)} < \lambda\overline{ab}$, so ist auch $1 > \left(r - 1 + \frac{r.\Delta(AB)}{\overline{1}A\,\overline{1}B}\right) \cdot \lambda\overline{ab}$.

142.

Zusatz 3. Ist die *Verbindungsrente* für $a+1$, und $b+1$ gegeben, so wird die für die um Ein Jahr jüngere a, b, oder $\lambda\overline{ab} = (\lambda\overline{(a+1)(b+1)} + 1)\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{r.AB}$

$= \left(\frac{\lambda\overline{(a+1)(b+1)} + 1}{r}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Delta\,\overline{1}A\,\overline{1}B}{AB}\right)$.

143.

Zuſatz 4. Eine auf n Jahre *aufgeſchobene Verbindungsrente* $\overline{\overline{\ }}^{n}\lambda\,\overline{a\,b}$ iſt $= \frac{\lambda\overline{(a+n)(b+n)}}{r^n} \cdot \frac{\overline{\overline{\ }}^{n}A\ \overline{\overline{\ }}^{n}B}{A.B}$.

Denn ſie iſt $= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{\ }}^{n+1}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n+1}B}{r^{n+1}} + +\right)$

$= \frac{1}{AB} \cdot \frac{\overline{\overline{\ }}^{n}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n}B}{\overline{\overline{\ }}^{n}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n}B} \cdot \frac{1}{r^n}\left(\frac{\overline{\overline{\ }}^{n+1}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n+1}B}{r} + +\right)$, und

$\frac{1}{\overline{\overline{\ }}^{n}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n}B}\left(\frac{\overline{\overline{\ }}^{n+1}A.\ \overline{\overline{\ }}^{n+1}B}{r} + +\right) = \lambda\overline{(a+n).\ (b+n)}$.

Alſo $\frac{1}{r^n} \cdot \frac{\overline{\overline{\ }}^{n}A\ \overline{\overline{\ }}^{n}B}{A\ B}\ \lambda\overline{(a+n)\ (b+n)} = \overline{\overline{\ }}^{n}\lambda\,\overline{a\,b}$.

Ex. Iſt $a = 20$, $b = 30$, und ſoll ſie 15 Jahre aufgeſchoben werden, ſo iſt $\lambda.\ \overline{35.\ 45.} = 9,7091$, nämlich nach *Süſsmilchs* Tabelle und dem 4 Proc. Fuſs. $A = 491$. $B = 439$, $\overline{\overline{\ }}^{n}A = 409$; $\overline{\overline{\ }}^{n}B = 339$ und $r^n = 1,8009$. Daher die 15 Jahre aufgeſchobene Rente $= \frac{409.339}{491.439} \cdot \frac{9,7091}{1,8009} = 4,2581$.

144.

Zuſatz 5. Auch findet man aus $\lambda\,\overline{a\,b}$ den Wehrt $\lambda\,\overline{a(b+1)}$, das iſt, den Wehrt der Verbindungsrente für zwo Perſonen, von denen *nur Eine* um Ein Jahr älter iſt.

Allein

Allein man muſs den Wehrt einer beym Tode der Person A zahlbaren Summe, im Fall die andere B alsdenn noch lebet, dazu haben. Man ſehe die *Zuſätze.* *)

145.

Die *Tabellen* XXIV. XXV. XXVI. enthalten die *Verbindungsrenten* zwoer Perſonen, bis auf eine gewiſſe Grenze, wie es für die Praxis zureicht. Die zwiſchen den in den Tabellen fallenden werden gewöhnlich auf dieſelbige Art *interpolirt*, wie oben §. 114. bey der *Dauer* der Verbindung gezeiget iſt. Sind beyde Perſonen Ein Jahr jünger oder älter als in den Tabellen, ſo kann man auch nach der Formel in §. 142. die *genauen* Wehrte finden, was die interpolirten doch nicht ſind, und zwar ſehr leicht. Z. B. nach dem §. 142. findet man aus der Verbindungsrente für zwo Perſonen, jede von 50 Jahren 7,6865 (Tab. XXIV.) die Rente für zwo von 49 Jahren $\frac{(7,6865+1)}{1,04} \cdot \frac{(300)^2}{(308)^2} = 7,9239$, da man durch das gewöhnliche Interpoliren 7,9164 bekommt, das iſt, 0,075 weniger.

146.

Satz 37. Eine vorſchuſsweiſe zu zahlende Verbindungsrente, die jährlich bezahlet wird, iſt um eine Jahrshebung gröſser als eine gewöhnliche.

Dieſs

*) zu dieſem Capit. §. 17.

Dieſs iſt für ſich klar, weil alles übrige ſo bleibt, wie vorher §. 126; nur daſs gleich baar noch eine Jahrshebung, die pränumerirte, hinzukommt.

Anmerkung. Doch wird auch vorausgeſetzt, daſs nichts zurück bezahlet werde für die Theile des Jahrs, welche die Verbindung nicht durch gedauert hat, und wofür doch vorausgezahlet iſt.

147.

Satz 38. Soll die Verbindungsrente halbjährlich bezahlet werden, ſo muſs zu dem Wehrt derſelben auf ganze Jahre noch $\frac{1}{4}^{\text{tel}}$ einer Jahrshebung, als Correction, zugelegt werden. Bey vierteljährlichen Zahlungen iſt die Correction $\frac{3}{8}$, und bey augenblicklichen $\frac{1}{2}$ einer Jahrshebung. In den Tabellen iſt ſchon $\frac{1}{2}$ hinzugeſetzet.

Die Zinſen für die kleinen Theile des Jahrs werden aber der Zeit proportionell gerechnet. Mehr davon (denn es hängt von der genauen Auseinanderſetzung dieſes Puncts etwas ab) in den *Zuſätzen* zu dieſem Cap. *)

148.

Satz 39. Der Wehrt einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Verbindungsrente ($\overline{Lab}$) wird nach der Hypotheſe des gleichförmigen Abſterbens gefunden, durch die Wehrte der ſimpeln Verbindungsrenten, und durch die Zeitrenten und Leibrenten für einzelne Perſonen.

Sind

*) §. 18. und folg.

Sind beyde Personen von gleichem Alter a, so ist $L\overline{a\,a} = 3.p.\lambda\overline{a\,a} - 2\,p.\lambda\overline{a}$. Siehe *Zusätze* zu diesem Capitel. *)

149.

Zusatz. Wenn die *Reihe der Differenzen* in §. 130. oder, *der auf ein Jahr zurück discontirte Wehrt einer bey der Trennung zahlbaren Summe* 1, nach der Voraussetzung berechnet ist, *dass diese Summe im Verhältniss mit der Dauer der Verbindung wachse*, und alsdenn $= R'$ gesetzet wird, so ist auch nach jeder Sterbensordnung $L\overline{a\,b} = \frac{\lambda\overline{a\,b} + 1 - rR'}{r-1}$. Siehe *Zusätze* zu diesem Capitel. **)

Dritter Abschnitt.

Vom Zusammenleben dreyer und mehrerer Personen.

180.

Satz 40. Die mittlere Dauer des Zusammenlebens dreyer vom Alter a, b, c oder $C\overline{a\,b\,c}$ *ist*

$$= \frac{1}{A.B.C}\cdot\left(\overline{-}^{1}A.\overline{-}^{1}B.\overline{-}^{1}C + \overline{-}^{2}A.\overline{-}^{2}B.\overline{-}^{2}C + + \right) + \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{\overline{-}^{1}A.\overline{-}^{1}B.\overline{-}^{1}C}{A.\ B.\ C} + \frac{1}{2}$$

und der Wehrt der Verbindungsrente oder des Zusammenlebens $\lambda\overline{a\,b\,c}$ *ist*

*) §. 21. **) §. 24.

$$= \frac{1}{A.B.C}\left(\frac{{}^{1}A.{}^{1}B.{}^{1}C}{r} + \frac{{}^{2}A.{}^{2}B\ {}^{2}C}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{A.B.C}\int\frac{{}^{1}A\ {}^{1}B.{}^{1}C}{r}.$$ Dieſs iſt aus dem vorhergehenden für ſich klar.

151.

Anmerkung. Man legt noch $\frac{1}{2}$ hinzu als Correction bey der Dauer des Zuſammenlebens. Zu dem *Wehrt der Verbindung* wird auch $\frac{1}{2}$ addirt, wenn die Rente als in jedem *Augenblicke* zahlbar, oder doch für alle Augenblicke des Zuſammenlebens gerechnet werden ſoll. Aus demſelben Grunde wie oben bey der Verbindung von zwey Leben. (§. 113. und 147.)

152.

Die Art die Dauer des Zuſammenlebens dreyer Perſonen und die Wehrte der Verbindungsrenten kürzer zu finden.

Die obige Hülfstabelle dient hier wiederum zur Berechnung für drey Perſonen. Sie wird weitläuftiger als vorher für zwo Perſonen. Aber doch nur etwas mehr, als wenn *zwo Verbindungen* von zwoen auf die obige Art zu berechnen ſind. Die Vorſchrift liegt in der nächſtſtehenden Formel, dazu der Beweis in den *Zuſätzen* ſtehet. *)

Es

*) §. 26.

Es iſt

$$\lambda \overline{a\,b\,c} = \lambda \overline{c} - \left(\frac{A.\Delta B + B.\Delta A - \Delta A.\Delta B}{A.\ B.\ C}\right) S.\int \frac{{}^{1}C}{r^{1}}$$

$$+ \frac{{}^{1}}{A.\,B.\,C} \cdot \left((A.\Delta\Delta B + B.\Delta\Delta A - \Delta\Delta A.\Delta\Delta B)\, S.\int \frac{{}^{2}C}{r^{2}}\right.$$

$$\left. + ({}^{1}A.\Delta\Delta\,{}^{1}B + {}^{1}B.\Delta\Delta\,{}^{1}A - \Delta\Delta\,{}^{1}A.\Delta\Delta\,{}^{1}B)\, S.\int \frac{{}^{3}C}{r^{3}} + + +\right)$$

Das iſt:

1) Man nehme eins von den gegebenen Leben, es ſey das *älteſte*, oder ein jedes andere. Man kann auch das *jüngſte* nehmen, zuweilen wird das eine, zuweilen das andere, die meiſtenmale, falls nicht zwo ſehr alte Perſonen da ſind, das erſtere das kürzeſte ſeyn. Es ſey das, was hier mit *c* bezeichnet iſt, wozu die Anfangszahl C gehört.

2) Den Zahlen der Columne E in der obigen Tabelle von dem Jahre $c+z$ an, ſchreibe man erſtlich die *Differenzen* zur Seite, die zu *a* gehören. Die erſte Differenz bey dem Jahr *a* oder $\Delta\Delta A$, kommt bey der zum Jahr $c+z$ gehörigen Summe in E zu ſtehen.

3) Ferner ſchreibe man die Zahlen der *Lebenden*, die mit dem Jahr *b* anfangen, B, ${}^{1}B$, und ſo ferner, gleichfalls jenen Zahlen zur Seite. Wenn man dieſe Columne aus der Sterblichkeitstafel beweglich macht, ſo kann man ſie zur Seite legen.

4) Wo die Differenz nicht = o wird, muſs die Summe der Columne E mit der Differenz und mit der damit zuſammentreffenden Zahl der Lebenden multiplicirt werden.

Auf dieſe Weiſe erhält man die Summe von

$$B.\Delta\Delta A\, S.\int\frac{{}^{2}C}{r^2} + {}^{1}B\Delta\Delta {}^{1}A\, S.\int\frac{{}^{3}C}{r^3} + +$$

5) Auf dieſelbige Art ſucht man die Summe von

$$A.\Delta\Delta B\, S.\int\frac{{}^{2}C}{r^2} + A.\Delta\Delta {}^{1}B\, S.\int\frac{{}^{3}C}{r^3} + +$$

6) Und auf gleiche Weiſe die Producte

$$\Delta\Delta A.\Delta\Delta B.\, S.\int\frac{{}^{2}C}{r^2} + \Delta\Delta {}^{1}A.\Delta\Delta {}^{1}B.\, S.\int\frac{{}^{3}C}{r^3} + +$$

Dieſs ſind die Zahlen der Columne E ſelbſt, wo nicht eine der Differenzen = o iſt, weil ſie bey der Süſsmilchiſchen Tafel entweder = 1, oder = o ſind.

7) Die zuletzt nach n. 6. erhaltene Summe wird von den beyden vorhergefundenen abgezogen.

8) Der Reſt, falls er *poſitiv* iſt, wird abgezogen (ſonſt *zugelegt*) von dem Product der Summe in der Columne E, welche bey dem Jahr $c+1$ ſteht, multiplicirt durch $A\Delta B + B.\Delta A - \Delta A.\Delta B$, und dann was übrig iſt, dividirt durch das Product aus den Anfangszahlen A, und B, und dem discontirten C, (oder $C:r^c$.)

9) End-

9) Endlich wenn dieſer Quotient abgezogen wird von dem Wehrt der Leibrente für die dritte Perſon C, ſo bekommt man den genauen Wehrt der Verbindungsrente der gegebenen dreyen, $\lambda\,\overline{a\,b\,c}$, wozu denn noch die Correction $\frac{1}{2}$ hier zuzulegen iſt. §. 151.

Anmerkung 1. Wenn *die Dauer der Verbindung* geſucht wird, ſo gebraucht man ſtatt der Summen in der Columne E, die in D, und anſtatt der *discontirten Zahl* $C:r^c$ nimmt man zum Factor des Diviſors die Zahl C ſelbſt. Alles übrige iſt daſſelbe.

Uebrigens ſieht man, daſs es hier ſolcher nach der 4ten und 5ten Vorſchrift auszuziehender Summen nicht mehrere gebe, als es giebt, wenn für die Verbindung zwoer Perſonen *b* und *c*, und auch für die beyden *a* und *c* zu rechnen iſt. Nur daſs jene Summen hier einzeln mit den Zahlen der Lebenden zu multipliciren ſind. Die Arbeit iſt alſo ſehr erträglich. Auch verſteht ſich von ſelbſt, daſs bey einer andern Sterblichkeitstafel, und bey einem andern Zinsfuſs auch eine andere Hülfstafel erfordert werde. Das Verfahren aber iſt daſſelbe.

153.

Anmerkung 2. Es kann auch auf eine ähnliche Art, wie oben §. 137. bey der Verbindung von zwo Perſonen, die *Morganſche* Methode angebracht, und aus einer gegebenen *Dauer der Verbindung* von *dreyen*, oder *aus einer gegebenen Verbindungsrente*, eine andere für drey

Perſonen, *die um gleich viele Jahre am Alter verſchieden ſind*, berechnet werden. Da das nähere von ſelbſt ſich zeiget, ſo will ich blos daran erinnern.

154.

Anmerkung 3. Für drey Perſonen von *gleichem Alter* kann man ſich leicht eine Hülfstabelle machen, wenn man für jedes Jahr das Quadrat der Lebenden multiplicirt mit der discontirten Zahl der Lebenden zur Berechnung der Rente, und die Cubiczahlen der Lebenden nimmt zu der *Dauer* der Verbindung, und dann dieſe Zahlen wie vorher in Summen bringt. Die Summe, welche bey dem Jahr $a+1$ ſteht, wird durch die Zahl bey dem Jahr a dividirt, und der Quotient giebt das Geſuchte, wozu noch $\frac{1}{2}$ als Correction zugeſetzet wird, wenn es die Dauer iſt, was man ſuchet.

Wenn das Alter verſchieden iſt, aber nicht über *acht* Jahre zwiſchen dem jüngſten und älteſten, und dazu das jüngſte zwiſchen 10 und 50 Jahr iſt, ſo kann man das *arithmetiſche Mittel aus ihrem Alter*, für das *gemeinſchaftliche Alter* annehmen, und nach der letztgedachten Tabelle die Dauer und den Wehrt der Verbindung ſuchen. Man wird ſie dem wahren Wehrt nahe finden. D. *Price*, der dieſe practiſche Anmerkung hat, beſtätigt ſie durch mehrere Beyſpiele aus der Northamptonſchen Tafel.

155.

Satz 41. Wenn die Verbindungsrente für drey Perſonen von beſtimmtem Alter gegeben iſt, ſo wird daraus der Werth für drey andere, die jeder um 1 Jahr älter ſind, leicht gefunden. Es iſt

$$\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = r\frac{A.\ B.\ C}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}\cdot\lambda\overline{abc} - r.$$

Beweis. Denn $\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}$

$$= \frac{1}{A.\ B.\ C}\cdot\left(\frac{{}^{1}A.\ {}^{1}B\ {}^{1}C}{r} + \frac{{}^{2}A + {}^{2}B.\ {}^{2}C}{r^2} + \text{etc.} - \frac{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}{r}\right)r.\frac{A.\ B.\ C}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C} = \frac{A.\ B.\ C}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}\cdot r.\lambda\overline{abc} - r.$$

156.

Zuſatz 1. Iſt von der *Dauer der Coexiſtenz* die Frage, ſo iſt $C\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}$

$$= \frac{A.\ B.\ C}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}\cdot C\overline{abc} - 1, \text{ und}$$

$$C\overline{abc} - C\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1 - \frac{\Delta(ABC)}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}\cdot C\overline{abc},$$

oder wenn $\Delta C\overline{abc}$ die Differenz der Verbindungsdauer iſt, für Ein Jahr ältere Perſonen, ſo iſt

$$\Delta.C\overline{abc} = 1 - \frac{\Delta(ABC)}{{}^{1}A.\ {}^{1}B.\ {}^{1}C}\cdot C\overline{abc}.$$

Zuſatz 2. Und weil ſo wohl die *Dauer* ſelbſt, als der Wehrt der Rente kleiner iſt, wenn die Perſonen älter ſind, ſo muſs $1 > \left(r - 1 + \frac{r.\Delta ABC}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}\right)\lambda\overline{abc}$ ſeyn.

Denn

$$\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = \left(\frac{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C} + \Delta(ABC)(1+r-1)\lambda\overline{abc}}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}\right)$$

$$- 1 = \lambda\overline{abc} + \left(r - 1 + \frac{r.\Delta(ABC)}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}\right)\lambda\overline{abc} - 1.$$

Folglich $\lambda\overline{abc} - \lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = \Delta\lambda\overline{abc}$

$$= 1 - \left((r-1) + r.\frac{\Delta ABC}{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}\right).\ \lambda\overline{abc}.$$

Zuſatz 3. Geht man von den Wehrten für ältere Perſonen zurück auf die für jüngere, den Unterſchied des Alters beybehalten, ſo findet man

$$C\overline{abc} = \left(C\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} + 1\right)\frac{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}{A.B.C};$$

$$\lambda\overline{abc} = \left(\frac{\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} + 1}{r}\right)\frac{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}{A.B.C}.$$

Anmerkung. Bedient man ſich in dem Factor $\frac{\frac{1}{A}.\frac{1}{B}.\frac{1}{C}}{A.B.C}$ ſtatt der Zahlen der Lebenden $\frac{1}{C}$ und C, der *discontirten* Zahlen $\frac{\frac{1}{C}}{r^{c+r}}$, $\frac{C}{r^c}$, ſo braucht nicht noch einmal durch r dividirt zu werden.

Daſs

Dafs hierbey auch wiederum *Morgans* doppelte Rechnung könne angebracht werden, wie oben §. 137. fällt von selbst auf. Nach ihr ist die XXIX^ste^ Tafel berechnet. Beym *Price* in der neusten Ausgabe seiner *Observations* kommen noch einige Tabellen von Verbindungsrenten für drey Personen vor, die ich nicht nöthig finde, hier anzufügen.

157.

Anmerkung. Wenn *die veränderte Süfsmilchische Tafel mit gleichförmig sich ändernden Decrementen* zum Grunde gelegt wird, so giebt es eine allgemeine Formel, wornach die *Dauer der Verbindung* sowohl, als die *Verbindungsrenten* auf *drey* Personen berechnet werden können.*) Aber sie ist, nicht sowohl, weil sie für sich zu sehr zusammengesetzt ist, als weil sie auf mehrere unterschiedene Theile der ganzen Reihe besonders angewendet werden mufs, zum Gebrauch ein wenig beschwerlich, obgleich immer noch leichter als die gewöhnlichen Rechnungen.

Die Formel, die nach *der Hypothese vom gleichförmigen Absterben* herauskommt, ist einfach genug. Auch lassen sich bey ihr einige Abkürzungen anbringen. Dieſs steht in den *Zusätzen* zu diesem Capitel. **)

158.

*) *Zus.* §. 27.
**) §. 31.

158.

Satz 42. Hat man die Verbindungsrenten für zwo Personen und auch die Wehrte der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsenden Verbindungsrenten, so erhält man, die Hypothese vom gleichförmigen Absterben zum Grunde gelegt, daraus, und aus der gegebenen mittlern Lebensdauer der dritten Person den Wehrt der Verbindungsrente für drey Personen auf diese leichte Art:

Man dividirt *die wachsende Verbindungsrente der zwo ältesten, durch die doppelte Lebensdauer der dritten jüngsten, und zieht den Quotienten von der Verbindungsrente für jene beyden ältern ab.* Oder $\lambda\overline{abc} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} L\overline{bc}$, wenn α die Altersergänzung, oder hier die *doppelte mittlere Lebensdauer der jüngern*, vom Alter a ist. Den Beweis siehe in den *Zusätzen.* *)

159.

Zusatz. Dasselbe läßt sich auf *mehrere zusammenlebende Personen* fortsetzen. Hat man $\lambda\overline{bcd}$ und auch $L\overline{bcd}$, so ist für 4 Personen $\lambda\overline{abcd} = \lambda\overline{bcd} - \frac{1}{\alpha} \cdot L\overline{bcd}$.

160.

Satz 43. Die Dauer der Verbindung für drey Personen kann auf folgende Weise nahe gefunden werden: Die

*) §. 39.

Die Dauer der Verbindung für B und C, die beyden älteſten, ſey gleich der mittlern Lebensdauer von D; nun nehme man die Dauer der Verbindung von A und D, für die Verbindungsdauer der dreyen.

Ex. Das Alter a von A ſey = 30
— — b — B — = 30
— — c — C — = 40.

So iſt C $\overline{30.\ 40}$ = 17, 11 = E $\overline{49,7}$. (Tab. XXIk)

und C $\overline{30.49,7}$ = 13, 72

der *genaue Wehrt* iſt = 13, 82

Unterſchied = 0, 10.

Ex. 2. Für *a* = 30, *b* = 40, *c* = 40, iſt

C $\overline{40.\ 40}$ = 15, 27 = E $\overline{53,42}$, und

C $\overline{30.\ 53,42}$ = 12, 72

Der genaue Wehrt für

C $\overline{34.\ 40.\ 40}$ iſt = 12, 66

Unterſchied = 0, 06

Anmerkung. Um noch in mehreren Beyſpielen dieſe ihrer Leichtigkeit wegen brauchbare Methode prüfen zu können, will ich folgende vom *Herr von Drateln* nach der Süſsmilchiſchen Tafel genau berechnete Verbindungsdauer dreyer Perſonen herſetzen.

1) C. $\overline{35.35.45}$ = 11, 91	11) C. $\overline{35.45.45}$ = 10, 85
2) C. $\overline{40.40.50}$ = 10, 23	12) C. $\overline{40.50.50}$ = 9, 11
3) C. $\overline{45.45.55}$ = 8, 61	13) C. $\overline{45.50.55}$ = 7, 65
4) C. $\overline{50.50.60}$ = 7, 03	14) C. $\overline{50.60.60}$ = 6, 17
5) C. $\overline{55.55.65}$ = 5, 72	15) C. $\overline{55.65.65}$ = 4, 88
6) C. $\overline{60.60.70}$ = 4, 58	16) C. $\overline{60.70.70}$ = 3, 90
7) C. $\overline{65.65.75}$ = 3, 60	17) C. $\overline{65.75.75}$ = 3, 12
8) C. $\overline{70.70.80}$ = 2, 89	18) C. $\overline{70.80.80}$ = 2, 52
9) C. $\overline{75.75.85}$ = 2, 36	19) C. $\overline{75.85.85}$ = 2, 05
10) C. $\overline{80.80.90}$ = 1, 89	20) C. $\overline{80.90.90}$ = 1, 69

161.

Zuſatz 1. Man kömmt am nächſten, wenn man die *beyden älteſten* Leben zuerſt verbindet, und daraus das *mittlere einfache Leben* von gleicher Dauer ſuchet. Iſt aber überhaupt der Unterſchied des Alters nicht groſs, ſo iſt es auch faſt gleichgültig, welche man zuerſt nimmt.

Zuſatz. 2. Bey der Hypotheſe *vom gleichförmigen Abſterben*, kann der Unterſchied der ſo gefundenen Dauer von der *genauen* nicht ganz ein Nichts, aber doch auch ſo groſs nicht ſeyn. Man ſehe die *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

Zuſatz 3. Daſs man bey *vier* und *mehreren* Perſonen daſſelbe Verfahren anbringen könne, alſo mit der Tabelle von den Verbindungen zweyer Perſonen ziemlich ausreiche, iſt eine Folge davon.

162.

*) §. 38 ſeq.

162.

Satz 44. Der Wehrt einer Leibrente auf ein Leben, deſſen mittlere Dauer ſo groſs iſt, als die mittlere Verbindungsdauer dreyer Perſonen kann für den Wehrt dieſer Verbindungsrente beynahe angenommen werden.

Wenn keine Zinſen bezahlet werden, ſo iſt es genau ſo; und wenn der Zinsfuſs nicht hoch iſt, *muſs* es *beynahe* ſo ſeyn. Bey der Verbindung von zweyen trifft es (nach Satz 34. §. 138.) ſehr nahe, daſs wenn ihre *Verbindungsdauer der Dauer eines einfachen Lebens* gleich iſt, auch der *baare Wehrt der Rente für jene, der Leibrente für dieſe gleich ſey.* Bey der *Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben* können ſie für *drey* Perſonen auch nicht viel verſchieden ſeyn.

Ex. 1. Für 30. 40 und 40 iſt die *Dauer der Coexiſtenz* 12, 66. Dieſs iſt die *mittlere Lebensdauer einer Perſon* von 58, 78 Jahr, deren *Leibrente* 8, 6899 iſt. Der *genau berechnete Verbindungswehrt* jener dreyen iſt 8, 5867, nach Süſsmilchs Tafel und 4 Proc. berechnet. Der Unterſchied 0, 1032.

Ex. 2. Die *mittlere Dauer der Verbindung* von 30. 30. 40 iſt 13, 72. Dieſs iſt die *mittlere Lebensdauer einer Perſon* von 56, 06 Jahren, wozu die Leibrente 9, 2398 gehört. Der *genaue Wehrt* jener Verbindungsrente für drey iſt 9, 1662, der Unterſchied 0, 0736.

163.

Satz 45. Der Wehrt einer Verbindungsrente für drey Perſonen iſt nahe ſo groſs als der Wehrt der Verbindungsrente für zwo, davon eine die jüngſte der drey gegebenen iſt, die zwote aber von dem Alter iſt, wofür die einfache Leibrente gleich groſs iſt mit der Verbindungsrente der beyden ältern.

Sind A, B, C die drey Leben und A *das jüngſte*, ſo ſuche man die Verbindungsrente für B und C, und es ſey D das Mittelleben, deſſen Leibrente eben ſo groſs iſt als jene. Alsdenn wird *der Wehrt der Verbindungsrente* von A und D nahe ſo groſs ſeyn als die Verbindungsrente für die gegebene drey Perſonen.

Ex. 1. Das Alter der drey Perſonen ſey 30, 40 und 40 Jahr. So iſt nach der Süſsmilchiſchen Tabelle und nach 4 Proc. $\lambda\overline{40.40} = 9.9484 = \lambda\overline{53,72}$. Und nun $\lambda\overline{30.53,72} = 8,6041$.

Der genau berechnete Wehrt von
$\lambda\overline{30.40.40}$ iſt $= 8,5767$

Unterſchied $= 0,0274$

Ex. 2. Für 30. 30. und 40 Jahre iſt
$\lambda\overline{30\ 40} = 10,7816 = \lambda\overline{50,07}$, und
$\lambda\overline{30.50.07} = 9,2065$. Genau iſt
$\lambda\overline{30.30.40} = 9,1662$

Unterſchied $= 0,0403$.

Anmerkung. Dieſe Unterſchiede ſind geringe. Doch muſs die *älteſte Perſon zuerſt*, die *jüngſte zuletzt* in Verbindung gebracht werden. Aendert man dieſe Ordnung, ſo trifft es weniger zu. *Simpſon* verſichert, bis auf $\frac{1}{8}$tel einer *Jahrsrente* die wahren Wehrte auf dieſe Art erhalten zu haben. Die letztere hat er vermuthlich nach ſeiner gewöhnlichen Methode berechnet, nämlich die mittlere Lebensdauer aus der Londoner Tafel, doppelt, für die Altersergänzung genommen, und dann das Sterben gleichförmig vorausgeſetzt. Allein wenn er dieſs gethan, ſo würden ſich doch gröſsere Abweichungen gezeiget haben, wenn er noch mehr Fälle berechnet hätte. Wenn übrigens der vortreffliche Mann glaubt, die Richtigkeit des Verfahrens erhelle auch unmittelbar aus der Natur der Sache ohne Rechnung, ſo geſtehe ich, daſs mir dieſs nicht einleuchte.

Iſt es nur zu thun, um die Rechnung nach der Hypotheſe zu haben, ſo läſst ſich die Abweichung des durch dieſe Approximation gefundenen Wehrts von dem wahren, leicht und genau angeben. (*Zuſätze* zu dieſem Capitel*).) Wenns auch der Mühe in Praxis nicht verlohnt, ſie in einzelnen Fällen zu ſuchen, ſo kann man doch wiſſen, wie groſs der Fehler ſeyn könne. Ueberhaupt iſt nicht viel Zuverläſsigkeit bey practiſchen Vorſchriften, von denen man weiſs, daſs man in einzelnen Fällen nicht viel fehle, und doch zugleich weiſs, daſs man

*) §. 36 und folg.

man fehle, ſo lange man nicht die Gränze kennt, bis wohin der Irrthum gehen kann.

Bey der gedachten Hypotheſe findet ſich, daſs je jünger das *dritte* mit den beyden ältern verbundene Leben iſt, deſto näher komme man dem wahren Wehrt. Die *Abweichung iſt in umgekehrtem Verhältniſs mit der Altersergänzung*, oder mit der *Zahl der Lebenden in dem Alter der jüngſten Perſon*. Auch kommt es auf den *Unterſchied des Alters der beyden ältern* verbundenen an. Je mehr Jahre die ältere für ſich hat, und je gröſser der Unterſchied zwiſchen ihrem Alter und dem Alter der mit ihr verbundenen nächſt jüngeren iſt, deſto geringer, obgleich nicht in demſelben Verhältniſs, wird wiederum die Abweichung.

Dieſs bleibt auch ſo in jedem andern Syſtem. (*Zuſätze* zu dieſem Capitel *).) Allein hier hängt die Gröſse der Abweichung von der Natur des Syſtems, oder von den Verhältniſſen der Zahlen in der Mortalitätstafel ab. Dennoch zeiget ſich ſo viel im allgemeinen, daſs ſie in den verſchiedenen Syſtemen ziemlich nahe ſich verhalte wie *die gefundenen Gröſsen für die einfachen Mittelleben*, die man für zwo verbundene ſetzet. Berechnet man alſo die Abweichung nach der leichteſten Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben, und verändert dann dieſe in dem Verhältniſs der Dauer des nach der Hypotheſe gefundenen *Mittellebens* zu der Dauer des Mittellebens nach

*) §. 42.

nach den Tabellen, so kann dieſs für die *eigentliche Abweichung* nach den Tabellen genommen und dadurch der durch die Approximation gefundene Wehrt berichtiget werden. Das ist wiederum nicht ganz genau. Es kann sich treffen, daſs man ohne Correction dem wahren Wehrte durch die Approximation näher kommt, wie es bey einigen, nach der Süſsmilchiſchen Tabelle berechneten Exempeln sich wirklich findet. Allein sicherer ist es in jedem Fall auf die Correction Rücksicht zu nehmen. Auf dieſe Anmerkung ist die Methode gegründet, die ich hier noch anfügen will.

164.

Leichte Methode die mittlere Verbindungsdauer drey- und mehrerer Personen zu finden.

Das *Alter* der gegebenen Personen sey in der Ordnung von der jüngern an, a, b, c, d — — wie vorhero, und ihre Altersergänzung α, β, γ, δ — — —

1) Man suche die *Dauer der Verbindung der beyden ältesten*, aus der XXII^ten^ Tabelle, also $C\overline{bc}$, wenn man nur für drey Leben, a, b, c, die Dauer sucht; sehe solche an als die *Dauer eines einfachen mittlern Lebens*, das man aus der XV^ten^ Tafel sucht, es sey m, und nehme dann von neuen die *Verbindungsdauer* dieſes letztern *mittlern Lebens mit dem dritten jüngern*, das ist, suche $C\overline{am}$.

Dieſe Dauer corrigirt ſoll die Dauer von *dreyen* $C\overline{abc}$ ſeyn.

2) Um die *Abweichung* von dem wahren Wehrt zu finden, ſuche man aus den Altersergänzungen β, γ, *die hypothetiſche Verbindungsdauer der beyden älteſten* nach Satz 29. §. 115. $= \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$. Sie ſey m', und die dazu gehörige *hypothetiſche Altersergänzung*, wenn jene als die Dauer eines einfachen Lebens angeſehen wird, $= \mu = 2\,m'$.

3) Die *Differenz* zwiſchen der Dauer der ältern Perſon, und des gefundenen Mittellebens, $\frac{\gamma-\mu}{2}$, werde *multiplicirt mit der Differenz* zwiſchen der Dauer des Mittellebens und der eben gefundenen Differenz, das iſt, mit $\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma-\mu}{2}$; und dieſs Product dividirt durch die dreyfache Altersergänzung des jüngſten gegebenen Lebens, durch $3\,\alpha$.

Das heiſst man ſuche $\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{\gamma-\mu}{2}\right)\cdot\left(\frac{\mu-(\gamma-\mu)}{2}\right)$. Dieſs iſt die Abweichung nach der Hypotheſe. (*Zuſätze**).)

Iſt $b = c$, alſo auch $\beta = \gamma$, ſo kann man noch kürzer abkommen. Die Abweichung bey der Hypotheſe iſt alsdenn $= \frac{\gamma^2}{108.\alpha}$.

4) Iſt

*) §. 39.

4) Iſt die Dauer des hypothetiſchen Mittellebens m', nicht merklich von m (aus n. 1.) unterſchieden, ſo kann die gefundene Correction beybehalten werden, ſonſt wird ſie in dem Verhältniſs $m' : m$ verändert.

5) Die berichtigte Correction wird von der obigen (n. 1.) gefundenen Dauer $C\overline{a\ m}$ *ſubtrahirt*, (oder *addirt*, wenn ſie *negativ* iſt). So entſtehet die *Dauer* $C\overline{a\ b\ c}$, die man als die *wahre* annehmen kann.

6) Iſt die Verbindungsdauer für *drey* Perſonen, $C\overline{a\ b\ c}$ berichtiget, ſo ſehe man ferner dieſe Dauer an als die *eines einfachen Lebens* vom Alter n, und ſuche $C\overline{a\ n}$. Dann ſuche man die Correction für vier Perſonen nach der Hypotheſe, und aus dieſer die andere in dem Verhältniſs der Dauer des für die Verbindung von dreyen ſubſtituirten einfachen Lebens. Dieſe iſt dann wie vorhero zu gebrauchen.

Ex. Es ſey $a = 40$, $b = 50 = c$.

ſo iſt $\alpha = 2 \,.\, 22,64 = 45,28$

$\beta = \gamma = 2.16,95 = 33,90$.

Nun iſt $C\overline{50.\ 50}$ nach der XXII^ten^ Tabelle, $= 10,01$ und dieſs iſt die Dauer eines *einfachen Lebens* vom Alter 64, 68 ($= m$) nach Tab. XV. Daraus bekommt man wiederum $C\overline{30.64,68}$ (nach Tab. XXII.) $= 9,33$.

Auch iſt $m' = \frac{1}{3} \cdot 33,90 = 11,30$. Weil in dieſem Fall $\mu = \frac{2}{3}\beta$, und $\gamma = \beta$. Alſo die Correction

$$\frac{\beta^2}{108\,\alpha}, = \frac{(33,90)^2}{108 \cdot 45,28} = 0,235.$$

Dieſe Correction um $\frac{10,01}{11,30}$ vermindert, giebt 0,196.
Alſo iſt C $\overline{30.04\ 68}$ — 0,196 = 9,33 — 0,196 = 9,13.
Der genaue Wehrt iſt 9, 11. Die Abweichung alſo unerheblich.

165.

Methode, die Wehrte der Verbindungsrenten dreyer und mehrerer Perſonen leicht zu finden.

Das Verfahren iſt dem vorigen ähnlich.

1) Man ſuche die *Verbindungsrente* der *beyden älteſten* $\lambda\,\overline{b\ c}$, und dann dafür ein *einfaches Leben*, deſſen Rente eben ſo groſs iſt; es ſey *m*.

Dann von neuem $\lambda\,\overline{a\ m}$, nämlich die *Verbindungsrente* des jüngern Lebens *a* mit *m*.

2) Auch wird der *hypothetiſche Wehrt* der Verbindungsrente $\lambda\,\overline{b\ c}$ geſucht und ſolche = $\lambda\,\overline{m'}$ geſetzt, wozu die Altersergänzung μ gehört.

3) Daraus wird die Correction des *hypothetiſchen Wehrts* $\lambda\,\overline{a\ m'}$ gefunden, nach der Formel

$$\lambda\,\overline{a\ m'} - \lambda\,\overline{a\ b\ c} = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\,\overline{m'} + \int\frac{dx}{r^{\mu}}\right.$$
$$\left. - \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\,\overline{\gamma} - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}\right)\ *)$$

Wenn die beyden ältern Perſonen gleichen Alters ſind, ſo wird dieſe Differenz

$$= \frac{1}{\alpha}\left((p-\mu)\,\lambda\,\overline{c\ c} + p\,\mu - 2\,p\,\lambda\,\overline{c}\right)\ **)$$

Zu

*) *Zuſätze* §. 43. **) Ebendaſ. §. 44.

Zu bemerken ist aber hierbey, dass die in dieser Formel für die Correction angegebenen Renten nicht nur lauter *hypothetische* sondern auch für *augenblickliche Hebungen* sind. Die XXX^ste Tabelle enthält die Leibrenten für *jährliche* Hebungen. Zu jeder derselben muss noch die *Zeitrente auf die Altersergänzung*, dividirt durch diese letztere, hinzugerechnet werden, wenn sie in augenblickliche Renten zu verändern sind.*) Auch ist p hier das *Grundcapital* zu *augenblicklichen Zinsen*, und also bey dem 4 Procentfuss = 25, 49.**) Diesem gemäss muss auch die hypothetische Verbindungsrente $\lambda\,\overline{b\,c}$ oder $\lambda\,\overline{m}'$, und $\lambda\,\overline{c\,c}$, wenn $b = c$, genommen werden.***) Es lässt sich die Correction auch in *jährlichen* Renten geben, aber alsdann wird ihr Ausdruck so viel zusammengesetzter, dass man eben so leicht die Reduction der Renten auf augenblickliche vornehmen kann.

4) Die so gefundene Correction in dem Verhältniss $\frac{\lambda\,m}{\lambda\,m'}$ verändert, und dann von dem vorher gefundenen Wehrt $\lambda\,\overline{a\,m}$ *subtrahirt* (oder *addirt* dazu, wenn sie *verneinend* ist) kann für $\lambda\,\overline{a\,b\,c}$ als *nahe richtig* angenommen werden.

5) Man geht auf die nämliche Art weiter zu *vier* Personen, nur muss alsdenn die Correction der hypothetischen

*) *Zusätze* zum zweyten Cap. §. 17.

**) Ebendas. §. 16.

***) Cap. II. §. 134. *Zusätze* zu Cap. II. §. 23.

thetiſchen Wehrte nach einer andern Formel geſucht werden. *)

Ex. Es ſey $a = 30$, $b = 40 = c$; ſo iſt $\alpha = 2.28,57 = 57,14$; $\beta = \gamma = 2.22,64 = 45,28$.

Nach Tab. XXIV. iſt $\lambda\overline{40.40} = 9,9484 = \lambda\overline{53,72}$ (Tab. XVI.) Wiederum iſt (Tab. XXIV.) $\lambda\overline{30.53,72} = 8,6041$.

Um die Correction zu finden bey dem 4 Procentfuſs, nehme man die jährliche Leibrente nach der Hypotheſe für das Alter 40 Jahr aus der Tab. XXX. 13,0760. Dieſe in eine andere für *augenblickliche* Hebungen verändert, giebt $13,0760 + \frac{20,7661}{45,28} = 13,5346$ für $\lambda\overline{40}$, wie es hier zu gebrauchen iſt. Ferner wird

$\lambda\overline{40.40} = p\left(1 - \frac{2}{45,28} \cdot 13,0760\right)$ **)

$= 25,49.0,4022 = 10,2520$. Dieſs iſt gleichfalls ein *hypothetiſcher* Wehrt der Verbindungsrente $(\lambda\overline{c\,c})$ bey *augenblicklichen* Hebungen. Der iſt aber gleich einer *einfachen Leibrente* derſelben Art, für das Alter 55,46 Jahr, wozu die Altersergänzung $\mu = 28,54$ iſt. Denn die augenblickliche Leibrente für 55 Jahr iſt $9,773 + \frac{16.0827}{29} = 10,3589$. Die nächſt niedere für 56 Jahr iſt $9,5322 + \frac{16,6695}{28,02} = 10,1271$.

Zwi-

*) *Zuſätze* §. 44.

**) Ebendaſ. §. 37.

Zwischen diesen beyden fällt jene gegebene 10, 2520. Nun nimmt man den Unterschied der beyden ersten, 0, 2318 zu dem Unterschied der ersten und der gegebenen, das ist $\lambda\,\overline{55} - \lambda\,\overline{56} : \lambda\,\overline{55} - \lambda\,\overline{m}$, wie die Differenz des Alters, 1 Jahr, zur Differenz 9, 46, so viel ist also m gröfser als 55 Jahr. Die Altersergänzung zu 55, 46 Jahr wird auf eine ähnliche Art gesucht, und ist 28, 55.

Hieraus ergiebt sich die Correction

$$= \frac{(25 - 28,55)\ 10,2520}{57,14} + \frac{25,49(28,55 - 2.13,5346)}{57,14} =$$

$$- \frac{31.37112 + 37.7457}{57,14} = 0,094.$$

Diese sollte nun noch in dem Verhältnifs $\frac{9,9}{10,3}$ vermindert werden, allein diese Veränderung ist an sich unerheblich, und ohne dieſs sind nach der Natur der Rechnung die dritten Decimalziffern nicht mehr völlig genau. Man nehme also 0, 094 selbst, und ziehe dieſs von dem gefundenen Wehrt für $\lambda\,\overline{30.55,72}$ oder 8, 6041 ab, so erhält man 8, 5101, welches von dem genauen Wehrt 8, 5867 nur um 0, 0766 abweicht.

Zusätze
zum dritten Capitel.
Zum ersten Abschnitt.
Von der Dauer des Zusammenlebens zwoer Personen.

I.
Zu §. 113.

Die zu der auf *ganze Jahre* berechneten *Verbindungsdauer* hinzukommende Correction ist zwar nicht völlig bey allen Vorausſetzungen gleich, aber es kann durchgehends $\frac{1}{2}$ dafür angenommen werden.

Setzet man voraus, der *jährliche Abgang* eräugne sich *mitten im* Jahr, so leben von A, in dem *ersten halben* Jahre noch $\overline{}^{1}A+\Delta A$; in dem *zweyten* nur $\overline{}^{1}A$, In der ersten Hälfte des zweyten Jahrs leben $\overline{}^{2}A+\Delta\overline{}^{1}A$; in der zwoten Hälfte nur $\overline{}^{2}A$. So auch bey B. Folglich sind im ersten Jahr in der ersten Hälfte noch $(\overline{}^{1}A+\Delta A)(\overline{}^{1}B+\Delta B)$ Paare gewesen; in der zwoten Hälfte aber $\overline{}^{1}A\ \overline{}^{1}B$. Daher hat man für die Coexistenz des ersten Jahrs,

$$\frac{\overline{}^{1}A\ \overline{}^{1}B}{2}+\frac{1}{2}(\overline{}^{1}A+\Delta A)(\overline{}^{1}B+\Delta B)=$$

=

$$= {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\ {}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \tfrac{1}{2}\left({}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,\Delta\,\text{B} + {}^{\text{I}}_{-}\text{B}.\ \Delta\,\text{A} + \Delta\,\text{A}.\ \Delta\,\text{B}\right)$$

$$= {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\ {}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \tfrac{1}{2}\left(\left({}^{\text{I}}_{-}\text{A} + \Delta\,\text{A}\right).\left({}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \Delta\,\text{B}\right) - {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,{}^{\text{I}}_{-}\text{B}\right)$$

$$= {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,{}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \tfrac{1}{2}\left(\text{A B} - {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,{}^{\text{I}}_{-}\text{B}\right) = {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,{}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,(\text{A B}).$$

Die Summe von $\frac{1}{2}\,\Delta\,(\text{A B})$ für alle Jahre ist $= \frac{\text{A B}}{2}$.

Daraus folget, daſs in dieſem Fall die Correction, oder was zu der auf ganze Jahre berechneten Verbindungsdauer hinzuzuſetzen iſt $= \frac{1}{2}$ ſey.

2.

Setzet man hingegen voraus, die *Hälfte der im Jahr Sterbenden lebe das ganze Jahr durch*, ſo hat man für die Coexiſtenz des erſten Jahrs

$$\left({}^{\text{I}}_{-}\text{A} + \frac{\Delta\,\text{A}}{2}\right)\left({}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \frac{\Delta\,\text{B}}{2}\right)$$

$$= {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\ {}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \frac{{}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,\Delta\,\text{B}}{2} + \frac{{}^{\text{I}}_{-}\text{B}\,\Delta\,\text{A}}{2} + \frac{\Delta\,\text{A}.\,\Delta\,\text{B}}{4}$$

$$= {}^{\text{I}}_{-}\text{A}\ {}^{\text{I}}_{-}\text{B} + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,(\text{A}.\,\text{B}) - \tfrac{1}{4}\,\Delta\,\text{A}.\ \Delta\,\text{B}.$$

Dieſs für alle Jahre zuſammen macht, wie vorher die Coexiſtenz auf ganze Jahre berechnet, und noch $\frac{1}{2}$ hinzu, weniger $\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\,\text{A}.\,\Delta\,\text{B} + \Delta\,{}^{\text{I}}_{-}\text{A}\,\Delta\,{}^{\text{I}}_{-}\text{B} + +}{\text{A B}}\right)$

Nach

Nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* ist $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} = \frac{1}{\alpha}$, wenn α die Altersergänzung für A ist, und $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \overset{1}{-}B}{B} = \frac{1}{\beta}$, wenn β dasselbe bey B ist. Folglich ist das letzte von der Correction $\frac{1}{2}$ wiederum abzuziehende Stück $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}(1+1++)$. Dieses geht bis β wenn β zu der ältesten Person gehört. Also wird die Correction für diesen Fall $\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}$, was unbeträchtlich wenig von $\frac{1}{2}$ unterschieden ist, ausgenommen jedoch, dass selbst α, wie bey dem höhern Alter, sehr klein ist.

3.

Bleibt man immer bey der Voraussetzung, dass die *Abgehende im Anfang der Termine sterben*, so wird auch die Correction für *augenblickliche* Termine $= \frac{1}{2}$ seyn. Denn man theile das Jahr in n Theile, und nehme während des Jahrs den Abgang gleichförmig an, so wird für das erste $\frac{1}{n}$tel des Jahrs seyn

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{A\,B}\left(\overset{1}{-}A + \frac{n-1}{n}\Delta A\right)\left(\overset{1}{-}B + \frac{(n-1)}{n}\Delta B\right);$$

für das zweyte $\frac{1}{n}$tel

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{A\,B}\left(\overset{1}{-}A + \frac{(n-2)}{n} \cdot \Delta A\right)\left(\overset{1}{-}B + \frac{(n-2)}{n} \cdot \Delta B\right)$$

und für das letzte $\frac{1}{n}$tel $\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{n.\,A.\,B.}$.

Also

Alſo wird für das erſte Jahr, anſtatt $\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{A\,B}$ gefunden

$$n.\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{A.\,B\,n}+\frac{\overline{1}A.\Delta B}{n\,A\,B}\cdot\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\text{++}\frac{1}{n}\right)$$

$$+\frac{\overline{1}B\Delta A}{n.\,A\,B}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{2}\text{++}\frac{1}{n}\right)+\frac{\Delta A.\Delta B}{n.\,A\,B}$$

$$\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{(n-2)^2}{n^2}\text{++}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)=\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{A\,B}+$$

$$\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\overline{1}A.\Delta B}{A\,B}+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\overline{1}B\Delta A}{A.\,B}+\frac{\Delta A.\Delta B}{n\,A\,B}\cdot$$

$$\left(\frac{(n-1)^2+(n-2)^2\text{++}1}{n^2}\right)$$ das iſt, wenn n unendlich wird

$$=\frac{1}{A.\,B}\cdot\left(\overline{1}A\,\overline{1}B+\tfrac{1}{2}\overline{1}A\Delta B+\tfrac{1}{2}\overline{1}B\Delta A+\tfrac{1}{3}\Delta A.\Delta B\right)$$

$$=\frac{1}{A.\,B}\cdot\left(\overline{1}A\,\overline{1}B+\tfrac{1}{2}\overline{1}A\Delta B+\tfrac{1}{2}\overline{1}B\Delta B+\tfrac{1}{2}\Delta A\Delta B\right)$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\Delta A.\Delta B}{A\,B}=\frac{\overline{1}A.\,\overline{1}B}{A\,B}+\frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{AB-\overline{1}A\,\overline{1}B}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\Delta A.\Delta B}{A\,B}.$$ Nimmt man nun ſolche Theile aus allen Jahren zuſammen, ſo iſt das zu

$$\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{A\,B}+\frac{\overline{2}A\,\overline{2}B}{A\,B}\text{++}$$ das iſt zu $C\,\overline{\frac{1}{a\,b}}$ für ganze Jahre hinzuzuſetzende Stück $\frac{1}{2}\frac{AB-\overline{1}A\,\overline{1}B}{A\,B}$ für

alle

alle Jahre, welches $= \frac{1}{2}$ ist, wovon wiederum das Stück $\frac{1}{6} \frac{\Delta A . \Delta B}{A B}$ aus allen Jahren abzuziehen seyn würde, was aber als unbeträchtlich wegfallen kann. Für die Correction ist also $\frac{1}{2}$ zu nehmen.

4.

Zu §. 115.

Nimmt man an, nach eben der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben*, der Abgang erfolge nach dem Gesetz der *Continuität*, so ist (die Lebensergänzung für die jüngste A, α, und für die älteste B, β gesetzt) für jedes unbestimmte Jahr x, und für das Element dx, die Dauer in die Zahl der Paare multiplicirt $= {}^{x}\!A \; {}^{x}\!B . \, dx$, wenn die Zahl der anfänglichen Paare A B ist; also die Summe jener Producte dividirt durch die Zahl der anfänglichen Paare, $= \frac{S {}^{x}\!A \; {}^{x}\!B . \, dx}{A . B}$. Aber nach der Voraussetzung ist ${}^{x}\!A = A - \frac{x}{\alpha} . A$, und ${}^{x}\!B = B - \frac{x}{\beta} . B$. Folglich

$$\frac{S {}^{x}\!A . {}^{x}\!B . \, dx}{A B} = S \left(A . B - A . B . \frac{x}{\beta} - A B . \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha \beta} A B \right) \frac{dx}{A B}$$

$$= x - \frac{x^2}{2\beta} - \frac{x^2}{2\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha\beta} .$$

Nun ist nach der Integration $x = \beta$, als der Lebensergänzung der ältern Person B. Folglich

$$\frac{S {}^{x}\!A \; {}^{x}\!B . \, dx}{A B} = \frac{1}{2} \beta - \frac{\beta^2}{6\alpha} .$$

Dies

Dieſs iſt nach *Moivres* Auflöſung. Iſt $\alpha = \beta$, ſo iſt $C\overline{a\,b} = \frac{1}{3}\alpha$.

5.

Nach derſelben Hypotheſe, aber nur auf *ganze* Jahre, iſt die Reihe $= \frac{{}^{1}\!A\,{}^{1}\!B + {}^{2}\!A\,{}^{2}\!B + + {}^{n}\!A\,{}^{n}\!B}{A\,B}$,

$= \frac{(A-\Delta A)(B-\Delta B)+(A-2\Delta A)(B-2\Delta B)++(A-n\Delta A)(B-n\Delta B)}{A\,B}$

$= \frac{n\,A\,B - A\,(\Delta B + 2\,\Delta B + + n\,\Delta B) - B\,(\Delta A + 2\,\Delta A + + n\,\Delta A)}{A\,B}$

$+ \frac{\Delta A.\Delta B + 2^2.\,\Delta A.\,\Delta B + + n^n \Delta A.\Delta B}{A\,B}$

$= n - \frac{1}{n}\cdot S\overline{n} - \frac{1}{m}\cdot S\overline{n} + \frac{1}{n.m}\cdot S\,n^2$,

wenn $\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{n}$ und $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{m}$ geſetzet wird.

$= \frac{n}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{n^2}{m} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n}\right)$ oder da $n = \beta$ wird bey der Summirung

$= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\beta^2}{\alpha} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}\right)$.

Die Differenz zwiſchen dieſem und dem vorhergehenden iſt $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}$, das iſt die eigentliche Correction.

Oben im §. 2. bey der Vorausſetzung, daſs die Abgehende im Jahr die Hälfte deſſelben noch leben, war die Correction $\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}$. Hier iſt ſie $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}$. Das macht einen Unterſchied, den man vernachläſsigen kann.

kann. Ueberhaupt sieht man, es könne jedesmal für die Correction der Dauer $\frac{1}{2}$ angenommen werden.

6.

Wenn die Süssmilchische Tafel (nach §. 65. Cap. I.) dahin verändert wird, dass die Decremente vom 15ten Jahr an, gleichförmig wachsen und nachher wieder abnehmen, so kann die mittlere *Verbindungsdauer* auf dieselbe Art, wie die Lebensdauer einer einzelnen Person, (*Zusätze* zum Cap. I. §. 9.) in einer allgemeinen Formel gefasst werden. Nur entsteht einige Weitläuftigkeit bey der Anwendung.

Für die Person vom Alter a ist nämlich der *Terminus generalis* für die mittlere Lebensdauer

$= \frac{A}{A} - \frac{D - \frac{d}{2}}{A} x - \frac{d.x^2}{2A}$, wenn das Decrement des ersten Jahrs durch D, und die sich immer gleiche Differenz der Decremente durch d bezeichnet wird. Ferner ist für das Alter b der *Terminus generalis*, $\left(B - \left(D' - \frac{d'}{2}\right)x - \frac{d'x^2}{2}\right) : B$. Der Kürze wegen setze man $\frac{D - \frac{d}{2}}{A} = p$, $\frac{d}{2A} = q$, $\frac{D' - \frac{d'}{2}}{B}$ $= p'$, $\frac{d'}{2B} = q'$, so wird der *Terminus generalis* der Reihe für die Coexistenz

$$\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B + {}^{2}A.\,{}^{2}B}{A\,B} + + ; = (1 - px - qx^2)(1 - p'x - q'x^2)$$

und

und also die Summe dieser Glieder

$= S.1. - (p+p')\,S.\overline{x} - ((q+q') - pp')\,S.\overline{x^2}$
$+ (p'q+pq')\,S.\overline{x^3} + qq'\,S.\overline{x^4}.$

Kommen anstatt $\frac{A}{A}$ und $\frac{B}{B} = 1$, Brüche mit andern Zählern, und setzet man überhaupt die Wehrte dieser Brüche α, α', so ist die Summe

$= S.\overline{\alpha, \alpha'} - (\alpha p' + \alpha' p)\,S.\overline{x} - (\alpha q' + \alpha' q - pp')\,S.\overline{x^2}$
$+ (pq' + p'q)\,S.\overline{x^3} + qq'\,S.\overline{x^4}.$

und $S.\overline{\alpha\alpha'}$ bis x summirt, wird $= \alpha\alpha' x$.

Dieſs ist die allgemeine Summe für jede Periode, oder jeden besondern Theil der Verbindungsdauer, so weit man auf einmal sie summiren kann. Aber dieſs auf einmal zu nehmende Stück kann nicht gröſser seyn, als so weit die Decremente D, D' und die Differenzen d, d' dieselben Wehrte behalten. Daher ist auch eine Vorrichtung nöthig, die am deutlichsten in einem Beyspiel sich zeigen läſst.

Es sey $a = 20$ Jahr und $b = 30$. Weil nun das 36ste Glied in der Reihe der Lebensdauer für B schon auf das 66ste Jahr fällt, wo die erste und zwote Differenz sich ändert, so erhält man folgende Stücke, die jedes für sich nach der allgemeinen Formel zu berechnen sind.

$a = 20$; $b = 30$.

Erstes Stück.

30—31 . . 65—66
20—21 . . 55—56
x = 36

A = 4398 . . D = 43
α = 1 = α'.
B = 3923. D' = 53
d = d' = 1.

Zweytes Stück.

66 . . . . 75—76
56 . . . . 65—66
x = 10

$\alpha = \frac{2220}{4398}$; D = 79, d = 1

$\alpha' = \frac{1385}{3923}$; $D' = 85\frac{1}{2}$, $d' = 2\frac{1}{2}$

Drittes Stück.

76 . . . . 95—96
66 . . . . 85—86
x = 20

$\alpha = \frac{1385}{4398}$

$\alpha' = \frac{642\frac{1}{2}}{3923}$

$D = 85\frac{1}{2}$, $d = 2\frac{1}{2}$
$D' = 60\frac{1}{2}$, $d' = 2\frac{1}{2}$

Letztes Stück.

96 97
86 87
x = 1

$\alpha = \frac{3\frac{1}{2}}{4398}$

$\alpha' = \frac{7\frac{1}{2}}{3923}$

Für jedes dieser Stücke muss nach der Formel gerechnet werden. Mehr als drey solcher Stücke, das letzte, worin x = 1 ist, abgerechnet, bekommt man nicht, wenn nur von zwey Leben die Rede ist. Man sieht also, dass diese Rechnung in Hinsicht der Kürze vieles vor der gewöhnlichen, nach *Süssmilchs* unveränderten Tafel, voraus habe, sollte man nämlich nach der letztern ohne Hülfstabelle rechnen.

7.

Zu §.° 121.

Die hier gegebene Formel, welche auf einmal alle Vorschriften enthält, wird auf folgende Art gefunden.

Es ist $C\overline{a\,b} = \frac{1}{A.\,B}\left(\overline{-}^{1}A\,\overline{-}^{1}B + \overline{-}^{2}A\,\overline{-}^{2}B + \overline{-}^{3}A\,\overline{-}^{3}B + +\right)$

$= \frac{1}{A.\,B}\Big(\left(A - \Delta A\right)\overline{-}^{1}B + \left(A - \Delta A - \Delta\overline{-}^{1}A\right)\overline{-}^{2}B$

$+ \left(A - \Delta A - \Delta\overline{-}^{1}A - \Delta\overline{-}^{2}A\right).\overline{-}^{3}B + +\Big)$

$= \frac{1}{B}\left(\overline{-}^{1}B + \overline{-}^{2}B + \overline{-}^{3}B + +\right) - \frac{\Delta A}{AB}\left(\overline{-}^{1}B + \overline{-}^{2}B + \overline{-}^{3}B + +\right)$

$- \Delta\overline{-}^{1}A\left(\overline{-}^{2}B + \overline{-}^{3}B + +\right) - \frac{\Delta\overline{-}^{2}A}{A\,B}\left(\overline{-}^{3}B + \overline{-}^{4}B + +\right)$

$= E\overline{b} - \frac{\Delta A}{A\,B}S\overline{-}^{1}B - \frac{\Delta\overline{-}^{1}A}{A\,B}.\,S\overline{-}^{2}B - \frac{\Delta\overline{-}^{2}A}{A\,B}S\overline{-}^{3}B$

Nun ist auch weiter

$\Delta\overline{-}^{1}A = \Delta A - \Delta\Delta A$

$\Delta\overline{-}^{2}A = \Delta\overline{-}^{1}A - \Delta\Delta\overline{-}^{1}A = \Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta\overline{-}^{1}A$

$\Delta\overline{-}^{3}A = \Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta\overline{-}^{1}A - \Delta\Delta\overline{-}^{2}A$, wo $\Delta\Delta A$, $\Delta\Delta\overline{-}^{1}A$ die *Differenzen der Decremente*, $\Delta A, \Delta\overline{-}^{1}A$ und so ferner, sind. Folglich wird

$$C\overline{a\,b} = \frac{S.^{-1}B}{B} - \frac{1}{AB}.\Big(\Delta A.S.^{-1}B$$
$$+ (\Delta A - \Delta\Delta A)\, S.^{-2}B$$
$$+ (\Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta^{-1}A)\, S.^{-3}B$$
$$+ \;+\; + \Big)$$
$$= \frac{S.^{-1}B}{B} - \frac{1}{AB}\,\Delta A.\;\; S.S.^{-1}B$$
$$+ \frac{1}{AB}\,\Delta\Delta A\; S.S.^{-2}B$$
$$+ \frac{1}{AB}\,\Delta\Delta^{-1}A\; S.S.^{-3}B$$
$$+ \;+\; +$$

8.

Zu §. 122.

Da ferner $\Delta\,\Delta^{-1}A = \Delta\Delta A - \Delta^2 A$, wo $\Delta^2 A$ oder $\Delta\Delta\Delta A$ die *zwote Differenz der Decremente* ist, nämlich $\Delta\Delta A - \Delta\,\Delta^{-1}A$; und eben so $\Delta^{2-1}A$ so viel als $\Delta\Delta^{-1}A - \Delta\Delta^{-2}A$, auch nun $\Delta^{2-2}A = \Delta^{2-1}A - \Delta^{2-1}A$
$= \Delta^2 A - \Delta^2 A - \Delta^{2-1}A$;

$\Delta^{2-3}A = \Delta^2 A - \Delta^2 A - \Delta^{2-1}A - \Delta^{2-2}A$;

$\Delta^{2-n}A = \Delta^2 A - \Delta^2 A - \Delta^{2-1}A - \Delta^{2-1}A - \Delta^{2-n+1}A$

so setze man $S^{3-1}B$, $S^{3-2}B$, für die Summe der Summen $S.S.^{-1}B$ u. s. f. und man bekommt durch die Substitution der Differenzen $\Delta^2 A$, $\Delta^{2-1}A$, u. s. f.

$C\overline{a\,b}$

$$C_{\overline{a\,b}} = S.\frac{\overline{-1}B}{B} - \frac{1}{A}\cdot\ \Delta A.S.\frac{\overline{-1}B}{B}$$

$$+\frac{1}{A}\Delta^2 A\ S.S.\overline{-2}B$$

$$+\frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A)\ S.S.\overline{-3}B$$

$$+\frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^{3\overline{-1}} A)\ S.S.\overline{-4}B$$

$$+++\frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^{3\overline{-1}} A - - \Delta^{3\overline{n-3}} A)\ S.S.\overline{-n}B$$

$$= S.\frac{\overline{-1}B}{B} - \frac{1}{AB}\cdot\ \Delta A.\ S.S^{\overline{-1}}B$$

$$+\frac{1}{AB}\cdot\ \Delta\Delta A.S^2.\overline{-2}B$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\ \Delta^3 A.S^3\overline{-3}B$$

$$-\frac{1}{AB}\Delta^{3\overline{-1}}A.\ S^3\overline{-4}B$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\ \Delta^{3\overline{n-3}}A.S^3\overline{-n}B$$

Setzet man solche gleichförmig sich verändernde Decremente voraus, wie bey der nach §. 63. Cap. I. veränderten Süssmilchischen Tafel, so sind die zwoten Differenzen bis auf ein Paar, alle = o. Da würde diese Rechnung durch die *dritten* Summen ausserordentlich kurz seyn. Macht man also ein für allemal die Vorrichtung, dass die Summen der Columne D in der Hülfstafel von neuen summirt, und diese letzten Summen, welche denn

die *dritten* sind, in eine eigene Columne zur Seite gesetzet werden, so ist die Berechnung für die Dauer der Coexistenz sehr leicht gemacht.

Die Summirungen sind leichte Arbeiten. *Sonst kann auch jede Summe einer höhern Ordnung unmittelbar aus den zu summirenden Zahlen, ohne vorher die dazwischen stehenden von den niedern Ordnungen zu haben, gefunden werden.* So ist die zwote Summe

$$S.S.{}^{1}_{-}B = {}^{1}_{-}B + 2.{}^{2}_{-}B + 3.{}^{3}_{-}B + + n.{}^{n}_{-}B$$

weil $S.S.{}^{1}_{-}B = S.{}^{1}_{-}B + S.{}^{2}_{-}B + S.{}^{3}_{-}B + + S.{}^{n}_{-}B$

das ist $= {}^{1}_{-}B + {}^{2}_{-}B + {}^{3}_{-}B + + {}^{n}_{-}B$

$+ {}^{2}_{-}B + {}^{3}_{-}B + + {}^{n}_{-}B$

$+ {}^{3}_{-}B + + {}^{n}_{-}B$

$+ \quad + \quad +$

$+ + {}^{n-1}_{---}B + {}^{n}_{-}B$

Und die Summe der *dritten Ordnung*, oder

$$S^{3}{}^{1}_{-}B = S.S.{}^{1}_{-}B + S.S.{}^{2}_{-}B + + S.S.{}^{n}_{-}B$$

$$= {}^{1}_{-}B + 2\,{}^{2}_{-}B + 3\,{}^{3}_{-}B + + n.{}^{n}_{-}B$$

$$+ 1\,{}^{2}_{-}B + 2\,{}^{3}_{-}B + + \overline{n-1}.\,{}^{n}_{-}B$$

$$+ 1\,{}^{3}_{-}B + + \overline{n-2}\,{}^{n}_{-}B$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$+ 1.\,{}^{n}_{-}B$$

=

$$= 1.\overset{1}{B} + \frac{2.3}{2}.\overset{2}{B} + \frac{3.4}{2}\overset{3}{B} + + \frac{n.n+1}{2}.\overset{n}{B},$$

wo die Coefficienten die *Trigonalzahlen* sind. Man wird aber am kürzesten abkommen, wenn man durch bloßes Summiren die ganze Hülfstabelle auf einmal macht.

9.

Zu §. 124.

Es verdienet hier auch noch die Art bemerkt zu werden, wie aus der gegebenen Verbindungsdauer für zwo Personen vom Alter a und b, selbige für zwo andere vom Alter a und $b+1$ gefunden werde.

Es sey $\frac{1}{AB} \cdot \left(\Delta A \overset{1}{B} + \Delta \overset{1}{A} \overset{2}{B} + +\right)$

welche Reihe die *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von B über A* ist, davon unten mehr, $= V$, so wird

$$V = \frac{1}{A.B} \cdot \left((\Delta A \overset{1}{B}) + (\Delta A - \Delta\Delta A) \overset{2}{B} + (\Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta \overset{1}{A}) \overset{3}{B} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB} \Delta A. \int \overset{1}{B} - \frac{\Delta\Delta A}{AB} \cdot \int \overset{2}{B} - \frac{\Delta\Delta \overset{1}{A}}{AB} \int \overset{3}{B} + +$$

Also ist dieser Wehrt mittelst der Differenzen und der ersten Summen der Lebenden zu finden, durch *kleinere* Zahlen, obgleich nicht durch weniger, als die Rechnung der Verbindungsdauer erfordert.

Setzet man V als gefunden voraus, so ist weiter

$$C_{\overline{a\,b}} = \frac{1}{A.B} \cdot \left({}^{1}_{-}A.\,{}^{1}_{-}B + {}^{2}_{-}A.\,{}^{2}_{-}B + + \right)$$

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\left(A - \Delta A \right) {}^{1}_{-}B + \left({}^{1}_{-}A - \Delta\, {}^{1}_{-}A \right) {}^{2}_{-}B + + \right)$$

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(A.\,{}^{1}_{-}B + {}^{1}_{-}A.\,{}^{2}_{-}B + + \right) - V$$

Demnach

$$C_{\overline{a\,b}} - \frac{A\ {}^{1}_{-}B}{A.B} = \frac{1}{A.B} \left({}^{1}_{-}A.\,{}^{2}_{-}B + {}^{2}_{-}A.\,{}^{3}_{-}B + + \right) - V$$

und

$$\frac{B}{{}^{1}_{-}B} \cdot C_{\overline{a\,b}} - 1 = \frac{1}{A.\,{}^{1}_{-}B} \left({}^{1}_{-}A.\,{}^{2}_{-}B + {}^{2}_{-}A.\,{}^{3}_{-}B + + \right) - \frac{B}{{}^{1}_{-}B} \cdot V$$

$$= C_{\overline{a.(b+1)}} - \frac{B}{{}^{1}_{-}B} \cdot V$$

Folglich

$$C_{\overline{a.(b+1)}} = \frac{B}{{}^{1}_{-}B} \cdot \left(C_{\overline{a\,b}} + V \right) - 1.$$

Zusätze

Zuſätze

zum

zweyten Abſchnitt des dritten Capitels.

IO.

Zu §. 131.

$$\text{Es iſt } R = \frac{1}{A.B}\cdot\left(\frac{\Delta.(AB)}{r} + \frac{\Delta\left(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\right)}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{AB - \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{AB.r} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B - \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{AB.r^2} + +$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{A.\Delta B}{r} + \frac{\overset{1}{-}A\,\Delta\,\overset{1}{-}B}{r^2} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{B\,\Delta A}{r} + \frac{\overset{1}{-}B.\,\Delta\,\overset{1}{-}A}{r^2} + +\right)$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{\Delta A\Delta B}{r} + \frac{\Delta\,\overset{1}{-}A.\,\Delta\,\overset{1}{-}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(\int\frac{A.\,\Delta B}{r} + \int\frac{B.\,\Delta A}{r} - \int\frac{\Delta A\Delta B}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{A.B}\cdot\left(\int\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{r} + \int\frac{\overset{1}{-}B.\,\Delta A}{r} + \int\frac{\Delta A.\,\Delta B}{r}\right).$$

Berechnet man dieſe drey Theile von R beſonders, ſo ſieht man leicht, daſs dadurch nicht viel Abkürzung in der Arbeit, wenn man $\lambda\overline{ab}$ ſucht, erhalten werde. Allein jeder dieſer Theile von R iſt auſser dieſs noch für ſich zu bemerken, und wird unten in der Lehre von

Anwartschaften vorkommen. Es ist $\frac{1}{AB} \cdot \int^{1} A. \frac{\Delta B}{r}$ der *auf ein Jahr zurück discontirte Werth einer bey dem Tode von B zahlbaren Summe* 1, *im Fall A alsdenn noch lebet.*

Auch $\frac{1}{AB} \cdot \int^{1} B. \frac{\Delta A}{r}$, ein *solcher Werth bey dem Tode von A, wenn B alsdenn noch lebet*, und $\frac{1}{AB} \int \frac{\Delta B. \Delta A}{r}$, ein *solcher Werth für den Fall, wenn A und B zugleich in dem Lauf desselben Jahrs abgehen.*

Diese drey Theile können auf zwey gebracht werden, nämlich

$$R = \frac{1}{AB} \cdot \int^{1} A. \frac{\Delta B}{r} + \int \frac{B \Delta A}{r},$$

auch $= \frac{1}{AB} \cdot \int \frac{A. \Delta B}{r} + \int^{1} B. \frac{\Delta A}{r}$.

Weil nun aber $\Delta\, {}^{1}B = \Delta B - \Delta \Delta B$

$$\Delta\, {}^{2}B = \Delta B - \Delta \Delta B - \Delta \Delta\, {}^{1}B$$

und so ferner, so ist auch

$$\int^{1} A. \frac{\Delta B}{r} = \frac{{}^{1}A. \Delta B}{r} + \frac{{}^{1}A\,(\Delta B - \Delta \Delta B)}{r^2}$$

$$+ {}^{3}A \frac{(\Delta B - \Delta \Delta B - \Delta \Delta\, {}^{1}B)}{r^3} + +$$

$$= \Delta B. \left(\frac{{}^{1}A}{r} + \frac{{}^{2}A}{r^2} + + \right) -$$

$$-\Delta\Delta B\left(\frac{{}^{2}A}{r^2}+\frac{{}^{3}A}{r^3}++\right)-\Delta\Delta^{1}B\left(\frac{{}^{3}A}{r^3}++\right)--$$

$$=\Delta B.\int\frac{{}^{1}A}{r}-\Delta\Delta B\int\frac{{}^{2}A}{r^2}$$

$$-\Delta\Delta^{1}B\int\frac{{}^{3}A}{r^3}---$$

Eben so wird $\int\frac{B\Delta A}{r}=\frac{B.\Delta A}{r}+\frac{{}^{1}B.\Delta^{1}A}{r^2}++$

$$=\frac{B\Delta A}{r}+\frac{{}^{1}B(\Delta A-\Delta\Delta A)}{r^2}+\frac{{}^{2}B(\Delta A-\Delta\Delta A-\Delta\Delta^{1}A)}{r^3}++$$

$$=\Delta A\left(\frac{B}{r}+\frac{{}^{1}B}{r^2}+\frac{{}^{2}B}{r^3}++\right)$$

$$-\Delta\Delta A\left(\frac{{}^{1}B}{r^2}+\frac{{}^{2}B}{r^2}++\right)-\Delta\Delta^{1}A\left(\frac{{}^{2}B}{r^2}++\right)--$$

Folglich erhält man

$$R=\frac{1}{AB}\left(\Delta B.\int\frac{{}^{1}A}{r}-\Delta\Delta B.\int\frac{{}^{2}A}{r^2}-\Delta\Delta^{1}B\int\frac{{}^{3}A}{r^3}++\right)$$

$$+\frac{1}{AB}\left(\Delta A.\int\frac{B}{r}-\Delta\Delta A.\int\frac{{}^{1}B}{r^2}-\Delta\Delta^{1}A.\int\frac{{}^{2}B}{r^3}-\right)$$

Nun sind die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden in der ersten Hülfstafel (§. 56.) in der Columne E, die bey dem Jahr $a+1=\frac{1}{r^a}\int\frac{{}^{1}A}{r}$

— — — $a+2=\frac{1}{r^a}.\int\frac{{}^{2}A}{r^2}$ u. s. f.

Inglei-

Ingleichen

die bey dem Jahr b; $= \frac{1}{r^{b-1}} \int \frac{B}{r}$

— — — $b+1 = \frac{1}{r^{b-1}} \int \frac{\overset{1}{-}B}{r^2}$ und so ferner.

Leget man also die Columne der Differenzen B der zwoten Hülfstafel (§. 117.) an die Zahlen der Columne E der ersten, so dass die Differenz zum Jahr b, oder $\Delta\Delta B$, bey dem Jahr $a+2$ zu stehen kommt, und multiplicirt alsdenn jede Differenz in die beystehende Zahl, so erhält man auf diese Weise

$$\frac{\Delta\Delta B}{r^a} \cdot \int \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\Delta \overset{1}{-}B}{r^a} \cdot \int \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + +$$

welche Summe *negativ* oder *positiv* wird, je nachdem die Producte aus den negativen oder positiven Differenzen die grösten sind.

Man lege nochmals die Differenzen so an die Summen, dass die zum Jahr a gehörige $\Delta\Delta A$, bey der Summe fürs Jahr $b+1$ zu stehen kommt; verfahre aber wie vorher, so erhält man

$$\frac{\Delta\Delta A}{r^{b-1}} \cdot \int \frac{\overset{1}{-}B}{r^2} + \frac{\Delta\Delta \overset{1}{-}A}{r^{b-1}} \int \frac{\overset{2}{-}B}{r^3} + +$$

Wird die erste dieser beyden Summen dividirt durch das Product aus der Zahl der Lebenden im Jahr b, nämlich B, in die discontirte Zahl der Lebenden im Jahr a, das ist, durch $B.A : r^a$; und die Letztere durch das Product aus A, in die discontirte Zahl fürs Jahr b, das ist durch

A.

A. $B : r^b$, so wird

$$\frac{1}{BA : r^a}\left(\frac{\Delta\Delta B}{r^a}\int^2\frac{A}{r^2} + \frac{\Delta\Delta\,{}^{1}B}{r^4}\int^3\frac{A}{r^3} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(\Delta\Delta B\int\frac{A}{r^2} + \Delta\Delta\,{}^{1}B\int^2\frac{A}{r^3} + +\right)$$

Dafür schreibe man *M*.

Ferner wird

$$\frac{1}{AB : r^b}\cdot\left(\frac{\Delta\Delta A}{r^{b-1}}\int^1\frac{B}{r^2} + \frac{\Delta\Delta\,{}^{1}A}{r^{b-1}}\int^2\frac{B}{r^3} + +\right)$$

$$= \frac{r}{AB}\cdot\left(\Delta\Delta A\int^1\frac{B}{r^2} + \Delta\Delta\,{}^{1}A\int^2\frac{B}{r^3} + +\right)$$

wofür man *N* setzen kann.

Sind also M und N gefunden, so ist nun

$$R = \frac{1}{AB}\cdot\Delta B\int^1\frac{A}{r} - M + \frac{1}{AB}\cdot\Delta A\int\frac{B}{r} - \frac{N}{r}\cdot$$

Und weil $\frac{1}{A}\cdot\int^1\frac{A}{r} = \lambda\overline{a}$, auch $\frac{1}{B}\int\frac{B}{r}$

$$= \frac{B}{Br} + \frac{1}{B}\int^1\frac{B}{r^2} = \frac{1+\lambda\overline{b}}{r}, \text{ so wird}$$

$$R = \frac{\Delta B}{B}\lambda\overline{a} - M + \frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{(1+\lambda\overline{b})}{r} - \frac{N}{r}$$

$$= \frac{\Delta B}{B}\lambda\overline{a} - M + \frac{\Delta A}{A}\frac{(1-N+\lambda\overline{b})}{r}.$$

II.

Zu §. 133.

Der hier gegebene Ausdruck für die *Verbindungsrenten* ist dem obigen für die *Verbindungsdauer* völlig ähnlich, und wird auch auf dieselbige Art bewiesen.

Es ist nämlich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{A.B}\cdot\left(\frac{\overline{1}A\,\overline{1}B}{r} + \frac{\overline{2}A\,\overline{2}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left((A-\Delta A)\frac{\overline{1}B}{r} + (A-\Delta A-\Delta^{\overline{1}}A)\frac{\overline{2}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(A.\frac{\overline{1}B}{r} + A.\frac{\overline{2}B}{r} + +\right) -$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\Delta A.\left(\frac{\overline{1}B}{r} + \frac{\overline{2}B}{r^2} + +\right) -$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\Delta^{\overline{1}}A.\left(\frac{\overline{2}B}{r} + \frac{\overline{3}B}{r^3} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{b} = \frac{1}{AB}\cdot\Delta A.\int\frac{\overline{1}B}{r} - \frac{\Delta^{\overline{1}}A}{AB}\int\frac{\overline{2}B}{r^2} + +$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{AB}\cdot\left(\Delta A\int\frac{\overline{1}B}{r} + \frac{(\Delta A-\Delta\Delta A)}{r^2}\int\frac{\overline{2}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{AB}.S.\int\frac{\overline{1}B}{r} + \frac{1}{A.B}\left(\Delta\Delta A.S.\int\frac{\overline{2}B}{r^2}\right.$$

$$\left. + \Delta\Delta^{\overline{1}}A.S.\frac{\int\overline{3}B}{r^3} + +\right)$$

Wenn

Wenn die Summen aus der Columne E der Tabelle §. 117. genommen werden, so ist die bey dem Jahr b stehende Zahl $= S.\int \frac{1}{r}$ B. Wird also auch, anstatt durch A B, dividirt durch A B: r^b, das ist, durch das Product aus der Anfangszahl A in die discontirte Zahl der Lebenden für das Jahr b, so ist der Ausdruck von derselben Gröfse.

12.

Zu §. 134.

Nach der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben* wird der *Werth der Verbindungsrente* für zwo Personen auf jährliche Zahlungen leicht gefunden. Es ist nämlich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{(A-\Delta A).(B-\Delta B)}{A.B.r} + \frac{(A-2\Delta A).(B-2\Delta B)}{A.B.r^2}$$

$$+ + \frac{(A-\beta\Delta A).(B-\beta\Delta B)}{A.B.r^\beta},$$ wo wiederum β die Altersergänzung der ältern Person B ist. Folglich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^\beta}$$

$$- \frac{\Delta A}{A}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \frac{\beta}{r^\beta}\right.$$

$$- \frac{\Delta B}{B}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \frac{\beta}{r^\beta}\right.$$

$$+ \frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + + \frac{\beta^2}{r^\beta}\right)$$

Nun

Nun ist $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{\alpha}$, wenn α die Altersergänzung von a, dem Alter der Person A, ist, und $\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{\beta}$

Daher ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{1}{r^{\beta}} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\int\frac{\beta}{r^{\beta}} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{\beta^2}{r_{\beta}}$$

Aber $\lambda\overline{b} = \int\frac{1}{r^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta}{r^{\beta}}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 8.)

Folglich $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{\beta}{r^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta^2}{r^{\beta}}\right)$

13.

Es ist $\int\frac{\beta}{r^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta^2}{r^{\beta}}$ so viel als *eine im arithmetischen Verhältnifs*, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen, *wachsende Leibrente* zum Alter b, wenn dieselbe Hypothese vom gleichförmigen Absterben vorausgesetzet wird, oder $L\overline{b}$. Folglich $\lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}L\overline{b} = \lambda\overline{ab}$.

14.

Bey *augenblicklichen* Renten ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{\overline{A}^{x} - \overline{B}^{x}}{A.B.r^{x}}\,dx. = \int\frac{(A - x.\Delta A).(B - x.\Delta B)dx}{A.\ B.\ r^{x}}$$

$$= \int\frac{dx}{r^{x}} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)\int\frac{x\,dx}{r^{x}} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2.dx}{r^{x}},$$

$$= \int\frac{dx}{r^{x}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^{x}} - \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\int\frac{x\,dx}{r^{x}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x^2dx}{r^{x}}\right)$$

Aber

Aber bey eben der Voraussetzung ist alsdann

$\lambda b = \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \int \frac{x\,dx}{r^x}$, und

$\int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \int \frac{x^2 dx}{r^x} = L\overline{b}$.

Folglich auch $\lambda \overline{b} - \frac{L\overline{b}}{\alpha} = \lambda \overline{a\,b}$.

15.

Das Absterben *gleichförmig* gesetzt, wird der *Wehrt* der *Verbindungsrente* von zwey Leben auch durch die *einfachen Leibrenten* und die *Zeitrenten* bestimmt.

Für *augenblickliche* Renten ist

$\lambda \overline{a\,b} = \int \frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{x^2 dx}{r^x}$

wo nämlich α zu a, und β zu b die *Altersergänzungen* sind. Weil nun $\int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} = \lambda \overline{b}$, so ist

$\lambda \overline{a\,b} = \lambda \overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{x^2 dx}{r^x}$

$= \lambda \overline{b} - \frac{1}{\alpha}\, p. \int \frac{dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha}\, p\, \frac{x}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot 2\, p. \int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\, \frac{p\,x^2}{r^x}$ (*Zusätze* zu Cap. I. §. 24.)

Nun ist nach der Integration $x = \beta$, weil β zu dem ältesten Leben gehört.

Daher $+ \frac{1}{\alpha}\, \frac{p\,x}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\, \frac{p\,x^2}{r^x} = 0$, also

$\lambda \overline{a\,b} = \lambda \overline{b} - \frac{1}{\alpha}\, p. \int \frac{dx}{r^x} + \frac{2}{\alpha\beta}\, p. \int \frac{x\,dx}{r^x}$.

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\cdot p\lambda\overline{b} + \frac{1}{\alpha\beta} p\int\frac{x\,dx}{r^x} = \left(1-\frac{p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b}$$

$$+\frac{1}{\alpha} p\left(\int\frac{dx}{r^x} - \lambda\overline{b}\right) = \left(1-\frac{2p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} + \frac{p}{\alpha}\cdot\int\frac{dx}{r^x}$$

Wenn blos *jährliche* Renten gerechnet werden, so ist

$$\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\cdot\int\frac{\beta}{r^\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{\beta^2}{r^\beta}$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} p\int\frac{1}{r^\beta} + \frac{p\beta}{\alpha r^\beta}$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta} p\int\frac{\beta}{r^\beta} + \frac{rp}{\alpha\beta}\int\frac{\beta}{r^\beta} - \frac{p(\beta+1)\beta}{\alpha\beta\cdot r^\beta}$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{p}{\alpha}\cdot\lambda\overline{b} + \frac{rp}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{\beta}{r^\beta} - \frac{p}{\alpha r^\beta}$$

$$= \left(1-\frac{p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} + \frac{pr}{\alpha}\left(\int\frac{1}{r^\beta} - \lambda\overline{b}\right) - \frac{p}{\alpha r^\beta}$$

$$= \left(1-\frac{p}{\alpha}(1+r)\right)\lambda\overline{b} + \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{1}{r^\beta} + p\int\frac{1}{r^{\beta-1}}\right).$$

16.

Zu §. 136.

Es ist nach jeder Ordnung des Sterbens

$$\lambda\overline{ab} = \frac{{}^1\overline{A}\;{}^1\overline{B}}{A.Br} + \frac{{}^2\overline{A}\;{}^2\overline{B}}{A.Br^2} + +$$

$$= \frac{(A-\Delta A)\,{}^1\overline{B}}{AB.r} + \frac{(A-\Delta A-\Delta\,{}^1\overline{A})\,{}^2\overline{B}}{AB.r^2} + +$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{AB}\cdot\left(\frac{{}^{1}\overline{B}}{r} + \frac{{}^{2}\overline{B}}{r^2} + +\right)$$

$$- \frac{\Delta {}^{1}\overline{A}}{AB}\cdot\left(\frac{{}^{2}\overline{B}}{r} + \frac{{}^{3}\overline{B}}{r^2} + +\right)$$

$$- - -$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{A}\lambda\overline{b} - \frac{\Delta {}^{1}\overline{A}}{A}\cdot\frac{{}^{1}\overline{B}}{Br}\lambda\overline{b+1}$$

$$- \frac{\Delta {}^{2}\overline{A}}{A}\cdot\frac{{}^{2}\overline{B}}{Br^2}\lambda\overline{b+2}.$$

Nun ist $\frac{{}^{1}\overline{B}}{Br}\lambda\overline{b+1} = {}^{-1}\overline{\lambda\cdot b}$, einer *auf Ein Jahr aufgeschobenen Leibrente für b*; und $\frac{{}^{2}\overline{B}}{Br^2}\lambda\overline{b+2} = {}^{-2}\overline{\lambda\cdot b}$, einer *auf zwey Jahr aufgeschobenen Leibrente* von *b* (Cap. II. §. 83.) Auch ist $\lambda\cdot\overline{b} + {}^{-1}\overline{\lambda\cdot b} + {}^{-2}\overline{\lambda\cdot b} + + = L\cdot\overline{b}$. (§. 88.) Nimmt man also statt der verschiedenen Factoren $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta {}^{1}\overline{A}}{A}$, u. s. f. deren in allen α sind, weil α die Altersergänzung ist, (obgleich in der Formel nicht mehr, als die ersten β gebraucht werden) und davon die Summe gleich ist $\frac{A}{A} = 1$, das Mittel $\frac{1}{\alpha}$, so wird

$$\lambda\overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{\alpha}\left(\lambda\overline{b} + {}^{-1}\overline{\lambda\cdot b} + {}^{-2}\overline{\lambda\cdot b} + \right)$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\cdot L\overline{b},$$ welches von dem wahren Wehrt so viel nicht abweichen, obgleich auch nicht völlig zutreffen kann.

17.

Zu §. 144.

Es ist

$$\lambda\overline{a\,b} = \frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{(A-\Delta A)^{\overline{1}}B}{r} + \frac{(^{1}A - \Delta^{1}A)^{\overline{2}}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{A.^{\overline{1}}B}{r} + \frac{^{1}A\,.^{\overline{2}}B}{r^2} + +\right) -$$

$$- \frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{\Delta A.^{\overline{1}}B}{r} + \frac{\Delta^{1}A.^{\overline{2}}B}{r^2} + +\right)$$

Dieser letzte Theil ist *der baare Wehrt einer beym Tode von A zahlbaren Summe 1, im Fall B alsdenn noch lebet*, auf ein Jahr zurück discontirt; man setze dafür $\frac{V}{r}$, so ist

$$\lambda\overline{a\,b} = \frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{A.^{\overline{1}}B}{r} + \frac{^{1}A\,.^{\overline{2}}B}{r^2} + +\right) - \frac{V}{r}$$

Folglich $\lambda\overline{a\,b} - \frac{A.^{\overline{1}}B}{A.B\,r} = \frac{1}{A\,B}\left(\frac{^{1}A\,.^{\overline{2}}B}{r^2} + +\right) - \frac{V}{r}$,

$$\frac{B}{^{\overline{1}}B}\,r.\lambda\overline{a\,b} - 1 = \frac{1}{A\,.^{\overline{1}}B}\cdot\left(\frac{^{1}A\,.^{\overline{2}}B}{r} + +\right) - \frac{B}{^{\overline{1}}B}\,V.$$

Also $\frac{B}{^{\overline{1}}B}\,(r.\lambda\overline{a\,b} + V) - 1 = \lambda\overline{a\,(b+1)}$.

18.

Zu §. 147.

Die Correction für die Verbindungswehrte, wenn man sie auf *augenblickliche* Renten haben will, wird folgen-

folgendermaſsen gefunden. Die Schlüſſe ſind hier denen ähnlich, welche oben (*Zuſätze* zu Cap. II. §. 16. 17) geführet ſind.

In einem unendlich kleinen Theil des Jahrs ſey der Abgang von der Anfangszahl der Lebenden A; $\frac{\Delta A}{n}$, und von B, $\frac{\Delta B}{n}$. Innerhalb des Jahrs wird das Abſterben gleichförmig angenommen, und alſo auf jedes $\frac{1}{n}$tel des Jahrs auch $\frac{1}{n}$tel der jährlichen Decremente ΔA, und ΔB gerechnet. Was abſtirbt, ſtirbt aber ab im *Anfang der Termins* nach der gewöhnlichen Vorausſetzung. Der jährliche Zinsfuſs r wird beybehalten. Es iſt alſo das Disconto für den erſten Augenblick $r^{\frac{1}{n}}$, für den zweyten $r^{\frac{2}{n}}$, und ſo ferner. Folglich kommen für das erſte Jahr anſtatt $\frac{\frac{1}{n}A.\frac{1}{n}B.}{A.Br}$ folgende Theile der Rechnung.

$$\frac{1}{AB}\,\frac{1}{n}\left(A-\frac{\Delta A}{n}\right)\left(B-\frac{\Delta B}{n}\right)\cdot\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$$

$$+\frac{1}{AB}\cdot\frac{1}{n}\left(A-\frac{2\Delta A}{n}\right)\cdot\left(B-\frac{2\Delta B}{n}\right)\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$$

$$++=\frac{1}{AB}\cdot\frac{AB}{n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}++\right)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{A\Delta B}{n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{B\Delta A}{n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\Delta A.\Delta B}{n.n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2^2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3^2}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$=\frac{1}{A.B}\cdot\frac{ABp'}{pr}-\frac{1}{AB}\cdot\frac{A\Delta B}{pr}\cdot p'(p'-p)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{B\Delta A}{pr}\cdot p'(p'-p)+$$

$$\frac{1}{AB}\cdot\frac{\Delta A.\Delta B}{pr}p'(2p'(p'-p)-p)$$ (*Zusätze* zu Cap. I. §. 23. 24.)

Hier ist wiederum $p'=\frac{1}{\log.nat.r}$, und $p=\frac{1}{r-1}$. Nun ist $\frac{p'}{pr}=0,98$ für den Zinsfuſs $=1,04$, und $p'-p$ kann $=0,5$ genommen werden. (*Zusätze* zu Cap. II. §. 16.) Alſo wird der obige Wehrt

$$=0,98\left(\frac{AB}{AB}-\frac{1}{2}\frac{A\Delta B}{AB}-\frac{1}{2}\frac{B\Delta A}{AB}+\frac{\Delta A\Delta B}{2AB}\right)$$

Auf gleiche Weiſe bekommt man für das *zweyte* Jahr ähnliche Stücke nur mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt. Folglich erhält man für alle Jahre zuſammen den Wehrt der Verbindungsrente auf Augenblicke

$$S=\frac{1}{AB}\cdot 0,98\left(A.B+\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B}{r}+\frac{{}^{2}A\,{}^{2}B}{r^2}++\right)$$

$$-\frac{0.40}{AB}\left(A\Delta B+\frac{{}^{1}A\Delta\,{}^{1}B}{r}++\right)$$

$$= \frac{0,49}{AB}\left(B.\Delta A + \frac{{}^{1}B\Delta {}^{1}A}{r} + +\right)$$

$$+ \frac{0,49}{AB}\cdot\left(\Delta A.\Delta B + \frac{\Delta {}^{1}A.\Delta {}^{1}B}{r} + +\right)$$

$= 0,98.\lambda\overline{ab} + 0,98 - 0,49.\ r\,R.$ §. 10. und weil

$r\,R = 1 - \frac{\lambda\overline{ab}}{p}$, so wird $S = 0,98.\lambda\overline{ab}$

$$+ 0,98 - 0,49 + 0,49\,\frac{\lambda\overline{ab}}{p} =$$

$$= \left(0,98 + \frac{0,49}{25}\right)\lambda\overline{ab} + 0,49 =$$

$= (0,98 + 0,02)\,\lambda\overline{ab} + 0,5 = \lambda\overline{ab} + \frac{1}{2}$ ganz nahe. Es ist nämlich $p = 25$. Die Correction ist also $\frac{1}{2}$ ganz nahe, denn der gefundene Wehrt von S ist nur beynahe richtig, weil $p' - p$, nicht völlig 0, 5 ist.

19.

Zu §. 138.

Aufgabe. Das Absterben *gleichförmig* gesetzt, so läßt sich die *Altersergänzung* für ein Alter finden, dessen *Leibrente* so groß ist, als die gegebene *Verbindungsrente* für zwo Personen.

Dieser letzte Wehrt sey N. Die gesuchte Altersergänzung x, so ist $N = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x\,dx}{r^x}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 17.) $= p\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) - \frac{1}{x}\left(p\int\frac{dx}{r^x} - \frac{px}{r^x}\right)$, wo nämlich $p = \frac{1}{\log.\,nat.\,r}$, weil man die Wehrte

für augenblickliche Renten gebraucht.

Also $N = p - \frac{1}{x} \cdot p^2 \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ (*Zusätze* zu Cap. I. §. 23.) Daher

$$\frac{x.(p-N)}{p^2} = 1 - \frac{1}{r^x}.$$

Wird $\frac{1}{r} = V$ gesetzet, so bekömmt man

$$V^x + \frac{p - N}{p\,p.} \cdot x = 1.$$

Dieſs ist eine *Exponentialgleichung*, welche nach der von Hr. *Morville* *) gewieſenen Methode aufgelöſet werden kann. Ich zeige dieſs aber nur im Vorbeygehen an, weil in Praxis davon zur Zeit wenig Gebrauch zu machen ist.

20.

Zu §. 138. Satz 34.

Nimmt man die Altersergänzung x so groſs, als sie für ein *einfaches* Leben m seyn muſs, deſſen Dauer der Verbindungsdauer $C\,\overline{a\,b}$ gleich ist, so trifft der 34ste Satz zwar nicht genau ein, allein man kann die Correction bestimmen, die in diesem Fall zu der Leibrente $\lambda\,\overline{m}$ hinzugesetzet werden muſs, um die Verbindungsrente $\lambda\,\overline{a\,b}$ zu bekommen, die Hypothese vom gleichförmigen Sterben nämlich vorausgesetzet.

Es

*) Siehe deſſen *Versuch, Exponentialgleichungen im allgemeinen aufzulösen, in der neuen Sammlung der Societätsschriften zu Copenhagen.* p. 606, §. 45.

Es ist $\lambda \overline{a\,b} = \lambda \overline{b} - \frac{1}{\alpha} L\overline{b}$, (wiederum sind α und β die Altersergänzungen zu a und b, und p ist der natürliche Logarithme von dem Zinsfuss, der oben p' geschrieben war. Weil nun $\lambda \overline{b} = p - \frac{p}{\beta} \int_r^{\beta} dx$, und $L\overline{b} = p' \left(2\,\lambda\overline{b} - \int_r^{\beta} dx\right)$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 16. 23.) so wird $\lambda \overline{a\,b} = p - \frac{p}{\beta} \int_r^{\beta} dx$

$$- \frac{p}{\alpha} \cdot \left(2p - \frac{2p}{\beta} \cdot \int_r^{\beta} dx\right) + \frac{p}{\alpha} \cdot \int_r^{\beta} dx$$

$$= p - \frac{2p^2}{\alpha} + \left(\frac{p}{\alpha} - \frac{p}{\beta} + \frac{2p^2}{\alpha\beta}\right) \int_r^{\beta} dx \ldots$$

Setzet man $\alpha = \beta$, um nur den leichtesten Fall zu haben, so ist $\lambda \overline{a\,a} = p - \frac{2p^2}{\alpha} + \frac{2p^2}{\alpha^2} \int_r^{\alpha} dx$.

Das einfache Leben, dessen Dauer so gross ist als $C\overline{a\,a} = \frac{1}{2}\alpha$ (§. 4.) und dessen Altersergänzung μ, also $= \frac{2}{3}\alpha$, sey m, so ist $\lambda \overline{m} = p - \frac{p}{\mu} \cdot \int_r^{\mu} dx$.

Folglich der Unterschied

$$\lambda \overline{a\,b} - \lambda \overline{m} = \frac{2p^2}{\alpha^2} \cdot \int_r^{\alpha} dx - \frac{2p^2}{\alpha} + \frac{3}{2}\frac{p}{\alpha} \int_r^{\mu} dx$$

$$= \frac{p}{\alpha} \left(\frac{2p}{\alpha} \int_r^{\alpha} dx + \frac{3}{2} \int_r^{\mu} dx - 2p\right)$$

$$= \frac{p}{\alpha}\left(\frac{2p}{\alpha}\int_{r^{\alpha}}^{dx} - \frac{1}{2}p - \frac{3}{2}\frac{p}{r^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\int_{r^{\alpha}}^{dx} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{r^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{2\alpha}\left(\frac{4}{\alpha}\int_{r^{\alpha}}^{dx} - \frac{3}{r^{\frac{2}{3}\alpha}} - 1.\right)$$

Dieſs iſt die Correction, welche zu der Leibrente $\lambda\overline{m}$ zuzulegen iſt. Sie iſt wegen des Factors $\frac{p^2}{2\alpha}$ in den meiſten Fällen erheblich.

Wenn gar keine Zinſen bezahlt werden, iſt dieſer Unterſchied nichts. Alsdenn iſt $C\overline{a\,b} = \lambda\overline{a\,b}$, und $\lambda\overline{m} = E\overline{m} = C\overline{a\,b}$. Dieſs giebt auch die Formel, obgleich nicht unmittelbar. Wenn $r = 1$, ſo iſt $\int_{r^{\alpha}}^{dx} = \alpha$, folglich der Factor

$$\frac{4}{\alpha}\int_{r^{\alpha}}^{dx} - \frac{3}{r^{\frac{2}{3}\alpha}} - 1 = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Aber zugleich wird auch $p = \frac{1}{r-1} = \infty$, und alſo $\frac{p^2}{2\alpha} = \frac{\infty^2}{2\alpha}$, und der ganze Ausdruck $\frac{\infty^2}{2\alpha} \cdot 0$. Dieſs giebt keinen beſtimmten Wehrt. Allein wenn die Formel analytiſch behandelt wird, wie es in ſolchen Fällen geſchehen muſs, (*Zuſätze* zum erſten Cap. §. 23.) alles auf eine Berechnung gebracht, und ein Bruch $\frac{M}{N}$ daraus gemacht und dann Zähler und Nenner jeder für

ſich

sich differentiirt wird, so lange bis nicht mehr $\frac{M}{N} = \frac{0}{0}$ wird für $r = 1$; so bekommt man $\frac{dM}{dN} = \frac{0}{0}$, auch noch $\frac{ddM}{ddN} = \frac{0}{0}$; aber $\frac{d^3M}{d^3N} = \frac{0}{F.dr}$. Dieſs iſt die Anzeige, daſs der Wehrt der Formel für $r = 1$ verſchwinden müſſe.

Auch iſt dieſe Differenz $= 0$, wo r *unendlich groſs* iſt. Was die Zwiſchenfälle betrifft, zwiſchen dieſen beyden, ſo kann es verſchiedene Wehrte des Zinsfuſses geben, bey denen die Differenz ein *Gröſstes*, oder ein *Kleinſtes* iſt; aber die Gleichung, woraus ſolche Wehrte zu beſtimmen ſind, iſt vom Grade α.

Auch bey dem Zinsfuſs 1, 04 iſt doch die obige Correction ſchon erheblich. Z. B. wenn $a = 45$ Jahr und alſo $\alpha = 51$ iſt, nämlich nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, und 96, wie in *Süſsmilchs* Tafel, für das höchſte Lebensziel gerechnet, ſo iſt, weil hier $p = \frac{1}{\log. nat. r} = 25, 5.$ die Differenz für dieſen Fall, $= -0, 39.$

21.

Zu §. 148.

Nach der Hypotheſe des *gleichförmigen Abſterbens* kömmt der *Wehrt der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Verbindungsrente* zwoer Perſonen ſehr leicht heraus.

Die

Die Renten *augenblicklich* gerechnet, sey das Alter der Personen a und b, wovon b das höhere ist, und α und β die dazu gehörigen Altersergänzungen.

Nun ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

und

$$L\overline{ab} = \int\frac{x\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x^2\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^3\,dx}{r^x}$$

$$= p\int\frac{dx}{r^x} - \frac{px}{r^x} - 2p\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$+ \frac{3}{\alpha\beta}\,p\int\frac{x^2dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{p.x^3}{r^x}.$$

Nach der Integration wird $x = \beta$, daher

$$-\frac{p\beta}{r^\beta} + \frac{p\beta^2}{\alpha r^\beta} + \frac{p\beta}{r^\beta} - \frac{p\beta^2}{\alpha r^\beta} = 0.$$

Folglich

$$L\overline{ab} = p\int\frac{dx}{r^x} - 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}.$$

$$+ \frac{3p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= p\lambda\overline{ab} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$+ \frac{2p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}$$

$$= p\lambda\overline{ab} + p\lambda\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x} + \frac{p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}$$

$$= 2p\lambda\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x} + p\lambda\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p.\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

und

und weil $\lambda \overline{b} = \int_r^{\beta} \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \int_r^{\beta} \frac{x\,dx}{r^x}$

so ist $L\overline{ab} = 3\,p.\,\lambda\overline{ab} - p\lambda\overline{b}$

$- p\int_r^{\beta} \frac{dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha} \cdot p \int_r^{\beta} \frac{x\,dx}{r^x}$.

Und ferner $\frac{1}{\alpha}\, p\int_r^{\beta} \frac{x\,dx}{r^x} = \frac{\beta}{\alpha}\, p.\left(\int_r^{\beta} \frac{dx}{r^x} - \lambda\overline{b}\right)$

Also erhält man

$$L\overline{ab} = 3p\lambda\overline{ab} - p\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} - p\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\int_r^{\beta} \frac{dx}{r^x}$$

Hier ist $\int_r^{\beta} \frac{dx}{r^x}$ die Zeitrente für β Jahre.

Wenn $a = b$, $\alpha = \beta$, so wird

$L\overline{aa} = 3\,p.\,\lambda\overline{ab} - 2\,p\,\lambda\overline{b}$.

22.

Es ist auch $\int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int \frac{x^2 dx}{r^x} = L\overline{b}$ das ist einer so wachsenden Leibrente für b, und da

$$L\overline{ab} = \int \frac{x\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int \frac{x^2 dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int \frac{x^3 dx}{r^x}$$

so wird auch

$$L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot 2\,p. \int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{px^2}{\alpha r^x}$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \left(3\,p\int \frac{x^2 dx}{r^x} - \frac{px^3}{r^x}\right)$$

Nach der Integration wird $x = \beta$,

folglich $+ \frac{px^2}{\alpha r^x} - \frac{px^3}{\alpha\beta r^x} = 0$.

Also

Also $L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{2p}{\alpha} L\overline{b} + \frac{1}{\alpha\beta} p \int \frac{x^2 dx}{r^x}$,

$= L\overline{b} - \frac{2p}{\alpha} \cdot L\overline{b} + \frac{p}{\alpha} \left(\int \frac{x\,dx}{r^x} - L\overline{b} \right)$,

$= \left(1 - \frac{2p}{\alpha}\right) L\overline{b} + \frac{p}{\alpha} \beta \left(\int \frac{d\,x}{r^x} - \lambda\overline{b} \right)$.

Die Art, wie die *wachsende* Rente für *zwey* Leben von der für eine solche auf *Ein* Leben abhängt, ist derjenigen ähnlich, welche bey der *unveränderlichen* statt findet. (§. 15.)

23.

Die Formel für die *jährliche* Rente ist

$$\lambda ab = \int_r^\beta \frac{\beta}{\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^3}{\beta}.$$

$$= \int_r^\beta \frac{\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta} - \frac{1}{\alpha\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^3}{\beta}$$

Aber $\int_r^\beta \frac{\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta}$ ist der Wehrt einer solchen wachsenden Rente für $\beta = L\overline{b}$.

Also $L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \left(\int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^3}{\beta} \right)$.

und $\int_r^\beta \frac{\beta^2}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int_r^\beta \frac{\beta^3}{\beta}$ ist eine nach den *Quadraten der natürlichen Zahlen wachsende Leibrente für b.* Man kann aber $L\overline{ab}$ hier gleichfalls durch $\lambda\overline{ab}$ und andere Zeitrenten geben, wie im vorhergehenden §. bey augenblicklichen Renten, nur dass die Formel hier nicht so bequem wird als dorten.

24.

Zu §. 149.

Wenn die Zahl R (§. 10.) auch für wachsende Renten vorher berechnet ist, die Sterblichkeitstafel sey, welche man will, und dann durch R′ bezeichnet wird, so hat man $L\overline{ab} = \frac{\lambda\overline{ab} + 1 - rR'}{r-1}$.

Es ist nämlich

$$R' = \frac{AB - {}^{1}\overline{A}\,{}^{1}\overline{B}}{A.B.r} + 2.\frac{({}^{1}\overline{A}\,{}^{2}\overline{B} - {}^{2}\overline{A}\,{}^{2}\overline{B})}{A.B.r^2} + \ldots + n.\frac{({}^{n-1}\overline{A}.{}^{n-1}\overline{B} - {}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B})}{A.B.r^n}$$

$$\text{Nun } L\overline{ab} = \frac{{}^{1}\overline{A}\,{}^{1}\overline{B}}{AB.r} + \frac{2\,{}^{2}\overline{A}.{}^{2}\overline{B}}{A.B.r^2} + \ldots + \frac{n.{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B}}{A.B.r^n}$$

Daher

$$L\overline{ab} + R' = \frac{1}{AB}\left(\frac{AB}{r} + \frac{2\,{}^{1}\overline{A}.{}^{1}\overline{B}}{r^2} + \ldots + \frac{n.{}^{n-1}\overline{A}.{}^{n-1}\overline{B}}{r^n}\right)$$

$$= \frac{AB}{ABr} + \frac{\lambda\overline{ab}}{r} + \left(\frac{{}^{1}\overline{A}\,{}^{1}\overline{B}}{r} + \ldots + \frac{{}^{n-1}\overline{A}.{}^{n-1}\overline{B}}{r^n}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{L\overline{ab} + \lambda\overline{ab}}{r}.$$

Folglich $(r-1)\,L\overline{ab} = \lambda\overline{ab} + 1. - rR'$

und $L\overline{ab} = \frac{\lambda\overline{ab} + 1 - rR'}{r-1}$.

25.

Es war

$$R=\frac{1}{AB}\left(\Delta B.\int\frac{{}^{1}A}{r}-\Delta\Delta B.\int\frac{{}^{2}A}{r^2}-\Delta\Delta{}^{1}B.\int\frac{{}^{3}A}{r^3}--\right)$$

$$+\frac{1}{AB}\left(\Delta A.\int\frac{B}{r}-\Delta\Delta A.\int\frac{{}^{1}B}{r^2}-\Delta\Delta{}^{1}A.\int\frac{{}^{2}B}{r^3}--\right)$$

Gebraucht man nun ſtatt der Summen $\int\frac{{}^{1}A}{r}$, $\int\frac{{}^{2}A}{r^2}$, $\int\frac{B}{r}$, $\int\frac{{}^{1}B}{r}$ u. ſ. f. welche die *erſte* Hülfstafel (Cap. II. §. 56.) giebt, die dazu gehörigen Zahlen aus der zwoten Tafel (Cap. III. §. 117.), ſo erhält man durch eben ſo viele Operationen die Wehrte von R′, als mittelſt der erſten Tafel die Wehrte von R. Daraus iſt dann der Wehrt von $L\frac{a}{b}$ leicht zu berechnen.

Zuſätze

Zusätze

zum

dritten Abschnitt des dritten Capitels.

Vom Zusammenleben dreyer und mehrerer Personen.

26.

Zu §. 152.

Es ist $\lambda\overline{abc} = \frac{1}{A.B.C} \cdot \left(\frac{{}^{1}\!A\,{}^{1}\!B\,{}^{1}\!C}{r} + \frac{{}^{2}\!A\,{}^{2}\!B\,{}^{2}\!C}{r^2} + + \right)$

$= \frac{1}{ABC} \cdot \left(AB - \Delta(AB)\right) \frac{{}^{1}\!C}{r} + \left(AB - \Delta(AB) - \Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B)\right) \frac{{}^{2}\!C}{r^2} + +$

$= \frac{1}{C} \left(\frac{{}^{1}\!C}{r} + \frac{{}^{2}\!C}{r^2} + + \right) - \frac{1}{ABC} \cdot \Delta(AB) \int \frac{{}^{1}\!C}{r}$

$- \frac{1}{ABC} \Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B) \int \frac{{}^{2}\!C}{r^2} - \frac{1}{ABC} ({}^{2}\!A.\,{}^{2}\!B) \int \frac{{}^{3}\!C}{r^3} - -$

Allein da ferner $\Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB)$,

$\Delta({}^{2}\!A\,{}^{2}\!B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB) - \Delta\Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B)$,

(weil $\Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B) - \Delta({}^{2}\!A\,{}^{2}\!B) = \Delta\Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B)$)

und so weiter

$\Delta({}^{3}\!A\,{}^{3}\!B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB) - \Delta\Delta({}^{1}\!A\,{}^{1}\!B) - \Delta\Delta({}^{2}\!A\,{}^{2}\!B)$,

so wird

$$\lambda\overline{abc}=\lambda\overline{c}-\frac{1}{ABC}\cdot\Delta(AB)\left(\int^{1}\frac{C}{r}+\int^{2}\frac{C}{r^2}++\right)$$

$$+\frac{1}{ABC}\cdot\Delta\Delta(AB)\left(\int^{2}\frac{C}{r^2}+\int^{3}\frac{C}{r^3}++\right)$$

$$+\frac{1}{ABC}\cdot\Delta\Delta\left(^{1}A\,^{1}B\right)\left(\int^{3}\frac{C}{r^3}+\int^{4}\frac{C}{r^4}++\right)$$

$$+\quad+\quad+$$

$$=\lambda\overline{c}-\frac{\Delta.(AB)}{ABC}\,S.\int^{1}\frac{C}{r}$$

$$+\frac{1}{ABC}\cdot\Big(\Delta\Delta(AB)\,S.\int^{2}\frac{C}{r^2}$$

$$+\Delta\Delta\left(^{1}A\,^{1}B\right)S.\int^{3}\frac{C}{r^3}$$

$$+\Delta\Delta\left(^{2}A\,^{1}B\right)S.\int^{4}\frac{C}{r^4}\Big).$$

$$+\quad+$$

Die Summen $S.\int^{2}\frac{C}{r^2}$, $S.\int^{3}\frac{C}{r^3}++$ sind die Zahlen der Columne E in der Hülfstafel (Cap. II. §. 117.) die zu den Jahren $c+2$, $c+3$ u. s. f. gehören.

Nun ist aber

$$\Delta(AB)=A\,B-{}^{1}A.\,{}^{1}B={}^{1}A.\Delta B+{}^{1}B.\Delta A+\Delta A.\Delta B.$$

$$=A.\Delta B+B.\Delta A-\Delta A.\Delta B.$$

auch $\Delta\left(^{1}A\,^{1}B\right)={}^{1}A.\Delta\,{}^{1}B+{}^{1}B.\Delta\,{}^{1}A-\Delta\,{}^{1}A.\Delta\,{}^{1}B$

Daraus

Daraus wird $\Delta\Delta(AB) = \Delta(AB) - \Delta\left(\frac{1}{-}A\ -B\right)$

$= {}^{1}_{-}A\ (\Delta B - \Delta\ {}^{1}_{-}B) + {}^{1}_{-}B\ (\Delta A - \Delta\ {}^{1}_{-}A)$

$+ \Delta A.\ \Delta B - \Delta\ {}^{1}_{-}A.\ \Delta\ {}^{1}_{-}B$

$= {}^{1}_{-}A.\ \Delta\Delta B + {}^{1}_{-}B.\ \Delta\Delta A + \Delta A.\ \Delta B$

$- (\Delta A - \Delta\Delta A).\ \Delta\ {}^{1}_{-}B.$

$= {}^{1}_{-}A.\ \Delta\Delta B + {}^{1}_{-}B.\ \Delta\Delta A + \Delta A.\ \Delta\Delta B$

$+ \Delta\ {}^{1}_{-}B.\ \Delta\Delta A.$

$= A.\ \Delta\Delta B + \left({}^{1}_{-}B + \Delta\ {}^{1}_{-}B\right)\ \Delta\Delta A$

$= A.\ \Delta\Delta B + (B - \Delta B + \Delta\ {}^{1}_{-}B)\ \Delta\Delta A,$

$= A.\ \Delta\Delta B + B.\ \Delta\Delta A - \Delta\Delta B.\ \Delta\Delta A.$

Folglich wird

$$\lambda\overline{abc} = \lambda\overline{c} - \frac{\Delta.(AB)}{ABC}\cdot S.\int\frac{{}^{1}_{-}C}{r}$$

$$+\frac{1}{ABC}\left(A\Delta\Delta B\,S.\int\frac{{}^{2}_{-}C}{r^2} + {}^{1}_{-}A.\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}B\,S.\int\frac{{}^{2}_{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$+\frac{1}{ABC}\left(B.\Delta\Delta A\,S.\int\frac{{}^{2}_{-}C}{r^2} + {}^{1}_{-}B\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}B\,S.\int\frac{{}^{3}_{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$-\frac{1}{ABC}\left(\Delta\Delta B.\Delta\Delta A\,S.\int\frac{{}^{2}_{-}C}{r^2} + \Delta\Delta - B.\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}A\,S.\int\frac{{}^{3}_{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{c} - \left(\frac{\Delta B}{BC} + \frac{\Delta A}{A.C} - \frac{\Delta A.\Delta B}{A.B.C}\right)S.\int\frac{{}^{1}_{-}C}{r^1}$$

$$+\frac{1}{ABC}\cdot\left(A.\Delta\Delta B + B.\Delta\Delta A - \Delta\Delta A.\Delta\Delta B\right)S.\int\frac{{}^{2}_{-}C}{r^2}$$

$$+\left({}^{1}_{-}A.\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}B + {}^{1}_{-}B.\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}A - \Delta\Delta\ {}^{1}_{-}A.\Delta\Delta\ {}^{1}_{-}B\right)S.\int\frac{{}^{3}_{-}C}{r^3}$$

$$+\quad +\quad +$$

27.

Zu §. 157.

Wenn die *Sterbensordnung mit gleichförmig sich verändernden Decrementen* (Cap. I. §. 65.) zum Grunde gelegt wird, so läfst sich, wie bey zwo, so bey mehreren Personen eine allgemeine Formel geben, welche die Wehrte der Verbindung ausdrükt. Nur dafs auch hier, wie vorher §. 6. 7. mehrere Theile derselben besonders für sich zu berechnen vorkommen, weil die veränderlichen Gröfsen der Formel für diese Stücke andere Wehrte haben.

Es seyen überhaupt, wie sonst, A, B, C die *Anfangszahlen*, und ${}^{n}\!A$, ${}^{n}\!B$, ${}^{n}\!C$ die Zahlen der Lebenden für *die Jahre, wo sich der für sich besonders zu berechnende Theil* anfängt, und dann

$\frac{{}^{n}\!A}{A} = \alpha$, $\frac{{}^{n}\!B}{B} = \alpha'$, $\frac{{}^{n}\!C}{C} = \alpha''$. In dem ersten Theil ist $\alpha = 1 = \alpha' = \alpha''$, aber nicht so in den folgenden.

Ferner sollen die *Decremente des ersten* Jahrs seyn D, D′, D″, und die *Differenzen der Decremente* d, d′, d″, und $\frac{D - \frac{d}{2}}{A} = p$, $\frac{D' - \frac{d'}{2}}{B} = p'$, $\frac{D'' - \frac{d''}{2}}{C} = p''$. Auch $\frac{d}{2A} = q$, $\frac{d'}{2B} = q'$, $\frac{d''}{2C} = q''$.

Als-

Alsdenn ist für jedes Stück der Verbindungsrente $\lambda\,\overline{ab}$ der *Terminus generalis*

$(\alpha - px - qx^2)\,\frac{(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x}$, und der ganze Theil

$$= \int(\alpha - px - qx)\,\frac{(\alpha' - p' - q'x^2)}{r^x}$$

$$= \alpha\,\alpha'\int\frac{1}{r^x} - \left.\begin{matrix}\alpha'\,p\\ -\alpha\,p'\end{matrix}\right\}\int\frac{x}{r^x} - \left.\begin{matrix}q\\ q'\\ pp'\end{matrix}\right\}\int\frac{x^2}{r^x}$$

$$\left.\begin{matrix}+\,q\,p'\\ +\,p\,q'\end{matrix}\right\}\int\frac{x^3}{r^x} + qq'\int\frac{x^4}{r^x}$$

Wenn man der Kürze wegen jedes besondere Stück, das die Rente hier bezeichnet, wie sonst die ganzen, durch $\lambda\,\overline{a}$, $\lambda\,\overline{b}$, $\lambda\,\overline{ab}$, und die Stücke der *nach der Ordnung der Zahlen wachsenden Rente durch* $L\,\overline{a}$, $L\,\overline{b}$, $L\,\overline{ab}$, und *die Stücke der nach den Quadraten der Zahlen wachsenden Renten* durch $L\,\overline{a}^2$, $L\,\overline{b}^2$, $L\,\overline{ab}^2$ ausdrückt, so ist

$$\int\frac{(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = \lambda\,\overline{b},$$

$$\int\frac{x\,(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = L\,\overline{b},$$

$$\int\frac{x^2\,(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = L\,\overline{b}^2,$$

und $\lambda\,\overline{ab} = \alpha\,\lambda\,b - p\,L\,\overline{b} - q\,L\,\overline{b}^2$.

28.

Für *drey* Personen ist

$$\lambda\overline{abc} = \int \frac{(\alpha - px - qx).(\alpha' - p'x - q'x^2).(\alpha'' - p''x - q''x^2)}{r^x}$$

$$= \alpha\lambda\overline{bc} - pL\overline{bc} - qL\overline{b^2c}.$$

$$= \alpha\alpha'\alpha'' \int \frac{1}{r^x} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha\alpha' p'' \\ -\alpha\alpha'' p' \\ -\alpha'\alpha'' p \end{array} \right\} \int \frac{x}{r^x} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha\alpha' q'' \\ -\alpha\alpha'' q' \\ -\alpha'\alpha'' q \\ +\alpha p' p'' \\ +\alpha' p p'' \\ +\alpha'' p p' \end{array} \right\} \int \frac{x^2}{r^x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\alpha p' q'' \\ +\alpha p'' q' \\ +\alpha' p q'' \\ +\alpha' p'' q \\ +\alpha'' p q' \\ +\alpha'' p' q \\ +p p' p'' \end{array} \right\} \int \frac{x^3}{r^x} \left\{ \begin{array}{l} +\alpha q' q'' \\ +\alpha' q q'' \\ +\alpha'' q q' \\ -p p' q'' \\ -p p'' q' \\ -p' p'' q \end{array} \right\} \int \frac{x^4}{r^x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -p q' q'' \\ -p' q q'' \\ -p'' q q' \end{array} \right\} \int \frac{x^5}{r^x} - q q' q'' \int \frac{x^6}{r^x}$$

Die Coefficienten sind die Theile des Products $(\alpha - p - q)(\alpha' - p' - q')(\alpha'' - p'' - q'')$.

Sind

Sind die Coefficienten für $\lambda\overline{bc}$ vorher ſchon gefunden und in ihrer Ordnung K, L, M, N, O poſitive oder negative, ſo iſt

$$\lambda\overline{abc} = \alpha K\int\frac{1}{r^x} + \left.\begin{matrix}\alpha\,L\\ -p\,K\end{matrix}\right\}\int\frac{x}{r^x} + \left.\begin{matrix}\alpha\,M\\ -p\,L\\ -q\,K\end{matrix}\right\}\int\frac{x^2}{r^x}$$

$$+ \left.\begin{matrix}\alpha\,N\\ -p\,M\\ -q\,L\end{matrix}\right\}\int\frac{x^3}{r^x} + \left.\begin{matrix}\alpha\,O\\ -p\,N\\ -q\,M\end{matrix}\right\}\int\frac{x^4}{r^x}$$

$$\left.\begin{matrix}-p\,O\\ -q\,N\end{matrix}\right\}\int\frac{x^5}{r^x} - q\,O\int\frac{x^6}{r^x}$$

29.

Wenn $r=1$ geſetzet wird, ſo hat man den allgemeinen Ausdruck für die *Dauer* des *Zuſammenlebens*. Nur daſs alsdenn noch $\frac{1}{2}$ als die Correction zugeſetzet werden muſs.

Anmerkung. Es iſt ſo mühſam nicht, nach dieſer Formel zu rechnen, vorausgeſetzt, daſs man die nöthigen Hülfstabellen von den Summen ſchon habe. Nur muſs ſie, wie vorerinnert iſt, auf mehrere Stücke beſonders angewandt werden. Sind die Perſonen alle *gleichen* Alters, ſo hat man nur zwey ſolche unterſchiedene Stücke auſser dem für das letzte Jahr, was man vernach-

läſsigen kann. Iſt aber das Alter verſchieden, ſo kann man *fünf* Stücke bekommen, das Letzte mitgerechnet, oder *vier* ohne dieſes, doch auch nicht mehrere. Es ſey a = 20, b = 30, c = 40 Jahre, ſo bekommt man folgende Stücke:

40 — 41 · · · 65 — 66	66 · · · 75 — 76	
30 — 31 · · · 55 — 55	56 · · · 65 — 66	
20 — 21 · · · 45 — 46	46 · · · 55 — 56	
x = 26		
$\alpha = 1 = \alpha' = \alpha''$	x = 10	
76 · · · · 85 — 86	86 · · · 95 — 96	96 — 97
66 · · · · 75 — 76	76 · · · 85 — 86	86 — 87
56 · · · · 65 — 66	66 · · · 75 — 76	76 — 77
x = 10	x = 10	x = 1

Nun muſs auch jedes benannte Stück discontirt werden auf das Anfangsjahr des erſten Stücks zurück. In dem vorhergehenden Exempel wird das *zweyte* Stück mit $\frac{1}{r^{26}}$ zu multipliciren ſeyn, uud das *dritte* mit $\frac{1}{r^{36}}$; das *vierte* mit $\frac{1}{r^{46}}$; das *letzte* mit $\frac{1}{r^{56}}$. Dieſer letzten Arbeit kann man aber dadurch entgehen, daſs man die Wehrte von $\alpha, \alpha', \alpha''$ und p, p', p'', q, q', q'' ſtatt durch die Diviſion mit A, B, C, durch die mit den gehörig discontirten A, B, C ſucht.

30.

Zu §. 158.

Es ist $\lambda\overline{abc} = \frac{1}{ABC}\cdot\left(\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{r} + +\right)$

$= \frac{1}{A.B.C}\cdot\left(\frac{{}^{1}B\,{}^{1}C}{r}(A-\Delta A)+\frac{{}^{2}B\,{}^{2}C}{r^2}(A-2\Delta A)\right.$

$\left. + \mp \frac{{}^{x}B\,{}^{x}C}{r^x}\cdot(A-x.\Delta A)\right).$

$= \frac{1}{B.C}\cdot\left(\frac{{}^{1}B.\,{}^{1}C}{r} + \frac{{}^{2}B\,{}^{2}C}{r^2} + + \frac{{}^{x}B\,{}^{x}C}{r^x}\right)$

$- \frac{\Delta A}{A.B.C}\cdot\left(\frac{{}^{1}B.\,{}^{1}C}{r} + 2\,\frac{{}^{2}B.\,{}^{2}A}{r^2} + +x\,\frac{{}^{x}B\,{}^{x}C}{r^x}\right)$

$= \lambda\overline{bc} - \frac{\Delta A}{A}\cdot L\overline{bc} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\mu}L\overline{bc}.$

Setzet man zu dreyen die *vierte* Person hinzu, so ist

$\lambda\overline{abcd} = \frac{1}{ABCD}\cdot\left(\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C\,{}^{1}D}{r} + +\right)$

$= \frac{1}{ABCD}\left(\frac{{}^{1}B\,{}^{1}C\,{}^{1}D}{r}(A-\Delta A)+ + \frac{{}^{x}B\,{}^{x}C\,{}^{x}D(A-x\Delta A)}{r^x}\right)$

$= \lambda\overline{bcd} - \frac{\Delta A}{A}\cdot L\overline{bcd} = \lambda\overline{bcd} - \frac{1}{\mu}L\overline{bcd}$

und so ferner für mehrere Personen.

31.

Nach der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben* ist überhaupt der Ausdruck für die Verbindungsrente

mehrerer Personen weniger zusammengesetzt. Bey *jährlichen* Renten hat man folgende:

Das *Alter* der Personen sey a, b, c und die *Altersergänzung*, α, β, γ; so ist

$$\lambda\overline{abc} = \int\frac{1}{r^{\gamma}} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{\gamma}{r^{\gamma}}$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{\gamma^2}{r^{\gamma}} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\cdot\int\frac{\gamma^3}{r^{\gamma}}.$$

Die Summe aller $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ sey m, die *Summe der Producte* aus jedem *Paare* dieser Zahlen, n, und das Product aus jeden *dreyen* sey q, so ist

$$\lambda\overline{abc} = \int\frac{1}{r^{\gamma}} - m\int\frac{\gamma}{r^{\gamma}} + n\int\frac{\gamma^2}{r^{\gamma}} - q\int\frac{\gamma^3}{r^{\gamma}}.$$

32.

Zusatz. Für vier und mehrere Personen sey überhaupt die *Summe* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$ das ist, der Brüche, deren Zähler 1, der Nenner die Altersergänzung ist, m; *die Summe der Producte* aus jeden zween dieser Brüche $= n$; die Summe der Producte aus jeden *dreyen* $= q$; aus jeden *vieren* t; u. s. f. aus jeden k, k, so wird die Altersergänzung der ältesten Person aus ihnen $= e$ gesetzt, für k Personen.

$$+\lambda\overline{abcd\ldots k} = \int\frac{1}{r^{\varepsilon}} - m\int\frac{\varepsilon}{r^{\varepsilon}} + n\int\frac{\varepsilon^2}{r^{\varepsilon}}$$

$$- q\int\frac{\varepsilon^3}{r^{\varepsilon}} + \ldots - k\int\frac{\varepsilon^k}{r^{\varepsilon}}.$$

Sind

Sind sie alle am Alter *gleich*, so ist $\alpha = \beta = \gamma = \delta$; und

$$\lambda_{\overline{aa\ldots}} = \int \frac{1}{r^\varepsilon} - \frac{k}{\varepsilon}\int \frac{\varepsilon}{r^\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon^2}\int \frac{\varepsilon^2}{r^\varepsilon} - \frac{k}{\varepsilon^3}\int \frac{\varepsilon^3}{r^\varepsilon} + - + -$$

33.

Die allgemeine Formel bey *augenblicklichen Renten* ist folgende: Es ist

$$\lambda_{\overline{abc\ldots}} = \int \left(\frac{(A - x\Delta A)}{A}\frac{(B - x\Delta B)}{B}\frac{(C - x\Delta C)}{C}\ldots\right)\frac{dx}{r^x}$$

$$= \int \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)\ldots\Big)\frac{dx}{r^x}$$

$$= \int \frac{dx}{r^x} - m\int \frac{x\,dx}{r^x} + n\int \frac{x^2 dx}{r^x} - q\int \frac{x^3 dx}{r^x} + - + -$$

Wird nun $p = \frac{1}{\log.\,nat.\,r}$, so ist

$$\lambda_{\overline{abc\ldots}} = p\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) - m\left(p^2 - \frac{p}{r^x}(x+p)\right)$$

$$+ n\left(2p^3 - \frac{p}{r^x}(x^2 + 2px + 2p^2)\right)$$

$$- q\left(6p^4 - \frac{p}{r^x}(x^3 + 3px^2 + 6p^2x + 6p^3)\right)$$

$$= p\left(1 - mp + 2np^2 - 3.2qp^3 + -\right)$$

$$- \frac{p}{r^x}\left(1 - mx + nx^2 - qx^3 + -\right)$$

$$+ \frac{p^2}{r^x}\left(m - 2nx + 3qx^2 - +\right)$$

$$- \frac{p^3}{r^x}\left(2n - 3mqx + -\right)$$

$$+ \frac{p^4}{r^x}\left(3.2.q - +\right)$$

wo anstatt x, die Altersergänzung der ältesten Person gesetzet werden muss.

34.

Sind wiederum die Personen alle von gleichem Alter, so ist $\lambda\overline{aaa}.. = \int\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)^k \cdot \frac{dx}{r^x}$, wenn die Zahl der Personen k ist. Diese Formel wird kürzer. Man setze $\varepsilon - x = z$, so ist $-dx = dz$; $r^x = \frac{r^\varepsilon}{r^z}$, daher $\int\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)^k \cdot dx = -\frac{1}{\varepsilon^k r^\varepsilon}\int z^k . r^z\, dz$, oder

$$\left(\frac{1}{r} = t \text{ gesetzt}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^k r^\varepsilon}\int \frac{z^k dz}{t^z}$$

, und weil $\frac{1}{\log. t} = \frac{1}{\log. \frac{1}{r}} = -p$, so ist

$$-\frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon}\cdot\int\frac{z^k dz}{t^z} = -\frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon}\, p r^z\, (z^k - kz^{k-1}p + k.\overline{k-1}.z^{k-2}p^2 - + \overline{+}k.\overline{k-1}....p^k) + C.$$

Dieses Integral muss aber zu nichts werden, wenn $x = o$, das ist, wenn $z = \varepsilon$ ist. Folglich ist es vollständig gemacht,

$$= + \frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon}\cdot p r^\varepsilon\,(\varepsilon^k - kq^{k-1}p + k.\overline{k-1}.q^{k-2}p^2,$$

$$- + \overline{+}k.k-1...p^k)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon} \cdot pr^z (k - kz^{k-1} p + k.\overline{k-1}.z^{k-2} p^2 - + + k.k-1 .. p^k).$$

Dieſs Integral ſo genommen, daſs $x = s$, alſo $z = 0$ iſt, giebt

$$\lambda\overline{aaa....} = p\left(1 - \frac{kp}{\varepsilon} + \frac{k.\overline{k-1}.p^2}{\varepsilon^2} - k.\overline{k-1}.\overline{k-2}.\frac{p^3}{\varepsilon^3} + - \pm k\overline{k-1} .... \frac{p^k}{\varepsilon^k} \pm \frac{k.\overline{k-1}.\overline{k-2}...p^{x-1}}{\varepsilon^k \quad r^\varepsilon}\right) =$$

$$p - \frac{kp^2}{\varepsilon^2} + k.k-1.\frac{p^3}{\varepsilon^2} - \pm k.\overline{k-1}... \frac{p^k}{\varepsilon^{k-1}} \pm k.\overline{k-1}... \frac{p^k}{\varepsilon^k} p\left(1 - \frac{1}{r^\varepsilon}\right)$$

Die letzten Theile ſind *poſitiv* oder *negativ*, nachdem k eine gerade oder ungerade Zahl iſt.

35.

Man ſuche auch den Wehrt von $L\overline{abc}$. Dieſer wird ſo gefunden. Es iſt

$$\lambda\overline{abc} = \int\frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{x^2 dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^3\,dx}{r^x},$$ und

$$L\overline{ab} = \int\frac{x\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

+

$$+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^3\,dx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^4dx}{r^x}$$

$$=p\int\frac{dx}{r^x}-\frac{px}{r^x}$$

$$-2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$+3\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)p\int\frac{x^2dx}{r^x}-\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\frac{px^3}{r^x}$$

$$-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^3\,dx}{r^x}+\frac{px^4}{\alpha\beta\gamma.r^x}.$$

Nach der Integration wird $x=\gamma$, wenn c das älteſte Leben, und γ die Altersergänzung deſſelben iſt. Alsdenn iſt

$$-\frac{px}{r^x}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\frac{px^3}{r^x}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\frac{px^4}{r^x}=0.$$

Alſo

$$L\overline{a\,b\,c}=p\int\frac{dx}{r^x}-2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$+3\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)p\int\frac{x^2dx}{r^x}-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}p\int\frac{x^3dx}{r^x}$$

$$=4p.\lambda\overline{abc}-3p\int\frac{dx}{r^x}+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)p\int\frac{x^2dx}{r^x}$$

$$=p\left(4\lambda\overline{abc}-\int\frac{dx}{r^x}+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x}-\frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^2dx}{r^x}\right.$$

$$\left.-\int\frac{dx}{r^x}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\gamma}\int\frac{x^2dx}{r^x}\right.$$

$$-\int\frac{dx}{r^x}+\frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}+\frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x}\Big)$$

$$=p\Big(4\lambda\overline{abc}-\lambda\overline{bc}-\lambda\overline{ac}-\int\frac{dx}{r^x}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}+\frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}\Big)$$

und weil $\int\frac{x\,dx}{r^x}=\gamma\int\frac{dx}{r^x}-\gamma.\lambda\overline{c}$, denn $x=\gamma$ nach der Integration; auch

$$\int\frac{x^2dx}{r^x}=\beta\gamma.\lambda\overline{bc}-\beta\gamma\int\frac{dx}{r^x}+(\gamma+\beta)\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

so ist $L\overline{abc}=p\Big(4\lambda\overline{abc}-\Big(1+\frac{\gamma}{\alpha}\Big)\lambda\overline{bc}-\lambda\overline{ac}$

$$-\frac{\gamma}{\beta}\Big(1-\frac{\gamma}{\alpha}\Big)\lambda\overline{c}-\Big(1-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\gamma\gamma}{\alpha\beta}\Big)\int\frac{dx}{r^x}\Big)$$.

36.

Wenn $a=b=c$, also auch $\alpha=\beta=\gamma$, so wird $L\overline{aaa}=4\,p\,\lambda\overline{aaa}-3\,p\,\lambda\overline{aa}$.

Auch weiter $L\overline{aaaa}=5\,p\,\lambda\overline{aaaa}-4\lambda\overline{aaa}$. und überhaupt wenn n die Zahl der Personen ist $L\overline{a^n}=(n+1)\,p\,\lambda\overline{a^n}-n\,p\,\lambda\overline{a^{n-1}}$.

37.

Daraus ergiebt sich ein anderer Ausdruck für den Wehrt von $\lambda\overline{a^n}$, das ist von der *Verbindungsrente* mehrerer (n) Personen von gleichem Alter a. Weil nämlich überhaupt $\lambda\overline{a^n}=\lambda\overline{a^{n-1}}-\frac{1}{\alpha}L.\overline{a^{n-1}}$, und

$L\overline{a^{n-1}}$

$L\overline{a^{n-1}} = n\,p\,\lambda\overline{a^{n-1}} - (n-1)\,p.\,\lambda\overline{a^{n-2}}$, so ist

$$\lambda\overline{a^n} = \left(1 - \frac{np}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^{n-1}} + (n-1)\frac{p}{\alpha}\cdot\lambda\overline{a^{n-2}}$$

So wird jede höhere Verbindungsrente aus der niedern gemacht. Zugleich ist $L\overline{a^{n-n}} = \lambda\overline{a^0}$, das ist die *Zeitrente* $\int\frac{dx}{r^\alpha}$. Doch zu diesem Zweck findet man noch einen bequemern Ausdruck auf folgende Art:

Es ist $\lambda\overline{a^2} = \left(1 - \frac{2p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a} + \frac{p}{\alpha}\cdot\int\frac{dx}{r^\alpha}$ (§. 15).

Auch ist $p = \lambda\overline{a} + \frac{p}{\alpha}\int\frac{dx}{r^\alpha}$ (§. 15. *Zusätze* zu dem zweyten Capitel.) Folglich $\lambda\overline{a^2} = p - \frac{2p}{\alpha}\lambda\overline{a}$.

Weiter $\lambda\overline{a^3} = \left(1 - \frac{3p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^2} + \frac{2p}{\alpha}\lambda\overline{a}$

$= p - \frac{2p}{\alpha}\lambda\overline{a^2}$.

Auch $\lambda\overline{a^4} = \left(1 - \frac{4p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^3} + \frac{3p}{\alpha}\lambda\overline{a^2}$

$= p - \frac{4p}{\alpha}\lambda\overline{a^3}$

und überhaupt $\lambda\overline{a^n} = p - \frac{np}{\alpha}\lambda\overline{a^{n-1}}$.

Zusatz. Auch folgt hieraus der allgemeine Ausdruck für $L\overline{a^n}$, Es ist nämlich

$$p - \frac{(n+1)p}{\alpha}\lambda\overline{a^n} = \lambda\overline{a^{n+1}} = \lambda\overline{a^n} - \frac{1}{\alpha}L\overline{a^n}.$$

Folglich $L\overline{a^n} = (\alpha + (n+1)p)\,\lambda\overline{a^n} - \alpha p$.

Diese

Dieſe Formeln ſind, wie man ſieht, auſserordentlich bequem, wenn höhere Renten aus den niedern genommen werden. Wird für jede höhere die niedere bis auf die Zeitrente hin ſubſtituirt, ſo bekommt man einen Ausdruck für $\lambda \overline{a^n}$, der keine andere veränderliche Gröſse enthält als die Zeitrente $\int \frac{dx}{r^a}$ und dem in §. 34. ähnlich wird.

38.

Die Methode *zwey gegebene Leben zuſammen zu bringen auf Eins, und damit ein drittes zu verbinden und dann die Verbindungsdauer der dritten und des gefundenen mittlern Lebens für die Verbindungsdauer aller drey anzunehmen*, iſt die leichteſte, die man wünſchen kann, um die Gröſse dieſer Dauer bey der Verbindung mehrerer Perſonen zu beſtimmen. Die Frage iſt nur, wie weit dieſs Verfahren von der genauen Rechnung abweiche. Dieſs kann bey der *Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben* leicht gefunden werden.

Es ſey wiederum

für das Alter a die Altersergänzung α

— — — b — — — — β

— — — c — — — — γ

und a ſey das *jüngſte*, c das *älteſte*, ſo iſt, wenn b und c verbunden ſind, $C\overline{bc} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$ (§. 4.) $= C\overline{m}$, wenn m *das Alter des mittlern Lebens* ausdrückt.

Die Altersergänzung des letztern sey μ; so ist $\mu = 2 . C\overline{bc} = 2 E\overline{m}$.

Wird nun das Alter a mit m verbunden, so hat man

$$C\overline{am} = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{6\alpha} = \frac{\mu}{2} - \frac{4(E\overline{m})^2}{6\alpha} = C\overline{bc} - \frac{4(E\overline{m})^2}{6\alpha}$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{1}{6\alpha} \cdot \left(\gamma^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma^3}{\beta} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^4}{\beta^2}\right)$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \gamma^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} - \frac{1}{54} \cdot \frac{\gamma^4}{\alpha\beta^2} =$$

Dieſs wird für $C\overline{abc}$ angenommen.

Sucht man $C\overline{abc}$ nach eben der Hypotheſe unmittelbar, ſo iſt

$$C\overline{abc} = \int \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) dx$$

$$= \int dx - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \int x\, dx$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \cdot \int x^2 dx - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \int x^3 dx,$$

das iſt, wenn nach der Integration die kleinſte Altersergänzung für x geſetzt iſt,

$$C\overline{abc} = \gamma - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\gamma^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \frac{\gamma^3}{3} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{\gamma^4}{4} .$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{3}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma^2}{3} - \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{4}$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{12} .$$

Alſo

Also ist der *Ueberschuss des wahren Wehrts über den durch jene Methode gefundenen*, oder $C\overline{abc} - C\overline{am}$

$= \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{12} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} + \frac{1}{54} \cdot \frac{\gamma^4}{\alpha\beta^2}$

$= \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{2} \right)$.

Dieſs ist die Abweichung, die als Correction zu dem Wehrt $C\overline{am}$ *zugeleget*, oder da $\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$ immer kleiner, als $\frac{1}{3}$; weil γ kleiner als β, also $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{2} \right)$ *negativ* ist, mit dem entgegengesetzten Zeichen davon *abgezogen* werden muſs. Daher ist $C\overline{abc} = C\overline{am} - \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta} \right)$. Auch ist dieſe Correction ein eigentlicher Bruch, wenn nicht γ gröſser ist als 36.

Da auch $\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} = C\overline{bc} = C\overline{m} = \frac{\mu}{2}$ ist,

so wird $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \cdot$

$\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^2}{6\beta} \right) = \frac{\gamma^2}{18\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} \right)$.

Dieſe Differenz kann in keinem Fall verschwinden. Denn es ist $\frac{\mu}{2} = C\overline{m} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$. Es müſste also $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta} = 0$ werden können, was nicht angeht, weil γ jederzeit kleiner, oder doch nicht gröſser als 6 ist.

Um die Formel für die Differenz noch leichter zu haben bey mehreren Personen, kann man folgender Methode nachgehen.

Es ist die mittlere *Verbindungsdauer* für zwo Personen nach der Hypothese, $C\overline{a\,b}$

$$= \int dx - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\int x\,dx + \frac{1}{\alpha\,\beta}\int x^2\,dx,$$

$$= \int dx - \frac{1}{\beta}\int x\,dx - \frac{1}{\alpha}\left(\int x\,dx - \frac{1}{\beta}\int x^2\,dx\right)$$

$$= E\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\left(S.x\,dx - \frac{1}{\beta}\,S.x^2\,dx\right).$$

Der zweyte Factor des letzten Theils ist eben der Ausdruck, welchen $E\overline{b}$ giebt, (oder die *mittlere Dauer* eines einfachen Lebens) wenn jeder Theil mit x multiplicirt wird.

Es bezeichne demnach $E'\overline{b}$ eine solche Grösse, die durch die Reihe für $E\overline{b}$ gegeben wird, wenn jedes Glied derselben mit der Zahl des Gliedes multiplicirt wird, auf dieselbe Art, wie $L\overline{a}$ aus $\lambda\overline{a}$ wird. Auch sey ferner $K\overline{a\,b}$ auf dieselbe Art entstanden aus $C\overline{a\,b}$, und $K\overline{abc}$ aus $C\overline{abc}$.

Alsdenn ist $C\overline{a\,b} = E\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\,E'\overline{b}$.

Auch $C\overline{abc} = \int dx - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int x\,dx$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\,\beta} + \frac{1}{\alpha\,\gamma} + \frac{1}{\beta\,\gamma}\right)\int x^2\,dx - \frac{1}{\alpha\,\beta\,\gamma}\cdot\int x^3\,dx,$$

=

$$= C\overline{bc} - \frac{1}{\alpha}\left(\int x\,dx - \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\int x^2\,dx + \frac{1}{\beta\gamma}\int x^3\,dx\right) = C\overline{bc} - \frac{1}{\alpha}K\overline{bc}.$$

und so weiter fort.

$$C\overline{abcd}\ldots = C(bcd\ldots) - \frac{1}{\alpha}K\overline{bcd}\ldots$$

Nun ist überdiefs

$$E'\overline{c} = \int x\,dx - \frac{1}{\gamma}\int x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{6}x^2$$

wo nach der Integration $x = \gamma$ wird.

Eben so

$$K\overline{bc} = \int x\,dx - \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\int x^2\,dx + \frac{1}{\beta\gamma}\int x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\gamma^3}{3\beta} - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{1}{4}\frac{\gamma^3}{\beta}$$

$$= \frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{12}\frac{\gamma^3}{\beta}.$$

Daher $C\overline{abc} = C\overline{bc} - \frac{1}{\alpha}K\overline{bc}$.

Wenn statt *b* und *c* ein mittleres Leben genommen wird, vom Alter *m*, so dafs $E\overline{m} = C\overline{bc} = \frac{\mu}{2}$, so ist wiederum $C\overline{am} = E\overline{m} - \frac{1}{\alpha}E'\overline{m}$.

Folglich ist die Differenz

$$C\overline{abc} - C\overline{am} = \frac{1}{\alpha}(E'\overline{m} - K\overline{bc})$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mu^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma^3}{\beta}\right)\right)$$

$= \frac{1}{6\alpha}\left(-\frac{\gamma^3}{6\beta} + \frac{\gamma^4}{9\beta^2}\right)$. $\left(\text{weil } \mu = \gamma - \frac{\gamma^2}{3\beta}\right)$.

also $= \frac{\gamma^3}{18\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{3\beta} - \frac{1}{2}\right)$,

und $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{\gamma^2}{18\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}\right)$.

wie vorher.

39.

Weil $\frac{\gamma^2}{6\beta} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\mu}{2}$, so ist auch die vorige Differenz $Cam - C\overline{abc}$

$= \frac{1}{3\alpha}\frac{(\gamma-\alpha)}{2}\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{3\alpha}\left(\frac{\gamma-\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma-\mu}{2}\right)$.

Das ist, die halbe Differenz der Altersergänzungen γ und μ multiplicirt in die halbe Differenz von μ und jener halben Differenz macht den Factor aus, der mit $\frac{1}{3\alpha}$ multiplicirt, *die Gröfse der Abweichung* giebt.

Wenn das Alter der beyden ältesten Personen B und C dasselbe bleibet, also auch β, γ, μ, dieselbigen Gröfsen sind, so verhalten sich die Abweichungen *umgekehrt*, wie α, das ist, *wie die Altersergänzungen* der dritten verbundenen Person.

Sind die beyden ältesten Personen am Alter gleich, so ist $\gamma = \beta$, und $\mu = \frac{2}{3}\beta$. Also $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{\beta^2}{108\alpha}$.

40.

Anmerkung. Es ist nicht nothwendig, die beyden ältesten Leben zuerst zu vereinigen, aber es wird vorausgesetzt, dass die *Altersergänzung des gefundenen mittlern Lebens* kleiner sey, als sie für das *dritte Leben* ist, was mit dem mittleren wiederum vereinigt werden soll. Nimmt man die beyden ältesten zuerst, so entsteht dieſs nicht.

41.

Wenn diese Zusammensetzung der mittlern Lebensdauer weiter auf mehrere Personen fortgesetzt wird, so kann die Abweichung bey den folgenden höhern Verbindungen etwas gröſser werden. Z. B. für vier Personen von gleichem Alter ist $C\overline{a\,a\,a\,a} = \frac{3}{5}a$, und $C\overline{a\,a\,a} = \frac{1}{4}a$. Diese sind die genauen Werthe. Denn es ist überhaupt die *Verbindungsdauer für n Personen von gleichem Alter* $= \frac{\int z-x)^n dx}{z^n}$, nach der Hypothese vom gleichförmigen Sterben.

Dieſs ist $= -\frac{(z-x)^{n+1}}{(n+1)z^n} + C$.

weil das Integral verschwinden muſs, wenn $x = o$, so ist die beſtändige Gröſse $C = \frac{z^{n+1}}{(n+1)z^n} = \frac{1}{n+1} \cdot a$.

Folglich $C\overline{a^n} = \frac{1}{n+1} \cdot a - \frac{(z-x)^{n+1}}{(n+1)a^n}$, das ist, wenn $x = a$, $C\overline{a^n} = \frac{a}{n+1}$. Sucht man aber den

Wehrt von $C\overline{a^3}$ nach der vorigen Methode, so bekommt man

$\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{108}\alpha$ (§. 39.) $= \frac{28}{108}\alpha = \frac{7}{27}\alpha$.

Und wenn nun wiederum dieser für die Dauer des *mittlern Lebens* angenommen, und daraus $C\overline{am}$ gesucht wird, so erhält man

$C\overline{a^4} = \frac{7}{27}\alpha - \frac{(\frac{14}{27}\alpha)^2}{6.\alpha}$,

$= \frac{7}{27}\alpha\left(1 - \frac{2.14}{27.6}\right) = 0,214.\alpha$.

Der wahre Wehrt ist $0,2.\alpha$, also die Differenz $0,014.\alpha$ das ist, mehr als in dem vorhergehenden Beyspiel, in §. 39.

Dagegen aber wird die *Abweichung geringer werden, wenn vorher jedesmal der gefundene Wehrt bey den niedern Verbindungen corrigirt ist.* Wenn in dem letzten Exempel $\mu = C\overline{aaa}$ genommen wird, wie es genau ist, oder nach seinem corrigirten Wehrt §. 39. nämlich $= \frac{1}{4}\alpha$, so wird $C\overline{am} = \frac{1}{4}\alpha$

$- \frac{(\frac{1}{2}\alpha)^2}{6\alpha} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)\alpha = \frac{5}{24}\alpha$, Dieß ist von dem genauen Wehrt $\frac{1}{5}\alpha$ nur um $\frac{1}{120}\alpha$, das ist weniger als vorher in §. 39. unterschieden.

42.

Bey einer andern Sterblichkeitstafel ist auch die Abweichung anders. Sie ist nach *Süßmilchs* Tafel in keinem

keinem der berechneten Beyspiele so grofs gefunden, als nach der vorigen Hypothese.

Im Allgemeinen läfst sich ihre Gröfse nicht bestimmen, da sie von der Natur der krummen Linie abhängt, die man als die Sterblichkeitslinie nach den Tabellen annehmen mufs.

Es sey *in jedem System* überhaupt die *Anfangszahl* für das *jüngste* Leben y, für das *nächstältere* y'; für das *älteste* y'', und für *das einfache Mittelleben*, z. Diese Zahlen sind die *Ordinaten* der Curve, wozu die Abscissen x gehören, die man von dem Durchschnittspunct beym höchsten Lebensziel an, nehmen kann.

Die *Verbindungsdauer der beyden ältern Leben* ist $\frac{Sy'y''dx}{y'y''}$.

Die *gleiche Dauer des mittlern Lebens* ist $\frac{Szdx}{z}$.

Also $\frac{Sy'y''dx}{y'y''} = \frac{Szdx}{z}$.

Verbindet man das *dritte* gegebene *jüngste* Leben mit dem *mittlern*, so ist die Verbindungsdauer $= \frac{Syzdx}{yz}$. Dieſs ist die durch die Approximationsmethode gefundene Verbindungsdaner aller dreyen.

Die letztere genau berechnet ist $= \frac{Syy'y''dx}{yy'y''}$.

Die Abweichung also (D)

$= \frac{Syzdx}{yz} - \frac{Syy'y''dx}{yy'y''}$.

Es ist auch $\frac{Syzdx}{yx} = \frac{y\int zdx}{yz} - \frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz}$

und $\frac{Syy'y''dx}{yy'y''} = \frac{y\int y'y''dx}{yy'y''} - \frac{\overline{Sdy.\int y'y''dx}}{yy'y''}$.

Folglich $D = \frac{\overline{Sdy.\int y'y''dx}}{yy'y''} - \frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz}$.

Auſser dem Signo Integrali sind y, y', y'', gegebene Gröſsen und können als *beſtändige* angenommen werden; allein nicht, wenn sie unter diesem Signo stehen.

Man setze $\frac{Sy'y''dx}{y'y''} = V$,

das Stück $\frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz} = \frac{Szdx}{z} - \frac{Syzdx}{yz}$,

kann als ein bekanntes Stück angesehen werden. Denn $\frac{Szdx}{z}$ ist die Dauer des Mittellebens nach der Tabelle c, und $\frac{Syzdx}{yz}$ die durch die Approximationsmethode 1c gefundene Verbindungsdauer aller dreyen. Es sey also $\frac{Syzdx}{yz} = N$, und $\frac{Szdx}{z} = M$, so ist nun

$D = \frac{SVdy}{y} - \frac{SVzdy}{yz}$

$D = \frac{SVdy}{y} - (M - N)$,

So viel ist zunächst klar, wenn V und z in irgend einem Systeme dieselbigen Gröſsen sind, das ist, wenn die beyden ältern Leben dieselbigen bleiben, so ist D in dem umgekehrten Verhältniſs von y, oder wie $\frac{1}{y}$.

In

In der Hypothese vom gleichförmigen Absterben war D in dem umgekehrten Verhältnifs der Altersergänzung. §. 39. Das ist da einerley mit dem umgekehrten Verhältnifs der Zahl der Lebenden. *Dieſs ist also etwas allgemeines in jedem Syſtem.*

Die Veränderung, welche die Abweichung D annimmt in verschiedenen Systemen, kann nach den Grundsätzen des Calculi Variationum allgemein ausgedruckt werden; allein sie hängt ab von der *Variation* der Ordinaten y.

Wenn man annimmt, dafs in den verschiedenen Systemen, V, oder die *Dauer des Mittellebens* für dasselbe gegebene Alter zwoer verbundenen Personen, in einem beständigen Verhältnifs stehe, so wird man auch nicht viel fehlen, wenn $\frac{S V d y}{y}$ in demselbigen Verhältnifs genommen wird. Es sey in einem andern System V′, v, d v, was in dem vorigen V, y, d y ist, so ist $\frac{S V d y}{y} : \frac{S V' d v}{v} = V - \frac{S y d v}{y} : V' - \frac{S v d V'}{v} =$ $V - \frac{S y d v}{y} : n \left(V - \frac{S v d v}{v} \right)$, das ist 1 : n, wenn $\frac{S y d V}{y}$ für gleich mit $\frac{S v d V}{v}$ angenommen werden kann. Hier sind *v* und *y* aufser dem Signo Integrali einander gleich; nur nicht unter demselben.

Nach dieser Voraussetzung läfst sich die Abweichung für jedes System angeben, wenn man sie nur für das vom gleich-

gleichförmigen Absterben berechnet hat. Denn aus D und M und N findet man $\frac{SVdy}{y}$, und nun statt der letztern Gröfse n, $\frac{SVdy}{y}$ genommen, nämlich in dem Verhältnifs der Dauer des Mittellebens; und dann noch M und N nach dem Syftem, wornach man rechnet, fo hat man die Abweichung nach dem letztern, wodurch der mittelft der Approximationsmethode gefundene Wehrt corrigiret werden kann.

Will man fich noch kürzer abhelfen, fo nehme man die ganze Abweichung D, in den verfchiedenen Syftemen, in dem Verhältnifs, V:v. Die Stücke M verhalten fich ohnedieſs fo. Die kleinern Gröfsen N werden auch nicht viel davon abweichen.

43.

Um daſſelbe Verfahren bey den *Verbindungsrenten* anzubringen, fuche man die *Abweichung* von dem wahren Wehrt bey Renten. Die Abweichung nämlich, die *durch die Subftitution einer einfachen mittlern Leibrente ftatt einer Verbindungsrente für zwey Leben* entfteht, wenn man für drey Perfonen die Verbindungsrente fucht. Zuerft fuche man felbige nach der Hypothefe vom gleichförmigen Abfterben,

Es

Es ſey wiederum

das Alter der jüngſten Perſon a die Altersergänzung α

— — — zwoten — b — — — — β

— — — älteſten — c — — — — γ

ſo iſt nach dem Geſetz vom gleichförmigen Abſterben $\lambda\overline{abc} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} L\overline{bc}$ (§. 13. 14.) Man nehme $\lambda\overline{bc} = \lambda\overline{m}$, das iſt, die Rente der Verbindung von b und c ſey der einfachen Leibrente gleich, wozu das Alter m und die Altersergänzung μ aus den Tabellen gefunden wird. Nun iſt auch

$$\lambda\overline{am} = \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha} L\overline{m} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} L\overline{m}.$$

Alſo iſt die Differenz $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abc} = \frac{1}{\alpha}(L\overline{bc} - L\overline{m})$ und weil

$$L\overline{bc} = 3p.\lambda\overline{bc} - \left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)p\,\lambda\overline{c} - p\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}$$

wo p das *Grundcapital* für augenblickliche Zinſen, oder $= \frac{1}{\text{log. nat. } r}$ iſt, auch $L\overline{m} = 2\,p\,\lambda\overline{m} - p\int\frac{dx}{r^{\mu}}$. (*Zuſätze* zu Cap. II. §. 23.) ſo wird

$$\frac{1}{\alpha}(L\overline{bc} - L\overline{m}) = \frac{1}{\alpha}\left(p\lambda\overline{m} - \left(p+p\frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\overline{c} - \left(p-\frac{p\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}} + p\int\frac{dx}{r^{\mu}}\right) = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\overline{m} + \int\frac{dx}{r^{\mu}} - \left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\overline{c} - \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}\right).$$ Dieſs iſt die

Correction, welche von $\lambda\overline{am}$ *abgezogen werden muſs*, um *den genauen Wehrt von* $\lambda\overline{abc}$ zu erhalten.

44. Iſt

44.

Ist $b = c$, also $\beta = \gamma$, das ist, sind die zwo ältesten der gegebenen Personen von gleichem Alter, so ist

$$\lambda\overline{a\,m} - \lambda\overline{abc} = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\overline{m} + \int\frac{dx}{r^m} - 2\,\lambda\overline{c}\right)$$

und weil nun auch $\left(1 - \frac{\lambda\overline{m}}{p}\right)\mu = \int\frac{dx}{r^\mu}$ (§. 19.)

$= \left(1 - \frac{\lambda\overline{cc}}{p}\right)\mu$, so wird $\lambda\overline{a\,m} - \lambda\overline{a\,cc}$

$= \frac{1}{\alpha}\left(p.\lambda\overline{cc} - 2\,p\,\lambda\overline{c} + p\,\mu - \mu\,\lambda\overline{cc}\right)$

Diese Differenz würde ganz verschwinden, wenn $\mu = p\,\frac{(2\lambda\overline{c} - \lambda\overline{cc})}{p - \lambda\overline{cc}}$. Ist also μ dieser letztern Gröfse nicht gleich, so sey $p\,\frac{(2\lambda\overline{c} - \lambda\overline{cc})}{p - \lambda\overline{cc}} = \mu - d$, so wird $d.\,\frac{(p - \lambda\overline{cc})}{\alpha} = \lambda\overline{a\,m} - \lambda\overline{abc}$ die Correction, welche von dem gefundenen Wehrt $\lambda\overline{a\,m}$ nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben abzuziehen ist, um den genauen Wehrt $\lambda\overline{abc}$ zu erhalten.

45.

Die Abweichung bey *vier* Personen ergiebt sich auf folgende Art. Es ist $\lambda\overline{abcd} = \lambda\overline{bcd} - \frac{1}{\alpha}\,L\overline{bcd}$. Nun sey $\lambda\overline{bcd} = \lambda\overline{m}$, wo $\lambda\overline{m}$ die *einfache* Rente für das Alter *m* ist, welche der *Verbindungsrente für drey* gleich ist. Es wird vorausgesetzet, dafs $\lambda\overline{bcd}$ völlig genau genommen sey. Ist sie durch Abkürzung gesucht,

so

so muss sie nach der obigen Anweisung vorher corrigiret werden.

Alsdenn ist $\lambda\overline{am} = \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha} L\overline{m}$. Daher die Differenz $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd} = \frac{1}{\alpha}(L\overline{bcd} - L\overline{m})$.

Es ist aber $L\overline{bcd} = p\left(4\lambda\overline{bcd} - \left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{cd} - \lambda\overline{bd} - \frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{d} - \left(1-\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\delta}{\beta}+\frac{\delta\delta}{\beta\gamma}\right)\int\frac{dx}{r^x}\right)$, nach §. 35, wenn in dem dortigen Ausdruck d, c, b, statt c, b, a, und δ, γ, β, statt γ, β, α, geschrieben wird.

Weiter ist $L\overline{m} = 2p.\lambda\overline{m} - p\int\frac{dx}{r^x}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 23.), und $p\int\frac{dx}{r^x} = (p - \lambda\overline{m})\mu$. (*Zus.* zu Cap. II. §. 17.). Daher, weil auch $\lambda\overline{m} = \lambda\overline{bcd}$,

$$\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(2p\lambda\overline{m} + p\mu - \mu\lambda\overline{m} - p\lambda\overline{bd} - p\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{cd} - p\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{d} - \left(1-\frac{\delta}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta\delta}{\beta\gamma}\right)p\int\frac{dx}{r^x}\right).$$

Der Kürze wegen setze man $1 - \frac{\delta}{\beta} = g$, und $1 - \frac{\delta}{\gamma} = h$, so wird

$$\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha} = \frac{p}{\alpha}\left(2\lambda\overline{m} - \lambda\overline{bd} - (2-g)\lambda\overline{cd} - (1-h)g\lambda\overline{d} - gh\int\frac{dx}{r^x}\right) + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m}).$$

Es ist aber $\int\frac{dx}{r^x}$ die *augenblickliche Zeitrente auf die Altersergänzung* δ, *der ältesten Person* nämlich, da nach

der Integration $x = \delta$ wird, und daher dann $\int \frac{dx}{r^x} = \delta - \frac{\lambda \overline{d}}{p}$, und

$$\frac{l.\overline{bcd} - l.\overline{m}}{\alpha} = \frac{p}{\alpha}\Big(2\lambda\overline{m} - \lambda\overline{bd} - (2-g)\lambda\overline{cd} - g\Big(1 - h\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big)\lambda\overline{d} - gh\delta\Big) + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m}).$$

Dafür schreibe man $= -\frac{p}{\alpha} M + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m})$. Diese Differenz verschwindet, wenn $pM = \mu(p - \lambda\overline{m})$ oder $\frac{pM}{p - \lambda\overline{m}} = \mu$. Ist das nun nicht, so sey $\frac{pM}{p - \lambda\overline{m}} = \mu - D$. Alsdenn wird $\frac{l.\overline{bcd} - l.\overline{m}}{\alpha}$, oder $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd} = D.\frac{(p - \lambda\overline{m})}{\alpha}$.

46.

Ist $b = c = d$, das ist, sind die drey ältesten Personen *von gleichem Alter*, so ist auch $\beta = \gamma = \delta$, und $g = h = 0$. Folglich die Abweichung $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd} = \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \mu\frac{\lambda\overline{m}}{p} + 2\lambda\overline{m} - 3\lambda\overline{dd}\Big)$.

Ueberhaupt aber, wenn die *ältern* Personen ausser der jüngsten, *alle von gleichem Alter* sind, so ist bey *drey* Personen (nach §. 43.) die Abweichung

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abb} = \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \Big(\frac{\mu}{p} - 1\Big)\lambda\overline{bb} - 2\lambda\overline{b}\Big).$$

Und nun nach dem obigen bey *vier* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abbb} = \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \Big(\frac{\mu}{p} - 2\Big)\lambda\overline{bbb} - 3\lambda\overline{bb}\Big).$$

Für

Für *fünf* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^4} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \left(\frac{\mu}{p} - 3\right)\lambda\overline{b^4} - 4.\lambda\overline{bbb}\right)$$

und überhaupt für *n* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^{n-1}} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \left(\frac{\mu}{p} - (n-2)\right)\lambda\overline{b^{n-1}} - (n-1)\lambda\overline{b^{n-2}}\right)$$

Denn es ist $\lambda\overline{am} = \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha}\cdot L\overline{m}$

$= \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha}(2p\lambda\overline{m} + \mu\lambda\overline{m} - p\mu)$

und $\lambda\overline{ab^{n-1}} = \lambda\overline{b^{n-1}} - \frac{1}{\alpha}L\overline{b^{n-1}}$

$= \lambda\overline{b^{n-1}} - \frac{(pn\lambda\overline{b^{n-1}} - p(n-1)\lambda\overline{b^{n-2}})}{\alpha}$

Da nun $\lambda\overline{m} = \lambda\overline{b^{n-1}}$, so ist

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^{n-1}} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \lambda\overline{m}\left(\frac{\mu}{p} - \overline{n-2}\right) - (n-1)\lambda\overline{b^{n-2}}\right).$$

Für diese Fälle wird demnach die erforderliche Correction leicht berechnet.

Viertes Capitel.

Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartſchaften.

Erſter Abſchnitt.

Von der Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens.

166.

Satz 46. *Wenn N h (Fig. 3.) das Decrement der Tabellen, oder die Zahl der Sterbenden aus A N Lebenden, während eines Jahrs iſt, und M m die Zahl der Abſterbenden aus A M während deſſelben Jahrs, und h i, m k parallel mit A M und A N gezogen werden, und nun die anfängliche Zahl der gegebenen Paare durch das Parallelogramm A B vorgeſtellt wird, ſo giebt*

1) *Das Parallelogramm N k l h die Zahl der in dem Jahre erfolgten Trennungen, wobey eine Perſon aus A M am Ende deſſelben überlebend iſt.*

2) *Das Parallelogramm M m l i ſtellt die Zahl der Trennungen vor, wobey eine aus A N am Ende des Jahrs überlebend iſt, und*

3) *B k l i die Zahl der in demſelben Jahre gänzlich ausgeſtorbenen Paare.*

Sind

Sind h D und m H, die Abſterbenden für das *nächſtfolgende* Jahr, ſo ſind die Parallelogramme D h r F, H m s F, r l s F daſſelbe für dieſs folgende Jahr. *Die Summe der Parallelogramme* jeder Art ſtellet dieſelbigen Zahlen für *alle* Jahre zuſammen vor. Es wird aber das ganze Parallelogramm A B für die Zahl aller anfänglichen Paare angeſehen.

Beweis. Die Sache iſt faſt für ſich klar aus dem, was oben §. 107. von dem Gebrauche des Parallelogramms geſagt iſt. Es ſind von A N in dem Lauf des Jahrs, N h geſtorben, und es leben noch A h = M i. Von A M ſind B k geſtorben, und es leben noch N k. Von jenen N h gehören einige zu den Uebriggebliebenen N k, und zwar in dem Verhältniſs, wie B k : N k. So viele als von den Geſtorbenen N h aus der Zahl A N zu B k gehören, das iſt zu den *Geſtorbenen aus AM*, ſo viel Paare ſind in dem Jahre *ganz ausgeſtorben*; ſo viel aber von jenen zu den *Uebriggebliebenen aus AM* gehören, ſo viel ſind Paare getrennet, wobey eine Perſon von den unter A M vorgeſtellten, die andere mit ihr verbundene, die unter A N gehört, am Ende des Jahrs überlebet hat. Folglich, wenn N die anfängliche Zahl der gegebenen *Paare* iſt, (das iſt denn auch zugleich die Zahl der Perſonen, die zu A N, und derer, die zu A M gehören, welche beyde Zahlen einander gleich ſind,) ſo iſt A N : N = N h : $\frac{\text{Nh. N}}{\text{AN}}$. Dieſe letztere iſt die Zahl der Geſtorbenen aus A N. Auch iſt

$AM:N = Bk : \frac{N.Bk}{AM}$. Dieſs iſt die Zahl der Geſtorbenen aus A M.

Nun ferner $N : \frac{N.Bk}{AM} = \frac{Nh.N}{AN} : \frac{Nh.Bk}{AM} \cdot \frac{N}{AN}$ die Zahl der in dem *Jahre ganz ausgeſtorbenen Paare.*

Eben ſo iſt $N : \frac{Nk}{AM} \cdot N = \frac{Nh.N}{AN} : \frac{Nk.Nh}{AN.AM} \cdot N$ das iſt die Zahl der *getrennten* Paare, von denen eine Perſon aus A M am Ende des Jahrs überlebet.

Wird nun das Parallelogramm ſelbſt = N geſetzet, ſo iſt $\frac{Nk.Nk}{AN.AM} \cdot N = Nk.Nh.$

Auf dieſelbige Weiſe erhellet, daſs $Mi.Bk$ die *Zahl der Trennungen* ſey, von denen Eine aus A N überlebet. Es verhalten ſich aber die drey Rectangula $Nh.Bk$, $Nh.Nk$, $Mi.Bk$, wie die drey Parallelogramme, Bl, Nl, Ml.

167.

Zuſatz. Um eben dieſs in Zahlen durch die vorgebrauchten Zeichen auszudrücken, ſey das Product A. B (wo A, B die *Anfangszahlen der Lebenden* aus den Tabellen ſind) die Summe der Paare, welche im Anfang zuſammenleben. Auch ſey y die *Altersergänzung* der *ältern* Perſon, die unter B gehört; ſo iſt

$$\overset{1}{\frown}A \Delta B + \overset{2}{\frown}A \Delta \overset{1}{\frown}B + + \overset{y+1}{\frown\!\!\frown}A. \Delta \overset{y}{\frown}B = S.\overset{1}{\frown}A. \Delta B$$

die Zahl aller in den *einzelnen* Jahren *entſtandenen Trennungen.*

nungen, wobey die zu A gehörige Perſon am Ende des Jahrs gelebt hat, während welcher die verbundene zu B gehörige geſtorben iſt, das iſt, wobey A die mit ihr verbundene Perſon *in dieſem Jahr überlebet* hat.

Ferner iſt $\overset{1}{-}B \Delta A + \overset{2}{-}B \Delta \overset{1}{-}A + + \overset{y}{-}B \Delta \overset{y-1}{-}A = S.\overset{1}{-}B \Delta A$ die *Zahl der Trennungen*, wobey B am *Ende des Jahrs überlebend* geweſen iſt. Und endlich noch $\Delta A. \Delta B + \Delta \overset{1}{-}A. \Delta \overset{1}{-}B + + \Delta \overset{y}{-}A. \Delta \overset{y}{-}B = S. \Delta A. \Delta B$ die *Zahl der in demſelben Jahre ganz ausgeſtorbenen Paare.*

Anmerkung. Es iſt klar, daſs dieſe Zahl der in *demſelben Jahre ausgeſtorbenen* Paare nicht einerley ſey mit der *Zahl aller nach einer gewiſſen Zeit ausgeſtorbenen* Paare, in §. 104. Jene iſt nur die Zahl derer, wovon *beyde Theile in demſelbigen Jahre* geſtorben ſind. Es iſt die Zahl der *zugleich* geſtorbenen Theile deſſelben Paars. Denn wenn ein Theil in dem einen Jahr, der zweyte in dem folgenden ſtirbt, ſo ſind dieſe Paare zwar ganz ausgeſtorben, aber *ihre Theile* ſind nicht *zugleich*, das iſt hier ſo viel als *nicht in demſelben Jahre* geſtorben.

168.

Satz 47. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Perſon aus der Zahl A die mit ihr verbundene aus B überlebe, iſt $\frac{S.\overset{1}{-}A \Delta B}{A\ B}$.

Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs gleich dem Verhältniss der Fälle, worin er sich findet, zu der Zahl *aller* Fälle. *Ueberleben* heisset hier wiederum so viel, als am Ende des Jahrs noch leben, während dessen die andere Person gestorben ist.

Zusatz 1. Die *Wahrscheinlichkeit*, dass eine Person von B die mit ihr verbundene A überlebe, ist

$$= \frac{S^{1}{}_{A\,\Delta\,A}}{B\,A},$$

Zusatz 2. Die *Wahrscheinlichkeit*, *dass sie beyde zugleich sterben*, in demselbigen Jahre nämlich, ist

$$= \frac{S_{\Delta A.\,\Delta B}}{A.\,B},$$

Zusatz 3. Diese drey Wahrscheinlichkeiten zusammen, sind = 1. Denn für ein unbestimmtes Jahr n sind

$$\frac{{}^{n}\!A\,\Delta\,{}^{n-1}\!B}{A\,B} + \frac{{}^{n}\!B.\,\Delta\,{}^{n-1}\!A}{A.\,B} + \frac{\Delta\,{}^{n-1}\!A.\,\Delta\,{}^{n-1}\!B}{A.\,B}$$

$$= \frac{({}^{n}\!A + \Delta\,{}^{n-1}\!A)\,({}^{n}\!B + \Delta\,{}^{n-1}\!B)}{A\,B} - \frac{{}^{n}\!A\;{}^{n}\!B}{A.\,B}$$

$$= \frac{{}^{n-1}\!A.\,{}^{n-1}\!B - {}^{n}\!A.\,{}^{n}\!B}{A.\,B} = \frac{\Delta\,({}^{n-1}\!A.\,{}^{n-1}\!B)}{A.\,B},$$ das ist

gleich der Abnahme der Paare für das nte Jahr durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt. Die Summe dieser

Decre-

Decremente der Paare aus allen Jahren ist der ganzen anfänglichen Zahl derselben gleich, das ist

$$\frac{S\Delta(AB)}{AB} = 1.$$

Zusatz 4. Die *Wahrscheinlichkeit, dass beyde zugleich sterben während desselben Jahrs*, ist schon beträchtlich; allein die, dass beyde *zugleich in demselben Augenblicke* sterben, ist eine unendlich kleine, die nicht in Betracht kommt. Daher wird die Summe der beyden Wahrscheinlichkeiten, der, dass A, B überlebe und der, dass B, A überlebe = 1 gerechnet; denn genau ist dies nur wahr, wenn die Decremente auf jede Augenblicke berechnet werden.*)

170.

Anmerkung 1. Die *Wahrscheinlichkeit, dass eine Person überhaupt die andere überlebe*, ist nicht zu verwechseln, weder mit der Wahrscheinlichkeit, *dass eine Person die andere in einem bestimmten Jahre überlebe*, oder dass eine vor der andern in einem bestimmten Jahre wegsterbe; noch mit der, dass *eine in einem bestimmten Jahre überlebend sey* über die andere, das ist, noch am Leben sey, wenn die andere todt ist. Auch ist jene nicht einerley mit der Summe der letztgedachten Wahrscheinlichkeiten aus allen Jahren zusammen. Diese Summe ist das, was die *mittlere Dauer des Ueberlebens*

*) *Zusätze* zu diesem Capit. §. 1 u. f.

ausmacht. §. 109. Man hat sich hier zuweilen versehen, daher diese Erinnerung nicht überflüssig seyn wird.

Anmerkung 2. Die Wahrscheinlichkeit, dass B *vor* A in *dem bestimmten* nten Jahr wegsterbe, ist $= \frac{\overset{n+1}{\frown}A \cdot \Delta \overset{n}{\frown}B}{A\,B}$, das ist, dass B in *diesem* Jahr absterbe, und A *am Ende desselben*, oder am Anfang des nächst. folgenden, noch lebe. Eigentlich liegt in ihr die Wahrscheinlichkeit, dass B im *Anfang des Jahrs* noch lebe, $\frac{\overset{n}{\frown}B}{B}$, aber in demselben Anfang auch absterbe, $\frac{\Delta \overset{n}{\frown}B}{\overset{n}{\frown}B}$; und dass am *Ende desselben*, oder im Anfang des folgenden, A *noch übrig* sey, $\frac{\overset{n+1}{\frown}A}{A}$. Das heisst, jene Wahrscheinlichkeit ist *zusammengesetzt* aus drey andern, und ist

$$= \frac{\overset{n}{\frown}B}{B} \cdot \frac{\Delta \overset{n}{\frown}B}{\overset{n}{\frown}B} \cdot \frac{\overset{n+1}{\frown}A}{A} \cdot = \frac{\overset{n+1}{\frown}A}{A} \cdot \frac{\Delta \overset{n}{\frown}B}{B} \cdot$$

Wenn beyde Personen von gleichem Alter sind, so ist die Wahrscheinlichkeit von beyden Seiten *gleich*, für *jede einzelne Jahre* so wohl als überhaupt, das ist für alle Jahre zusammen. Sie ist alsdenn, in ganzem oder überhaupt genommen $= \frac{1}{2}$, wenn die Wahrscheinlichkeit des Zugleichsterbens für nichts gerechnet wird. §. 169. Allein sie kann *nicht für jedes einzelne Jahr* $\frac{1}{2}$, vielmehr nur ein kleiner Bruch seyn. Die Wahrscheinlichkeit, dass B *vor* A *während eines bestimmten Jahrs* sterbe, und die, *dass* A *vor* B *in demselben sterbe*, macht

kein-

kein Ganzes aus. Es ist ja noch der Fall da, dafs *beyde dieſs Jahr durchleben*, wenn man auch den, dafs *beyde* während deſſelben ſterben, nicht rechnen will.

Die Wahrſcheinlichkeit, dafs *für ein beſtimmtes Jahr* A überlebend ſey, das iſt, dafs A für das Jahr, im Anfang deſſelben noch lebe, und B todt ſey, iſt

$= {}^{n}A, \frac{(B - {}^{n}B)}{A.\ B}$. (§. 106.) Dieſs iſt ein Glied der Reihe, aus der die *Dauer des Ueberlebens* zu berechnen iſt. (§. 109.) Allein *überlebend ſeyn* in einem Jahr und *überlebend werden in demſelben*, iſt nicht daſſelbe.

171.

Anmerkung 3. Ich will hier noch eins anmerken, da es oftmals nicht leicht iſt, ſich für Verwechſelungen zu hüten. Es iſt, wie vorher beſtimmt, $\frac{{}^{n+1}A.}{A} \cdot \frac{\Delta\ {}^{n}B}{B}$ die Wahrſcheinlichkeit, *dafs in dem nten Jahre B ſterbe, und A am Leben bleibe.* Sie iſt aus den beyden Wahrſcheinlichkeiten, aus der, dafs A am Anfang des folgenden $(n+1)$*ten* Jahres, oder am Ende des *nten* noch lebe, und aus der, dafs B im n*ten* (eigentlich im Anfang deſſelben) ſterbe, zuſammengeſetzet. Kann aber eben dieſelbe nicht auch aus folgenden beyden zuſammengeſetzet werden, aus der, dafs die *Verbindung* in dem n*ten Jahr aufhöre*, welche

$$\frac{\Delta.(\overline{\overline{}}^{n}A.\overline{\overline{}}^{n}B)}{A.B} = \frac{\overline{\overline{}}^{n}A.\overline{\overline{}}^{n}B - \overline{\overline{}}^{n+1}A.\overline{\overline{}}^{n+1}B}{A.B}$$

$$= \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B + \overline{\overline{}}^{n+1}B.\Delta\overline{\overline{}}^{n}A + \Delta\overline{\overline{}}^{n}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.B}$$

ist, und aus der, dafs A noch am Ende des *nten* Jahrs am Leben sey, welche $= \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A}{A}$ ist? Dieſs geht nicht an, denn das Product $\frac{(\overline{\overline{}}^{n}A.\overline{\overline{}}^{n}B - \overline{\overline{}}^{n+1}A.\overline{\overline{}}^{n+1}B)}{A.B} \cdot \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A}{A}$ ist nicht einerley mit $\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.}{A} \cdot \frac{\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{B}$, wie man leicht sieht. Dennoch scheint es einerley zu seyn, ob die beyden Umstände zusammentreffen, die in den ersten Wahrscheinlichkeiten enthalten sind, oder die in den lezten? Hört die Verbindung auf, das ist, stirbt einer von beyden; und kommt hinzu, dafs A am Leben bleibe, so ist dieſs ja dasselbe, als wenn A fortlebet und B stirbt.

Das ist es allerdings der Natur der Sache nach, und daraus folgt denn auch, dafs wenn die beyden letzten Wahrscheinlichkeiten hier auf die gehörige Art, den allgemeinen Grundsätzen gemäfs, verbunden werden, das daraus folgende Resultat dasselbe seyn müſſe, wie vorher. Hier hat man einen Fall, dergleichen man sonst in der Mathematik weniger hat als in der Philosophie, dafs unrichtige Anwendungen von Grundsätzen entstehen, weil man ihren Sinn nicht recht bestimmt hat. Es ist ein Axiom in der *Arithmetica Probabilium*, „dafs die Wahrscheinlichkeit

„ſcheinlichkeit eines Eräugniſſes, welches unter der Vor„ausſetzung, daſs *ein anderes zweytes* gewiſs ſey, nur „$\frac{1}{n}$ Wahrſcheinlichkeit hat, in dem Fall daſs dieſs „zweyte ſelbſt, ſtatt gewiſs zu ſeyn, nur die Wahr„ſcheinlichkeit $\frac{1}{m}$ hat, zuſammengeſetzt ſey aus den „beyden, und alſo $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$ tel ſey.“

Eben ſo, wenn ein Eräugniſs das Zuſammentreffen *zweyer* anderer erfordert, davon eins die Wahrſcheinlichkeit $\frac{1}{n}$ hat, das zweyte, wenn jenes gewiſs wäre, $\frac{1}{m}$ iſt, ſo iſt die *Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens* $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$.

Aber hierbey finden zwey Fälle ſtatt. Entweder ſind *beyde Eräugniſſe unabhängig von einander*; das eine kann ſtatt finden ohne das andere, auch das letztere ohne das erſtere; oder es iſt nicht ſo. Iſt jenes, ſo ſind auch *ihre Wahrſcheinlichkeiten von einander getrennt.* Iſt die Wahrſcheinlichkeit des einen für ſich betrachtet $\frac{1}{n}$, und die des andern für ſich $\frac{1}{m}$, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$. So iſt es hier in der Wahrſcheinlichkeit $\frac{\overset{n+1}{\text{—}}A}{A} \cdot \frac{\Delta B}{B}$. Es kann A das

pte

ste Jahr überleben, ohne daſs B in demſelben abgehe, und umgekehrt B abgehen, ohne daſs A es durchlebe.

Sind *die Wahrſcheinlichkeiten nicht ſeparirt*, ſo iſt das ein anders. Die Verbindung zwoer Perſonen kann aufhören ohne daſs A am Leben bleibe. Beyde verbundene Perſonen können nämlich ſterben, auch A kann ſterben und B leben; nur allein die dritte Art, wie das Aufhören möglich iſt, enthält die Bedingung, daſs A am Leben bleibe, und B ſterbe. In ſo weit iſt die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A am Leben bleibe, vermiſcht mit der, daſs die Verbindung aufhöre.*

In ſolchen Fällen muſs man die beyden Wahrſcheinlichkeiten vorher ſepariren. Eigentlich erſt ausmachen, was die eine ſey, im Fall die andere der Gewiſsheit gleich komme. Der Sinn des Grundſatzes, nach welchem die *zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit* berechnet wird, erfordert dieſs. Es muſs erſt gefragt werden, wie wahrſcheinlich iſt das eine, wenn das andere ſchon *gewiſs* iſt, und hernach, wie wahrſcheinlich das letztere, wenn das erſte *gewiſs* iſt? Dann iſt die zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit, daſs beydes erfolge, gleich dem Product der einzelnen Wahrſcheinlichkeiten in einander.

Dadurch hebt ſich die Schwierigkeit in unſerm Fall. *Die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Verbindung beyder aufhöre,*

höre, ist $\frac{\Delta(\overline{\overline{}}^{n}A\ \overline{\overline{}}^{n}B)}{A.\ B} = \frac{\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B} - \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\ \overline{\overline{}}^{n+1}B}{A.\ B}$

$= \frac{(\overline{\overline{}}^{n+1}A + \Delta\overline{\overline{}}^{n}A)(\overline{\overline{}}^{n+1}B + \Delta\overline{\overline{}}^{n}B)}{A.\ B} - \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\ \overline{\overline{}}^{n+1}B}{A.\ B}$

$= \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B} + \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}B.\Delta\overline{\overline{}}^{n}A}{A.\ B} + \frac{\Delta\overline{\overline{}}^{n}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B}$.

Diese werde als *Gewissheit* angesehen, so ist die *Wahrscheinlichkeit* des einen Theils derselben, nämlich $\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\ \Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B}$, das ist, des Falles, *dass A noch lebe, und B todt sey*, (oder dass A lebe, was unter dieser Bedingung mit jenem einerley ist) $= \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{\Delta(\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B)}$. Denn diese Wahrscheinlichkeit (sie sey W) verhält sich zur Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung aufhöre (W') wie $\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B} : \frac{\Delta\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B}$. Also ist W

$= W'.\ \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{\Delta\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B}$, und wenn nun $W' = 1$, das ist gleich der *Gewissheit*, so ist $W = \frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{\Delta\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B}$.

Nun diese Wahrscheinlichkeit multiplicirt in die erste Wahrscheinlichkeit, *dass die Verbindung aufhöre*, das ist, in $\frac{\Delta.\overline{\overline{}}^{n}A.\ \overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B}$, giebt $\frac{\overline{\overline{}}^{n+1}A.\Delta\overline{\overline{}}^{n}B}{A.\ B}$.

Man

Man kann auch so schliessen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung aufhöre, wird, unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit, A lebe, am Ende des n^{ten} Jahrs $\left(\text{oder } \frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}}{A}\right)$ eine Gewissheit sey, so viel als $\frac{\Delta\,\overline{\overline{B}}^{n}}{B}$, nämlich sie wird gleich der Wahrscheinlichkeit, dass B in diesem Jahr sterbe. Es kommt in dem Ausdruck $\frac{\Delta\left(\overline{\overline{A}}^{n}.\,\overline{\overline{B}}^{n}\right)}{A.\,B}$, statt $\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}}{A}$ die Einheit und $\Delta\,\overline{\overline{A}}^{n}$ ist $= 0$.

Diese Wahrscheinlichkeit, wie sie unter der Voraussetzung ist, dass die zwote Gewissheit sey, in die letztere, wie diese für sich ist, $\left(\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}}{A}\right)$ multiplicirt, macht $\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}}{A} \cdot \frac{\Delta\,\overline{\overline{B}}^{n}}{B}$, wiederum wie vorher.

172.

Satz 48. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zweyen Personen A und B, vom Alter a und b, die erstere A, die letztere B überlebe (in demselben Sinn des Worts wie §. 168. nämlich, am Ende desjenigen Jahrs noch lebe, während welches B gestorben ist) *wird so gefunden:*

1) Man suche die *Dauer der Verbindung des Ueberlebenden A mit einer dritten*, die um *Ein* Jahr *jünger* ist, als

als die *Zwote* B, oder *vom Alter* (b — 1) iſt. Das iſt, man ſuche $C_{\overline{a\,(b-1)}}$.

2) Davon ziehe man ab die Dauer der Verbindung von A und B, das iſt $C._{\overline{a\,b}}$.

3) Zu dem Reſt lege man hinzu die vorher nach n. 1. gefundene Verbindungsdauer $C_{\overline{a\,(b-1)}}$, *multiplicirt* mit dem *Decrement des erſten Jahrs für die dritte verbundene Perſon;* das iſt, für das Jahr (b — 1), und dividirt durch die zu dem Alter von B gehörige Anfangszahl.

In den gewöhnlichen Zeichen dieſs ausgedruckt, iſt

$$\frac{S._{A\,\Delta\,B}}{A.\,B} = C_{\overline{a\,(b-1)}}\; C_{\overline{a\,b}} - + \frac{\Delta\,{}^{-1}B.}{B} \cdot C_{\overline{a\,(b-1)}}.$$

Beweis. Es iſt nämlich die Wahrſcheinlichkeit, daſs A, B *überlebe,* (§. 168)

$$= \frac{S._{A.\,\Delta\,{}^{-1}B}}{A.\,B} = \frac{S._{A.\,(B\,-\,{}^{-1}B)}}{A.\,B}$$

$$= \left(\frac{{}^{-1}A.\,B}{A.B} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{-1}B}{A.\,B} + +\right) - \left(\frac{{}^{-1}A.\,{}^{-1}B}{A.B} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{2}B}{A.\,B} + +\right)$$

Die letztere Summe iſt die *Verbindungsdauer* von A und B, (§. 108.) $= C_{\overline{a\,b}}$, und $\frac{{}^{-1}A.\,B}{A\,B} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{-1}B}{A.\,B} + +$ iſt

$$= C_{\overline{a\,(b-1)}}.\frac{{}^{-1}B}{B} = C_{\overline{a\,(b-1)}} + \frac{\Delta\,{}^{-1}B}{B}\; C_{\overline{a\,(b-1)}},$$

wo

wo $\overline{\overline{}}^{1}B$ die Zahl der Lebenden für das Jahr $b - x$ ist.

Folglich $\frac{S.\overline{\overline{}}^{1}A \Delta B}{A.B} = C\overline{a(b-1)} - C\overline{ab}$

$+ \frac{\Delta \overline{\overline{}}^{1}B}{B} C\overline{a(b-1)}$.

173.

Anmerkung 1. Es kann keinen Zweifel haben, dafs nicht die Reihe $\frac{(\overline{\overline{}}^{1}A\,B + \overline{\overline{}}^{2}A\,\overline{\overline{}}^{1}B)}{A\,B} + +$ gleich sey $C\overline{a(b-1)}.\frac{\overline{\overline{}}^{1}B}{B}$. Ist A die Anfangszahl für die älteste Person, so werden in der Reihe $\frac{\overline{\overline{}}^{1}A.\ \Delta\, B}{A\,B} + + \frac{\overline{\overline{}}^{x}A.\ \Delta \overline{\overline{}}^{x-1}B}{A\,B}$, x Glieder seyn, wovon das letzte, wenn x die Altersergänzung von A ist, $= o$ ist. Ist dagegen B die älteste und y die Altersergänzung, so hat die *Reihe* $\overline{\overline{}}^{1}A \Delta B + +$ nur y Glieder, und das letzte ist $\overline{\overline{}}^{y}A.\ \Delta\, \overline{\overline{}}^{y-1}A$; hingegen die Verbindungsdauer $C\overline{a(b-1)}$ hat ein Glied *mehr*, nämlich $\frac{\overline{\overline{}}^{y-1}A.\ \overline{\overline{}}^{y-1}B}{A.B}$. Allein dieſs hinzukommende Glied ist Nichts. Uebrigens ist allerdings in jedem Fall Rückſicht darauf zu nehmen, wie weit die Reihe nach den Bedingungen der Aufgabe festgesetzet werden soll, die man nur

nach

nach der Form ihrer erſten Glieder bezeichnet. Auf dieſe Erinnerung wird man unten zurück zu kommen Gelegenheit haben.

Anmerkung 2. Ferner iſt für ſich klar, daſs die hier zu gebrauchenden *Coexiſtenzen*, die *nicht corrigirten* ſeyn müſſen, das iſt, die nur auf *ganze Jahre* berechnet ſind, und die um $\frac{1}{2}$ kleiner ſind als die *tabellariſchen*.

174.

Zuſatz 1. Die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs B, A *überlebe* oder $\frac{S.\overset{1}{\frown}B.\Delta A}{A.B}$, iſt

$$= C\overline{b\,(a-1)} - C\overline{a\,b} + \frac{\Delta\overset{1}{\frown}A}{A}.\ C\overline{b\,(a-1)}.$$

Zuſatz 2. Die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A und B zugleich*, das heiſst in dem Lauf deſſelben Jahrs *abgehen* (§. 168.) oder $\frac{(\Delta A.\Delta B + \Delta\overset{1}{\frown}A.\Delta\overset{1}{\frown}B + +)}{A\,B}$ iſt

$$= \frac{S(A-\overset{1}{\frown}A)\,(B-\overset{1}{\frown}B)}{A.B} = \frac{(AB+\overset{1}{\frown}A.\overset{1}{\frown}B+\ +)}{A.B}$$

$$- \frac{(A\overset{1}{\frown}B+\overset{1}{\frown}A\overset{2}{\frown}B++)}{A\,B} - \frac{(B\overset{1}{\frown}A+\overset{1}{\frown}B\overset{2}{\frown}A++)}{A\,B}$$

$$+ \frac{(\overset{1}{\frown}A.\overset{1}{\frown}B+\overset{2}{\frown}A\overset{2}{\frown}B+\ +)}{A.B} = 2.C\overline{a\,b} + 1$$

$$- \frac{\overset{1}{\frown}A}{A}.C\overline{(a-1)\,b} - \frac{\overset{1}{\frown}B}{B}.C\overline{a\,(b-1)}.$$

Zuſatz 3. Es ſind wiederum dieſe drey Wahrſcheinlichkeiten zuſammengenommen = 1, wie es nach der Natur der Sache, und auch nach den obigen Ausdrücken ſeyn muſs.

175.

Ex. Es ſey das Alter von A, $a = 40$ Jahr, das von B, oder $b = 45$, ſo iſt

$C\overline{a\,b} = C\overline{40.45} = 14,05 - \frac{1}{2} = 13,55;$

$C\overline{a\,(b-1)} = C\overline{40.44} = 14,294 - \frac{1}{2} = 13,794;$

$C\overline{(a-1)\,b} = C\overline{39.45} = 14,20 - \frac{1}{2} = 13,70.$

Ferner $\frac{\Delta^{-1}B}{B} = \frac{7}{339}$, und $\frac{\Delta^{-1}A}{A} = \frac{7}{374}$.

Folglich

1) die Wahrſcheinlichkeit, daſs A *überlebe*,

$= 13,794 - 13,55$

$+ \frac{7}{339} \cdot 13,794 = 0,244 + 0,284 = 0,528.$

2) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs B *überlebe*,

$= 13,70 - 13,55 + \frac{7}{374} \cdot 13,70$

$= 0,15 + 0,256 = 0,406.$

3) Die Wahrſcheinlichkeit, daſs *beyde in denſelben Jahre ſterben* $= 2.13,55 + 1 - (13,70 + 0,257)$

$- (13,794 + 0,284) = 0,064.$

Und *alle drey* Wahrſcheinlichkeiten *zuſammen*

$= 0,528 + 0,406 + 0,064 = 1.$

176.

Zuſatz 4. Wenn man die erſten beyden Wahrſcheinlichkeiten, daſs A überlebe über B, und die, daſs B überlebe über A, oder $\frac{S^{-1}A\,\Delta B}{A.\,B}$, und $\frac{S^{-1}B.\Delta A}{A.\,B}$ auf *Augenblicke* berechnet, ſo wird die dritte, daſs *beyde zugleich abſterben*, das iſt, in demſelben Augenblicke ſterben, zu nichts. Für dieſen Fall muſs zu jedem Wehrt der beyden erſtern die Hälfte der letztern addirt werden. *)

Zuſatz 5. Es iſt *einerley* Wahrſcheinlichkeit, daſs in *jedem Jahr*, *worinn A geſtorben iſt*, *B ſchon im Anfang deſſelben todt geweſen ſey*, und die, daſs A, B *überlebet habe*, wenn man die ganze Lebenszeit nimmt, nach deren Endigung ſie beyde todt ſind. Denn ob A *nach B geſtorben iſt*, oder B, A *überlebet* habe, iſt daſſelbe im Ganzen. Nur wenn man einige *beſtimmte Jahre nimmt*, ſo iſt dieſs nicht daſſelbe. Das erſte enthält auch, daſs *beyde todt* ſind, das letztere nicht. Die Wahrſcheinlichkeit des erſtern iſt

$$\frac{(B-{}^{1}B)}{B}\cdot\frac{\Delta A}{A}+\frac{({}^{1}B-{}^{2}B)}{B}\cdot\frac{\Delta\,{}^{1}A}{A}++$$

$$=\left(\frac{\Delta A+\Delta\,{}^{1}A}{A}++\right)-\left(\frac{{}^{1}B.\,\Delta A}{A.B}+\frac{{}^{2}B\,\Delta\,{}^{1}A}{B.A}++\right)$$

$$=1-\frac{S^{-1}B\,\Delta A}{A.\,B}=\frac{S^{-1}A\,\Delta B}{A\,B}.$$ Es wird nämlich

*) *Zuſätze* zu dieſem Cap. §. 1.

vorausgesetzet, wie im vorhergehenden Zusatz, dass die Fälle des *Zugleichsterbens* nicht gerechnet werden.

177.

Satz 49. Die Wahrscheinlichkeit, dass A vom Alter a, B vom Alter b überhaupt überlebe (das ist, noch lebe, wenn B stirbt, wenn auch A in demselben Jahr nach B sterben sollte) wird so gefunden.

1) Man nehme die *Verbindungsdauer* jeder der gegebenen Personen mit einer *andern*, die um *Ein* Jahr jünger ist als die *zweite*, das ist die Coexistenz $C^{\overline{(a-1)}\,b}$, und $C^{\overline{(b-1)}\,a}$.

2) Jede dieser Dauern werde durch die Anfangszahl für das um Ein Jahr jüngere Alter multiplicirt, und durch die Anfangszahl für das gegebene Alter dividirt, oder $C^{\overline{(a-1)}\,b}$, mit $\frac{-1}{A}$, und $C^{a\,\overline{(b-1)}}$ mit $\frac{-1}{B}$ multiplicirt.

3) Die *Differenz* dieser beyden Verbindungsdauern zu $\frac{1}{2}$ *addirt*, giebt die *Wahrscheinlichkeit, dass A überlebe*, wenn A die *jüngere* ist; und von $\frac{1}{2}$ sie abgezogen, giebt die Wahrscheinlichkeit des *Ueberlebens für* A, *wenn A die ältere ist.*

Beweis. Nach Zusatz 4. in §. 176. bekommt man die Wahrscheinlichkeit, dass die jüngere A, überhaupt die ältere B überlebe, wenn zu der auf *ganze Jahre berechne-*

rechneten Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens von A, (§. 172.) die Hälfte der Wahrſcheinlichkeit, daſs A und B *zugleich* in demſelben Jahre ſterben, (§. 174. *Zuſ.* 2.) addirt wird. Alſo iſt jene Wahrſcheinlichkeit

$$= \frac{\overline{-1}B}{B} \cdot C\overline{a(b-1)} - C\overline{ab} + C\overline{ab} + \tfrac{1}{2} - \frac{\overline{-1}B}{2B} \cdot$$

$$C\overline{a(b-1)} - \frac{\overline{-1}A}{2A} \cdot C\overline{(a-1)b} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\overline{-1}B}{B} \cdot C\overline{a(b-1)} - \frac{\overline{-1}A}{A} \cdot C\overline{(a-1)b}\right).$$

Und die Wahrſcheinlichkeit, *daſs die ältere B überlebe*, iſt $= \frac{\overline{-1}A}{A} \cdot C\overline{(a-1)b} - C\overline{ab}$

$$+ C\overline{ab} + \tfrac{1}{2} - \frac{\overline{-1}A}{2A} \cdot C\overline{(a-1)b} - \frac{\overline{-1}B}{B} \cdot C\overline{a(b-1)}$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\overline{-1}B}{B} C\overline{a(b-1)} - \frac{\overline{-1}A}{A} C\overline{(a-1)b}\right)$$

Ex. A ſey 40 Jahr, B 45 Jahr; ſo iſt

$C\overline{a(b-1)} = C\overline{40.44} = 14,294$ und

$$\frac{\overline{-1}B}{B} \cdot C\overline{a(b-1)} = C\overline{a(b-1)} + \frac{\Delta\overline{-1}B}{B} \cdot C\overline{a(b-1)}$$

$$= 14,294 + \frac{7}{339} \cdot 14,294 = 14,689.$$

Auch $C\overline{(a-1)b} = C\overline{39.45} = 14,20,$

und $\frac{\overline{-1}A}{A} \cdot C\overline{(a-1)b} = 14,20 + \frac{7}{374} \cdot 14,20$

$= 14,466$. Die Differenz $14,589 - 14,466$ iſt $= 0,123$.

Dieſe halbirt *zu* $\frac{1}{2}$ *gelegt* giebt 0, 5615 für die *Wahrſcheinlichkeit, daſs die jüngere Perſon A überlebe.* Von $\frac{1}{2}$ *abgezogen* macht es 0, 4385 für die Wahrſcheinlichkeit, daſs die *ältere* B überlebe.

Anmerkung. Es ſind hier in dem Exempel corrigirte Coexiſtenzen genommen worden. Eigentlich ſollten es die uncorrigirten ſeyn. Allein hier macht das gar keinen beträchtlichen Unterſchied. Uebrigens iſt zu merken, daſs man fehlerhaft rechnen würde, wenn man ſich der Formeln in §. 172. und 173. bedienen, und auch die corrigirte Dauer ſtatt der auf *ganze Jahre* dorten nehmen wollte. Denn wenn dorten auf Augenblicke gerechnet wäre, ſo würden ſtatt $C\overline{a\,(b-1)}$ und $C\overline{(a-1)\,b}$ andere *Coexiſtenzen* herausgekommen ſeyn.

Zweyter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften im Fall des Ueberlebens.

178.

Wenn ſtatt der *Verbindungsdauer* die baaren Wehrte der *Verbindungsrenten* genommen werden, ſo findet man auf eine ähnliche Art den baaren Wehrt einer Summe, welche bey dem Tode einer gegebenen Perſon zu erheben iſt, im Fall eine andere gegebene ſie überlebet; das iſt, *den baaren Wehrt einer Anwartſchaft auf eine Summe beym Tode einer andern, im Fall dieſe letztere von einer gegebenen Perſon überlebet wird.*

Satz

Satz 50. Der baare Wehrt einer Summe N, die beym Tode der Perſon B vom Alter b zu erheben iſt, im Fall eine andere A vom gegebenen Alter a, am Ende desjenigen Jahrs lebet, in welchem B geſtorben iſt, wird auf folgende Weiſe gefunden;

1) „Man ſuche aus den Tabellen die Verbindungs-„rente für *das a*, und $b-1$, das iſt $\lambda\,\overline{a(b-1)}$."

2) „Multiplicire ſolche durch die *Anfangszahl* für „das Jahr $b-1$, und dividire ſie wieder durch die *An-„fangszahl* für *b*."

3) „Von dieſem Wehrt den Wehrt der Verbindungs-„rente für *a* und *b* abgezogen, und die Differenz durch „den Zinſenfuſs und durch die gegebene Summe N mul-„tiplicirt, giebt den geſuchten Wehrt."

$$N\left(\frac{\overline{\overline{}}^{1}A.\,\Delta\,B}{A.\,B}+\frac{\overline{\overline{}}^{2}A.\,\Delta\,\overline{\overline{}}^{1}B}{A.\,B\,r}+++\right)$$

$$=N.\,r\left(\frac{\overline{\overline{}}^{1}B}{B}\cdot\;\lambda\,\overline{a(b-1)}-\lambda\,\overline{a\,b}.\right).$$

Beweis. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs A, B überlebe, auf ganze Jahre gerechnet, das iſt, daſs A am Ende des Jahrs noch lebe, oder im Anfange des nachfolgenden, in welchem B geſtorben iſt, iſt für das erſte Jahr $\frac{\overline{\overline{}}^{1}A\,\Delta\,B}{A\,B}$ (§. 168.) Und da dieſes Ueberleben als gleich *im Anfang des Jahrs* erfolgend vorausgeſetzet wird, wenn man auf ganze Jahre rechnet, (überhaupt aber *jedes-*

mal im Anfang der Zeit, während welcher die Decremente entſtehen) ſo iſt die Ausgabe der Caſſe für das erſte Jahr *baar* $\frac{{}^{1}\!A \,\Delta\, B}{A.\,B}$; alſo dieſs auch ihr *baarer* Wehrt. Für das *zweyte* Jahr iſt ſie $\frac{{}^{2}\!A \,\Delta\, {}^{1}\!B}{A.\,Br}$, und ſo ferner. Daher für alle Jahre zuſammen

$$\frac{{}^{1}\!A.\,\Delta B}{A\,B} + \frac{{}^{2}\!A.\,\Delta\,{}^{1}\!B}{A.B.r} + + = \frac{{}^{1}\!A.(B - {}^{1}\!B)}{A.\,B}$$

$$+ \frac{{}^{2}\!A.({}^{1}\!B - {}^{2}\!B)}{A.\,Br} + + = \left(\frac{{}^{1}\!A.\,B}{A.B} + \frac{{}^{2}\!A.{}^{1}\!B}{A.Br} + +\right)$$

$$- \left(\frac{{}^{1}\!A.\,{}^{1}\!B}{A.B} + \frac{{}^{2}\!A.\,{}^{2}\!B}{A.B.r} + +\right).$$

Nun iſt die erſte dieſer beyden Summen $= r.\frac{{}^{1}\!B}{B}.\ \lambda\, a\overline{(b-1)}$; und die letzte iſt $= r.\,\lambda\, a\overline{b}$. Folglich iſt der geſuchte Wehrt

$$= r\left(\frac{{}^{1}\!B}{B}\,\lambda\, a\overline{(b-1)}. - \lambda\, a\overline{b}\right)$$

$$= r\left(\left(1 + \frac{\Delta\,{}^{1}\!B}{B}\right)\lambda\, a\overline{(b-1)} - \lambda\, a\overline{b}\right).$$

Ex. A ſey 30, B 40 Jahr alt. A habe die Anwartſchaft auf 1000 *Rthlr.* beym Tode des B, wenn A noch das Ende des Jahrs erlebet, während deſſen B geſtorben iſt, wie groſs iſt der baare Wehrt derſelben? Der Wehrt der Verbindungsrente für zwo Perſonen vom Alter 30

und

und 40 Jahr, oder $\lambda\overline{30.40}$, iſt 10, 7816; und $\lambda\overline{30.39} = 10{,}8903$, Der Unterſchied beyder 0,1087. Ferner iſt das Decrement für das Jahr 39 dividirt mit der Zahl der Lebenden für das 40ſte Jahr nach *Süſsmilchs* Tabelle, $\frac{7}{374}$, und $\frac{7}{374} \cdot 10{,}8903 = 0{,}2038$. Alſo $0{,}2038 + 0{,}1087 = 0{,}3125$ und $0{,}3125$. $\frac{104}{100} = 0{,}325$ was mit 1000 multiplicirt 325 Rthlr. giebt, als den baaren Werth der Anwartſchaft des A.

179.

Zuſatz 1. Der Wehrt der Anwartſchaft der zweoten Perſon B, auf eine gleiche bey dem Tode von A zu erhebende Summe N, im Fall ſie *A* überlebet in demſelben Sinn des Worts, iſt

$$= N\,r\left(\left(1 + \frac{\Delta^{-1}A}{A}\right) \cdot \lambda\overline{(a+1)b} - \lambda\overline{ab}\right).$$

Ex. Es ſey wiederum das Alter des jüngern A, $a = 30$; das der ältern B, oder $b = 40$; B habe im Ueberlebungsfall 1000 Rthlr. beym Tode des A zu erwarten, ſo findet man den baaren Wehrt dieſer Anwartſchaft ſo:

Es iſt $\lambda\overline{30.40} = 10{,}7816$ und $\lambda\overline{29.40} = 10{,}8507$. Der Unterſchied beyder $= 0{,}0691$. Und weil $\frac{\Delta^{-1}A}{A} = \frac{6}{439}$, ſo erhält man $\frac{6}{439} \cdot 10{,}8507 = 0{,}1483$. Dieſs zu $0{,}0691$, giebt $0{,}2174$;

und $0,2174 \cdot \frac{104}{100} = 0,2261$, was mit 1000 multiplicirt 226,1 Rthlr. für den geſuchten Wehrt der Anwartſchaft giebt.

180.

Zuſatz 2. Der baare Wehrt einer Summe 1, die zu empfangen iſt, im Fall *zwo gegebene Perſonen A und B zugleich*, das iſt in *demſelben Jahre abſterben*, iſt

$$= \frac{\Delta A . \Delta B}{A . B} + \frac{\Delta^{-1}A . \Delta^{-1}B}{A . B . r} + + = \frac{(A - {}^{-1}A)}{B} \cdot \frac{(B - {}^{-1}B)}{A}$$

$$+ \frac{({}^{-1}A - {}^{-2}A)({}^{-1}B - {}^{-2}B)}{A} \cdot \frac{}{B . r} + + = \left(\frac{AB}{AB} + \frac{{}^{-1}A\,{}^{-1}B}{ABr} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{{}^{-1}A\,{}^{-1}B}{AB} + \frac{{}^{-2}A\,{}^{-2}B}{A.B.r} + +\right) - \left(\frac{{}^{-1}AB}{AB} + \frac{{}^{-2}A\,{}^{-1}B}{ABr} + +\right)$$

$$- \left(\frac{A\,{}^{-1}B}{AB} + \frac{{}^{-1}A\,{}^{-2}B}{ABr} + +\right) = 1 + \lambda\overline{ab}$$

$$+ r\,\lambda\overline{ab} - r.\frac{{}^{-1}B}{B}\lambda\overline{a(b-1)} - r.\frac{{}^{-1}A}{A} \cdot \lambda\overline{(a-1)b}.$$

Ex. Das obige Exempel beybehalten $a = 30, b = 40$, ſo iſt $r.\lambda\overline{ab} - r.\frac{{}^{-1}B}{B} \cdot \lambda\overline{a(b-1)} = -0,325$ (§. 178.) und $r.\lambda\overline{ab} - \frac{r\,{}^{-1}A}{A} \cdot \lambda\overline{(a-1)b} = -0,226$ (§. 179.) auch $(r-1)\lambda\overline{ab} = \frac{\lambda\overline{ab}}{25} = 0,4312$.

Daher

Daher wird $\lambda\overline{a\,b} = -\frac{r.\overline{\ }^{1}A}{A}\lambda\overline{(a-1)\,b} = -0,657.$
Folglich dieſe Wahrſcheinlichkeit
$= 1 - 0,325 - 0,657 = 0,018.$

181.

Zuſatz. 3. Alles noch auf ganze Jahre berechnet, addirt man die *drey baaren Wehrte* einer *Summe* N, a) die zahlbar iſt beym Tode von B, wenn A am Ende des Jahrs noch lebet; b) beym Tode von A, wenn B am Ende des Jahrs noch lebet; c) beym Tode des einen, wenn die andere zugleich in demſelben Jahre ausſtirbt, ſo *machen* dieſe *zuſammen* ſo viel aus, als *die Summe N ſelbſt vermindert um den Wehrt einer Verbindungsrente für beyde Perſonen, die den Zinſen der Summe gleich iſt.* Es iſt klar, daſs der Entrepreneur, der dieſe drey Wehrte verkauft hat, die Summe N in jedem Falle *gewiſs* auszahlen müſſe, ſobald die Verbindung aufhöret. Er hat alſo nichts genoſſen, als die *Zinſen der Summe während der Verbindung*, das iſt, *den Wehrt einer Verbindungsrente ſo groſs wie dieſe Zinſen.*

Das zeigt auch die Rechnung. Denn wenn man zuſammen nimmt

$$\frac{r}{A.B}\left(\overline{\ }^{1}A.\Delta B + \frac{\overline{\ }^{2}A.\Delta\,\overline{\ }^{1}B}{r} + +\right)$$

$$+\frac{r}{A.B}\left(\overline{\ }^{1}B\,\Delta A + \frac{\overline{\ }^{2}B.\Delta\,\overline{\ }^{1}A}{r} + +\right)$$

$+\frac{1}{A.B}\left(\Delta A.\Delta B+\frac{\Delta A.\Delta B}{r}++\right)=$ W für N = 1; und dazu addirt $r\,\lambda\overline{a\,b}$

$=\left(\frac{{}^{1}\!A.\,{}^{1}\!B}{A.\,B}+\frac{{}^{2}\!A.\,{}^{2}\!B}{A.\,B.r}++\right)$, ſo bekommt man für das *erſte* Jahr $\frac{{}^{1}\!A\,{}^{1}\!B+{}^{1}\!A\,\Delta B}{A.\,B}$

$\frac{+{}^{1}\!B.\Delta A+\Delta A.\Delta B}{A.\,B}=\frac{({}^{1}\!A.+\Delta A)\,({}^{1}\!B+\Delta B)}{A.\,B}=1$,

Für das *zweyte* Jahr hat man $\frac{{}^{1}\!A.\,{}^{1}\!B}{A.\,B.r}$. Für das *dritte* $\frac{{}^{2}\!A\,{}^{2}\!B}{A.\,B.r^{2}}$ u. ſ. f.

Dieſe Theile zuſammen machen $\lambda\overline{a\,b}$. Alſo iſt $W+r.\,\lambda\overline{a\,b}=1+\lambda\overline{a\,b}$. Daher $W=1-(r-1)\,\lambda\overline{a\,b}=1-\frac{\lambda\overline{a\,b}}{p}$, für N = 1, und wenn N eine andere Zahl iſt $=N-\frac{N.\,\lambda\overline{a\,b}}{p}$, das iſt, die Summe N ſelbſt vermindert um den Wehrt einer Verbindungsrente ſo groſs als die Zinſen der Summe.

183.

Zuſatz 4. Und ſo iſt es ebenfalls, wenn man dieſe Wehrte mittelſt der *Verbindungsrenten* ausdrückt. Die beyden, $\frac{1}{A.\,B}\cdot\left({}^{1}\!A.\,\Delta B+\frac{{}^{2}\!A\,\Delta\,{}^{1}\!B}{r}+\,+\right)$

und

und $\frac{1}{A.B} \cdot \left(\overset{1}{-}B \Delta A + \frac{\Delta \overset{2}{-}B \; \Delta \overset{1}{-}A}{r} + + \right)$ ſind (nach §. 178. 179.) $= r \frac{\overset{1}{-}B}{B} \lambda \overline{a(b-1)} - r \lambda \overline{a\,b}$ $+ r \frac{\overset{1}{-}A}{A} \cdot \lambda \overline{(a-1)b} - r \lambda \overline{a\,b}$. Nun iſt auch $\left(\Delta A . \Delta B + \frac{\Delta \overset{1}{-}A . \Delta \overset{1}{-}B}{r}\right) = \left(\frac{A . B}{A.B} + \frac{\overset{1}{-}A . \overset{1}{-}B}{A.B.r} + +\right)$ $- \left(\frac{A \overset{1}{-}B}{A . B} + \frac{\overset{1}{-}A . \overset{2}{-}B}{A . B} + +\right) - \left(\frac{B . \overset{1}{-}A}{A . B} + \frac{\overset{1}{-}B . \overset{2}{-}A}{A.B.r} + +\right)$ $+ \left(\frac{\overset{1}{-}A . \overset{1}{-}B}{A . B} + \frac{\overset{2}{-}A . \overset{2}{-}B}{A . B . r} + +\right) = 1 + \lambda \overline{a\,b}$ $- \frac{\overset{1}{-}A}{A} \cdot r \lambda \overline{(a-b)\,b} - \frac{\overset{1}{-}B}{B} r . \lambda \overline{a\,(b-1)}$ $+ r \lambda \overline{a\,b}$. Dieſer Wehrt zu den beyden obigen addirt giebt $W = 1 + \lambda \overline{a\,b} - r \lambda \overline{a\,b} = 1 - (r-1) \lambda \overline{a\,b}$ $= 1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}$. welches für die Summe N, iſt $W\,N = N - \frac{N}{p} \lambda \overline{a\,b}$, wie es ſeyn ſoll.

Ex. So iſt in dem obigen Beyſpiel, wo A 30, B 40 Jahr alt iſt, die *erſte Anwartſchaft* im Fall A überlebet, = 325 Rthlr. (§. 178.) die zwote im Fall B überlebet = 226, 1 Rthlr. und die *dritte* für den Fall des Zugleichſterbens = 18 Rthlr. (§. 180.) Dieſe zuſammen geben 569 Rthlr.

Nun iſt auch $1000\left(1-\frac{\lambda\overline{ab}}{p}\right)=1000\left(1-10.\frac{7816}{25}\right)$
$=1000-431=569$ Rthlr. ſo wie es ſeyn ſoll.

183.

Zuſatz 5. Will man die Wehrte für das Ueberleben von A *überhaupt* haben, ſo daſs auch die Fälle dahin gehören ſollen, wo A nach B in dem *nämlichen Jahre* ſtirbt, ſo muſs der Wehrt des *Zugleichſterbens* in §. 180. $\left(\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}+\frac{\Delta^{\overline{1}}A.\Delta^{\overline{1}}B}{A.B.r}\right)$ zur Hälfte zu dem Wehrte des Ueberlebens von *A* in §. 178. addirt werden.

Die andere Hälfte von jenem kommt zu dem Wehrte des *Ueberlebens von B* in §. 179.

In beyden Fällen wird jedoch die beym Tode der einen Perſon zahlbare Summe angeſehen, als ſey ſie im Anfang des Jahrs, in welchem eine zuerſt ſtirbt, in Bereitſchaft zu halten, alſo auch alsdenn ſchon zahlbar, weil der Abgang im Anfang des Jahrs angenommen wird.

Dieſs erhellet ſchon aus eben dem Beweiſe in den *Zuſätzen* *) womit der *Zuſatz 4.* in §. 176. dargethan wird. Allein weil es hier von vorzüglicher Wichtigkeit iſt, wegen des nächſtfolgenden Grundſatzes, ſo habe ich noch inſonderheit die Sache in den Zuſätzen deutlich auseinander geſetzet. **)

Wollte

*) §. 1. **) §. 4.

Wollte man aber ſtatt der gewöhnlichen Leibrenten ſolche gebrauchen, die für *augenblickliche Termine* gehören, ſo verſchwindet der Wehrt des Zugleichſterbens in §. 180., allein die obigen Formeln für die Wehrte der Anwartſchaften in §. 178. und §. 179. können alsdenn nicht behalten werden. Beym erſten Anblicke ſcheint das ſo.

184.

Satz 51. Der Wehrt der Anwartſchaft auf eine Summe N, die beym Tode einer Perſon A, und zwar im Anfange des Sterbejahrs zahlbar iſt, unter der Bedingung daſs A eine zwote Perſon B überlebe, (es ſey nun daſs jene gleich in demſelben Jahr noch ſterbe oder nicht) wird ſo gefunden. Das Alter der gegebenen Perſon ſey *a* und *b*.

1) „Man nehme die Verbindungsrenten für zwey „verbundene Leben $a-1$ und b; und für $b-1$ „mit a; und jeder dieſer Wehrte werde vergröſsert „in dem Verhältniſs der Zahl der Lebenden in dem „um ein Jahr verminderten Alter, zu der Zahl derſelben „in dem gegebenen; das iſt $\lambda\overline{(a-1)b}$ werde multipli„cirt mit $\frac{-1A}{A}$; und $\lambda\overline{a(b-1)}$ mit $\frac{-1B}{B}$.

2) „Die *Differenz* dieſer beyden Wehrte werde mit „dem Zinsfuſs r multiplicirt und halbirt.

3) „Man

3) „Man ſuche die *halbe Differenz* zwiſchen dem „*Grundcapital* und der *Verbindungsrente* der gegebenen „Perſonen dividirt durch das *Grundcapital* oder „$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_{\overline{a\,b}}}{p}\right)$.

4) „Die erſte halbe Differenz aus n. 2. von der letz„ten aus n. 3. *abgezogen*, oder dazu *addirt*, giebt den „Wehrt der Anwartſchaft auf die Summe 1 für die *ältere* „Perſon im erſten Fall, und für die *jüngere* im letztern „Fall.“

Beweis. Nach dem vorhergehenden iſt der Wehrt der Anwartſchaft auf die Summe 1 beym Tode B, wenn die jüngere A überlebet $= r\frac{\overline{\overline{-1}}_B}{B}\cdot\lambda_{\overline{a(b-1)}} - r\lambda_{\overline{a\,b}}$

(§. 178.) $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda_{\overline{a\,b}} - \frac{r.\lambda_{\overline{a\,b}}}{2} - \frac{\overline{\overline{-1}}_A}{2A}\cdot r\lambda_{\overline{(a-1)b}}$

$- \frac{\overline{\overline{-1}}_B}{2B}\cdot r\lambda_{\overline{a(b-1)}}$ (§. 182. 183.)

$= \frac{1-(r-1)\lambda_{a\,b}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\overline{\overline{-1}}_B}{B}\cdot r.\lambda_{\overline{a(b-1)}}$

$- \frac{1}{2}\frac{\overline{\overline{-1}}_A}{A}\cdot r.\lambda_{\overline{(a-1)b}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\lambda_{\overline{a\,b}}}{p}\right)$

$+\frac{1}{2}\cdot r\left(\frac{\overline{\overline{-1}}_B}{B}\cdot\lambda_{\overline{a(b-1)}} - \frac{\overline{\overline{-1}}_A}{A}\cdot\lambda_{\overline{(a-1)\,b.}}\right)$

Für

Für den Fall des Ueberlebens des ältern B, iſt der Wehrt von 1 zahlbar beym Tode des A

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}\right) - \frac{1}{2} r \left(\frac{\overline{-1}B}{B} \lambda \overline{a(b-1)} - \frac{\overline{-1}A}{A} \lambda \overline{(a-1)b}\right).$$

Zuſatz 1. Sind beyde Perſonen von *gleichem Alter*, ſo iſt auch die Anwartſchaft in beyden Fällen gleich, und $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}\right)$.

Ex. Es ſey die Summe 1000 Rthlr.; a, 30 Jahr und b, 40 Jahr, ſo iſt $\lambda \overline{a\,b} = 10,7816$, und $1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p} = 1 - 0,431264 = 0,5687$, und die Hälfte davon $= 0,2844$. Es iſt ferner $\frac{\overline{-1}B}{B} \lambda \overline{a\,(b-1)}$ $= 14,0941$, und $\frac{\overline{-1}A}{A} \cdot \lambda \overline{(a-1)\,b} = 10,9990$.

Alſo $\frac{\overline{-1}B}{B} \lambda \overline{a(b-1)} - \frac{\overline{-1}A}{A} \lambda \overline{(a-1)b} = 0,0951$. Dieſs mit 1,04 multiplicirt, giebt 0,0989; davon die Hälfte $= 0,0494$. Alſo iſt die Anwartſchaft auf die Summe 1 der *jüngern* Perſon $= 0,33382$, und der *ältern* $= 0,2349$.

Dieſs mit 1000 multiplicirt, giebt für die jüngere 333,8 Rthlr., und für die ältere 234,9 Rthlr.

Ex. 2. Es ſey das Alter der jüngern Perſon $a = 20$, und $b = 50$ Jahr, ſo iſt $\lambda \overline{20.\,50} = 9,6355$; $\lambda \overline{19.\,50}$ $= 9,6740$, und $\frac{495}{491} \cdot \lambda \overline{19.\,50} = 9,7527$.

Ferner $\lambda\overline{20.49} = 9,8213$, und $\frac{308}{300}\lambda\overline{20.49} = 10,0835$. Die Differenz $10,0835 - 9,7527 = 0,3308$ mit $\frac{1}{2}r = 0,52$ multiplicirt, giebt 0,1720. Dieſe addirt zu der Differenz $\frac{1}{2} - \frac{\lambda\overline{20.50}}{50}$, das iſt, zu 0,30729, giebt den Wehrt der Anwartſchaft auf 1, für die *jüngere* Perſon 0,4793; und die erſtere Differenz von der letztern *abgezogen* giebt 0,13528 für die ähnliche Anwartſchaft bey der *ältern* Perſon.

185.

Zuſatz 2. Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben kann man die Wehrte der obigen Anwartſchaften ſehr kurz haben, zumal wenn man ſich der *augenblicklichen* Leibrenten bedienen will. Da iſt der Wehrt der Summe 1 zahlbar beym Tode von B auf den Fall, daſs A *überlebe*, $= \frac{1}{\beta}\lambda\overline{a}$, ($\beta$ und α ſind wiederum die *Altersergänzungen* zu *a* und *b*, dem Alter von A und B); und für den Fall, daſs B überlebe $= \frac{1}{\alpha}\lambda\overline{b}$. Der dritte Fall, daſs beyde zugleich abgehen, hat keinen Wehrt,

Aber hierbey iſt zu merken, daſs für beyde Fälle jene Ausdrücke nur paſſen, wenn *die Perſon, welche die andere überleben ſoll*, die ältere von beyden *iſt*. Alſo in dem erſten Fall, daſs A überlebe, wenn A älter iſt als B, alſo

alſo α kleiner iſt als β; und im zweyten, wenn B älter iſt als A, und alſo β kleiner als α.

Wenn die *überlebende* Perſon die jüngere iſt, ſo muſs in dem Fall, daſs A es ſeyn ſoll, wo alſo α gröſser iſt als β, anſtatt der Leibrente $\lambda\overline{a}$, eine nach β Jahren *aufhörende Leibrente* für A genommen werden. Eben ſo im zweyten Fall, wenn B die jüngſte iſt und überleben ſoll, iſt ſtatt der Leibrente $\lambda\overline{b}$ eine nach α *Jahren aufhörende* zu gebrauchen. Man ſehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

186.

Anmerkung. Die hier vorgetragenen Grundſätze ſind bisher von den Schriftſtellern über dieſe Materie, und zwar, ſo viel mir bekannt iſt, von allen verfehlet worden. *Moivre* gab folgende Anweiſung. **) *Man berechne den baaren Wehrt einer Summe* 1, *die beym Tode einer Perſon zahlbar iſt*, das iſt den baaren Wehrt der *Erbſchaft* $i = 1 - \frac{\lambda\overline{a}}{p}$ (§. 98.), und *dieſe multiplicire man mit der Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens.* Denn da jene Erbſchaft nur unter der Bedingung zu empfangen iſt, daſs die Perſon, von deren Tode ſie abhängt, vor einer andern abſterbe, oder daſs eine andere jene überlebe, ſo muſs ihr baarer Wehrt, den ſie für ſich hat, noch mit der Wahrſcheinlichkeit dieſes Ueber-

 lebens

*) §. 5.

**) *Treatiſe on Annuities. Probl.* XVII und XX.

lebens multiplicirt werden. Sind zum Beyſpiel beyde Perſonen von gleichem Alter, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens auf jeder Seite $= \frac{1}{2}$. Dann iſt ihr geſuchter Wehrt dem halben Wehrt der Erbſchaft gleich. *Moivres* Schluſs hatte vielen Schein, muſste ihn auch wohl haben, um einen Mann von ſeinem Scharfſinn zu verleiten. Es war ein allgemeines Raiſonnement aus Begriffen, aber ein ſolches, das noch nicht in und durch Zeichen genug verdeutlichet war. Auſser der Mathematik haben die Beweiſe, auch die man für ſehr bündig hält, die meiſtenmale nicht mehr Klarheit als jener. In der Mathematik aber iſt man gewohnt ſie, ihres beſten Scheins ohngeachtet, noch näher in Zeichen zu verdeutlichen. Dieſs iſt eine Probe, bey der ſich zuweilen findet, daſs ſie triegen. Es iſt ohne Zweifel ein Grundſatz, daſs der *jetzige Wehrt einer wahrſcheinlich zahlbaren Summe*, erſtlich *nach ihrer Gröſse*, und zweytens *nach dem Grad der Wahrſcheinlichkeit*, oder des Riſico, daſs ſie zu zahlen oder nicht zu zahlen ſey, berechnet werden müſſe. So rechnet man in jedem Fall. Allein der Fehler des obigen Schluſſes liegt darin. Die zahlbare Summe 1 beſteht aus den verſchiedenen Theilen der einfachen Jahre; und bey dieſen Theilen, einzeln genommen, iſt die *Wahrſcheinlichkeit* zwar gleich bey zwo Perſonen von gleichem Alter, wenn alles übrige einerley iſt, aber ſie iſt *nicht bey jedem einzelnen Theil* $= \frac{1}{2}$, wie oben §. 170. bemerkt iſt. Nur die Summe

der

der einzelnen Wahrſcheinlichkeiten aller Theile zuſammengenommen macht $\frac{1}{2}$ aus bey gleich alten Perſonen. Kein Wunder alſo, daſs am Ende nicht die *Hälfte der Wehrte der Erbſchaft* herauskommt, auch wenn für gleich alte Perſonen gerechnet wird. Es kommt die *Hälfte heraus von dem Wehrt einer andern Summe*, nämlich einer ſolchen, die zahlbar iſt, ſobald die *Verbindung zwoer Perſonen* aufhört.

Herr D. *Price* *) zeigte die Unrichtigkeit der *Moivriſchen Auflöſung*, durch die falſchen Folgen, wozu ſie führt. *Es ſey eine Summe beym Tode einer Perſon A zahlbar, unter der Bedingung*, daſs ſie (nicht wie vorher vor einer andern B von gleichem Alter abſterbe) ſondern daſs ſie B *überlebe*, ſo würde nach *Moivre* ihr baarer Wehrt derſelbige ſeyn. Denn es iſt eben ſo wahrſcheinlich, daſs A am längſten lebe von beyden als zuerſt abſterbe. Dieſs iſt aber nicht möglich. In dem erſten Fall iſt das Geld zahlbar, ſobald eine von beyden ſtirbt, es ſey die eine oder die andere; zahlbar, wenn A zuerſt ſtirbt, nicht zahlbar, wenn B erſt ſtirbt. Wird ſie zahlbar, ſo wird ſie es auch alsdenn. In dem letzten Fall bleibt nun zwar das erſte eben ſo. Die Summe wird zahlbar oder nicht, ſobald eine ſtirbt, jenes wenn B, dieſs, wenn A zuerſt ſtirbt; allein ſie wird nicht zahlbar zu der nämlichen Zeit; es ſey denn, daſs A un-

*) *Obſervations on reverſionary Payments*, p. 233. Edit. 3. und p. 326. Edit. 4.

mittelbar nach B ſtirbt; ſie wird es erſt, wenn auch A nach B ſtirbt, das iſt, ſie wird es erſt, wenn der *längſtlebende* von beyden ſtirbt; ſie war es in dem erſten Fall gleich bey der Trennung. Dieſs kann nicht einerley ſeyn. Die letzte Bedingung giebt alſo der Aufgabe eine andere Geſtalt. Sind beyde Perſonen gleich alt, ſo muſs, um den Wehrt der *Anwartſchaft in dem letzten Fall* zu finden, von dem *Grundcapital*, nicht wie vorher die *Verbindungsrente*, ſondern der *Wehrt des längſten Lebens aus zweyen*, abgezogen und der Reſt halbirt werden. Dieſe Aufgabe ſoll noch unten vorkommen.

Dennoch ſcheint es nicht, daſs Herr Dr. *Price* den eigentlichen Grund der Unrichtigkeit in *Moivres* Auflöſung recht gekannt habe. Wenigſtens hat er ihn nicht angegeben, und hat auch ſelbſt keine eigene beſſere Methode gewieſen, ſondern bleibt bey *Simpſons* Vorſchrift. *Simpſon* folgte anfangs dem *Moivre*, entdeckte aber den Fehler, und erfand eine neue Methode, die auch *Morgan* *) annahm, und den gröſsten Theil ſeiner Aufgaben vom Ueberleben darnach auflöſete.

Simpſons Vorſchrift iſt dieſe: *Man ſuche den Wehrt der Verbindungsrente für zwo Perſonen von gleichem Alter, ſo groſs als das der älteſten unter den gegebe*

*) *The Doctrine of Annuities and Aſſurances on Lives and Survivorſhips, by William Morgan.* London 1779.

gegebenen Perſonen. Dieſen Wehrt ziehe man ab von dem Grundcapital und halbire den Reſt. Dann ſuche man zu der mittlern künftigen Lebensdauer der jüngern, und der ältern Perſon, und zu dem letzt gefundenen Reſt die vierte Proportionalzahl. Dieſe iſt der jährliche Zins von der Anwartſchaft, in dem Fall die erwartete Summe beym Tode der jüngern Perſon zahlbar iſt; unter der Bedingung, daſs die ältere jene überlebe. Im entgegengeſetzten Fall aber, wenn es auf den Tod der ältern, und das Ueberleben der jüngern ankommt, muſs zu der gefundenen Zahl noch der Wehrt der Verbindungsrente der gegebenen Perſonen addirt, und dann alles von dem Grundcapital abgezogen werden.

In den obigen gewöhnlichen Zeichen dieſs ausgedruckt, und *m* für die künftige mittlere Lebensdauer der *jüngern* Perſon A, *n* für die der *ältern* Perſon B geſetzt; ſo iſt $\frac{m}{2n}$ $(p - \lambda \overline{b\,b})$ der Wehrt der Anwartſchaft auf *p*, im Fall die Summe beym Tode der jüngern Perſon zahlbar iſt, unter der Bedingung, daſs die *ältere* überlebe; und $p - \lambda \overline{a\,b} - \frac{m}{2n} (p - \lambda \overline{b\,b})$ iſt es, im Fall die jüngere überlebet.

Wenn beyde Perſonen von gleichem Alter ſind, ſo wird der Wehrt $= \frac{1}{2} (p - \lambda \overline{a\,b})$. Dieſs ſtimmt mit §. 18. überein. Allein in andern Fällen kann die Abweichung beträchtlich ſeyn.

Ex. 1. Iſt das Alter der *jüngern* Perſon 30, der *ältern* ihres 40 Jahr, ſo iſt $\lambda \overline{a\,b} = 10,7816$, und $p - \lambda \overline{a\,b} = 25 - 10,7816 = 14,2184$ (nämlich für $r = 1,04$.) Ferner iſt, nach *Süſsmilchs* Tabelle, $m = 28,57$; $n = 22,64$; $\lambda \overline{b\,b} = 9,9484$, und $p - \lambda \overline{b\,b} = 15,0516$. Nun auch $\frac{22,64}{28,57} \cdot 7,5258 = 5,9637$, was mit $\frac{1000}{25}$, oder 40, multiplicirt den Wehrt der Anwartſchaft auf 1000 Rthlr beym Tode der jüngſten Perſon zahlbar, giebt = 238,5 Rthlr. für den Fall, wenn die *ältere* B überlebet. Für den andern Fall wird der Wehrt $14,2184 - 5,9637 = 8,2547$, und $40 \cdot 8,2547 = 330,1$ Rthlr. Die genauen Wehrte ſind 234,9 und 338,8 Rthlr. nach §. 184.

Ex. 2. Iſt die jüngere von 20, und die ältere von 50 Jahren, ſo findet man die Anwartſchaften auf 1000 Rthlr. für das Ueberleben der *älteren* nach *Simpſon*, 167,5 Rthlr., nach der obigen richtigen Berechnung 135,3 Rthlr.; der Unterſchied alſo 32,2 Rthlr. Für das Ueberleben der jüngern giebt *Simpſons* Regel 447 Rthlr., was wieder um 30 Rthlr. unterſchieden iſt. Dieſe Abweichung iſt doch ſchon beträchtlich. Sie wird noch gröſser ſeyn bey Perſonen, deren Alter noch mehr verſchieden iſt.

Indeſſen kann *Simpſons* Auflöſung noch immer als Approximation zugelaſſen werden. Dafür gab er ſie auch nur aus; und daſs ſie das ſey, ſuchte er auch nur durch

durch die Gründe zu zeigen, die er davon angiebt. *) Uebrigens iſt zwar das richtige Verfahren nicht völlig ſo kurz als dieſe Näherung, aber ich meine, der Unterſchied ſey zu erheblich, um in Praxis ſich mit der letztern zu behelfen.

187.

Satz. 52. Wenn eine Summe zahlbar iſt beym Tode einer Perſon von gegebenen Alter a, unter der Bedingung, daſs dieſe eine andere Perſon B vom gegebenen Alter b, überlebe (oder daſs ſie die längſtlebende unter den beyden gegebenen ſey), ſo iſt der baare Wehrt der Anwartſchaft auf jene Summe gleich dem Unterſchied zwiſchen dem Wehrt dieſer Summe als einer Erbſchaft von A betrachtet, und ihrem nach dem nächſt vorhergehenden Satz (in §. 184.) *zu berechnenden Wehrt auf den Tod von A, im Fall A vor B abſtirbt.*

Wenn der Wehrt der Summe 1 beym Tode von A, im Fall A *zuerſt* ſtirbt, *W* heiſset, ſo iſt der Wehrt derſelben Summe im Fall A *zuletzt* ſtirbt

$$= 1 - \frac{\lambda a\, b}{p} - W.$$

Beweis. Es ſoll B todt ſeyn, wenn A *ſtirbt.* Alſo iſt der Wehrt der Summe, die beym Tode von A ſogleich zahlbar iſt, für das *erſte Jahr* $= \frac{(B - \frac{1}{B})\, \Delta\, A}{A\, B}$.

*) In ſeinen angeführten *Exerciſes.* p. 316.

Für das *zweyte Jahr* hat man ihn $= \frac{(B - {}^{2}B)\,\Delta\,{}^{1}A}{A.B.r}$;

für das *n*te, $\frac{(B - {}^{n}B)}{A.B} \cdot \frac{\Delta\,{}^{n-1}A}{r^{n-1}}$ und ſo ferner. Das erſte Jahr wird die Ausgabe nicht *discontirt*, weil ſie gleich im Anfang als baar auszugeben angeſehen werden muſs. (§. 183.) Folglich iſt der geſammte Wehrt aus allen Jahren

$$= \left(\frac{B.\Delta A}{A.B} + \frac{B.\Delta\,{}^{1}A.}{A.B.r} + +\right) - \left(\frac{{}^{1}B.\Delta A}{A.B} + \frac{{}^{2}B\,\Delta\,{}^{1}A}{A.B.r} + +\right)$$

$$= \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta\,{}^{1}A}{A.r} + +\right) - \left(\frac{{}^{1}B\,\Delta A}{A.B} + \frac{{}^{2}B.\Delta\,{}^{1}A}{A.B.r} + +\right).$$

Der erſte Theil iſt der Wehrt der *Erbſchaft* von A (§. 99.) und der letzte der Wehrt der Summe beym Tode A, wenn A vor B ſtirbt (§. 178. 179.)

Ex. Iſt *a* das Alter von A, 30, und *b* das Alter von B, 40 Jahr, die gegebene Summe 1000 Rthlr., ſo iſt der Wehrt der Anwartſchaft beym Tode von A, wenn A *zuerſt* ſtirbt, 234,9 Rthlr. (§. 185.) Der Wehrt der *Erbſchaft* iſt $\left(1 - \frac{15{,}0847}{25}\right) \cdot 1000. = 396{,}6$ Rthlr.; folglich der geſuchte Wehrt für den Fall, wenn A *zuletzt* ſtirbt $= 161{,}7$ Rthlr.

Soll die Summe zahlbar ſeyn beym Tode der *ältern* Perſon B, im Fall dieſe *zuletzt* ſtirbt, ſo iſt der Wehrt der Summe bey ihrem Tode, wenn ſie *zuerſt* ſtirbt (das

Alter

Alter von 40 Jahr geſetzt) 333 Rthlr. (§. 184.) Nun iſt in dieſem Fall der *Wehrt der Erbſchaft*

$$1000\left(1-\frac{\lambda\overline{40}}{p}\right)=\left(1-\frac{13,1565}{25}\right).\ 1000.=473,7.$$

Der Unterſchied alſo, oder der geſuchte Wehrt wenn B *zuletzt* ſtirbt, iſt 139,3 Rthlr.

188.

Zuſatz. Man nehme die beyden Wehrte zuſammen, den von der *Anwartſchaft auf den Tod A, wenn A überlebet*, und den von der *Anwartſchaft auf den Tod B, wenn B überlebet*, ſo bekommt man aus §. 187. und §. 184. den Wehrt

$$1-\frac{\lambda\overline{a}}{p}+1-\frac{\lambda\overline{b}}{p}-\left(1-\frac{\lambda\overline{ab}}{p}\right).$$

$$=1-\frac{\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}-\lambda\overline{ab}}{p}.$$ Aber $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}-\lambda\overline{ab}$ iſt der Wehrt der *Rente auf zwey Leben nach einander*, oder der *Rente auf das längſte Leben*, wie unten gezeiget werden ſoll. Daher iſt die obige Summe der beyden Anwartſchaften ſo groſs als das *Grundcapital*, *weniger der Rente auf das längſte Leben*, multiplicirt mit der zahlbaren Summe, als zinstragendes Capital betrachtet, das iſt mit der zahlbaren Summe durch das Grundcapital dividirt. So iſt es auch der Natur der Sache gemäſs. Denn wer *beyde* Anwartſchaften hat auf die Summe, ſo wohl beym Tode A, wenn A *zuletzt* ſtirbt, als beym Tode B, wenn B *zuletzt* ſtirbt, der bekommt die Summe

gewiſs

gewiss in jedem Fall, *alsdenn*, wenn der *Längstlebende* stirbt, das ist, er bekommt die Erbschaft des *Längstlebenden*, das ist, das Grundcapital weniger der den Zinsen gleichen Leibrente des Längstlebenden. Nach der XXVIII^ten Tabelle ist die Rente des *Längstlebenden* auf zwo Leben nach einander für 30 und 40 Jahre, 17,4596; und $1000.\left(1-\frac{17,4596}{25}\right)=301,6$ Rthlr. das ist, so viel als die Summe von dem Wehrt der Anwartschaft auf 1000 Rthlr. beym Tode der *zuletzt sterbenden* Person, wenn diese die jüngere ist, oder von 161, 7 Rthlr.; und von 139, 9 Rthlr. als dem Wehrt beym Tode der ältern, wenn *diese zuletzt* stirbt.

189.

Satz 53. Der Wehrt des Ueberlebens von A über B, beyde vom gegebenen Alter, welcher oben (§. 127.) durch den Unterschied der *Leibrente* von A, und der *Verbindungsrente beyder*, $(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab})$ ausgedruckt wird, ist auch gleich der Summe

$$\frac{\Delta B}{B}\cdot\lambda\overline{a}+\frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{^{1}A}{A.r}\cdot\lambda\overline{a+1}$$

$$+\frac{\Delta^{2}B}{B}\cdot\frac{^{2}A.}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^{2}}++$$

Beweis. Es ist einerley, ob A, nach dem Tode von B, *jährlich* 1 *lebenswierig*, jedoch am Ende der Termine empfangen, oder alsdenn auf einmal abgefunden werden

werden ſolle; dadurch, daſs ihm der am Ende des Todesjahrs von B fällige Termin, und zugleich der baare Wehrt einer Leibrente auf die übrige Lebenszeit bezahlet wird. Nun iſt die Wahrſcheinlichkeit der Ausgabe im erſten Jahr, $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{{}^{1}A}{A}$; Denn $\Delta B . {}^{1}A$ iſt die *Summe der Paare*, wovon im erſten Jahr eine von B abſtirbt, und eine von A am Leben bleibt, wenn A B die *Anfangszahl der Paare* iſt, (§. 105.) und die Ausgabe ſelbſt $1 + \frac{\lambda \overline{a+1}}{r}$. Daher ihr *baarer Wehrt* $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{{}^{e}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda \overline{a+1}}{r}\right)$. Für das *zweyte* Jahr hat man $\frac{\Delta {}^{1}B}{B} \cdot \frac{{}^{2}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda \overline{a+2}}{r^2}\right)$, und ſo ferner $\frac{\Delta {}^{n}B}{B} \cdot \frac{{}^{n+1}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda \overline{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$, bis entweder $\Delta {}^{n}B$, oder ${}^{n+1}A = 0$ wird.

Aber $\frac{{}^{1}A}{A}\left(\frac{1+\lambda \overline{a+1}}{r}\right) = \lambda \overline{a}$, und

$\frac{{}^{2}A}{A}\left(\frac{1+\lambda \overline{a+2}}{r}\right) = \lambda \overline{a+1}$; und ſo ferner

$\frac{{}^{n+1}A}{{}^{n}A}\left(\frac{1+\lambda \overline{a+n+1}}{r}\right) = \lambda \overline{a+n}$. (§. 69.) Daher wird die Summe $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{{}^{1}A}{A}\left(\frac{1+\lambda \overline{a+1}}{r}\right) +$

$\Delta {}^{1}B$

$$\frac{\Delta^{1}B.\ {}^{2}A}{B.\ A}\cdot\left(\frac{1+\lambda\overline{a+2}}{r^{2}}\right)+\text{+}$$

$$\frac{\Delta^{n}B}{B}\cdot\frac{{}^{n+1}A}{A}\left(\frac{1+\lambda\overline{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)=\frac{\Delta B}{B}\cdot\lambda\overline{a}+$$

$$+\frac{\Delta^{1}B}{B}\cdot\frac{{}^{1}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+1}}{r}+\text{+}\frac{\Delta^{n}B}{B}\cdot\frac{{}^{n}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}}.$$

Dieselbe Summe ist auch $=\lambda\overline{a}-\lambda\overline{a\,b}$. (§. 127.)

190.

Anmerkung. Diese Gleichheit beyder Summen kann auch aus ihnen selbst erwiesen werden. *Zusätze* zu diesem Capitel. *) Ueberhaupt muss es einerley seyn, ob *eine Rente auf Lebenszeit*, *nach und nach* in jährlichen Terminen bezahlt, oder ob statt ihrer alsdenn, wenn die Bedingungen eintreten, unter denen sie das erstemal zahlbar wird, dieser erste Termin, und für die übrigen Termine ihr baarer Wehrt auf einmal erleget werde? Nur verstehet sichs, dass die Bedingungen der Leibrente, wenn sie *einmal* fällig geworden ist, sich nachher in der Folge, so lange der Rentenier lebt, nicht ändern.

*) §. 6.

Dritter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften, die von dreyer Perſonen Leben abhängen.

191.

Anmerkung.

Wenn es auf das Leben dreyer Perſonen ankommt, ſo können die hieher gehörenden Aufgaben unter *folgende* Claſſen gebracht werden.

1) Zur *erſten* gehören ſolche, wo jemand *eine Leibrente* zu erwarten hat, *die von dem Leben oder Tode zweer andern gegebenen Perſonen abhängt*, ohne daſs es dabey auf eine beſtimmte Folge im Sterben der beyden letztern ankomme. Daſs der Expectant der Leibrente am Leben ſeyn müſſe, wenn die Rente fällig wird, verſteht ſich von ſelbſt.

2) Eine andere Art von Aufgaben iſt es, *wenn es eine zahlbare Summe iſt*, oder ein zu erwartendes Vermögen, wobey die Fallzeit vom Leben und Tode *dreyer gegebenen Perſonen* abhängt. Dabey kann auch mehr oder minder eine *gewiſſe Folge des Abſterbens unter ihnen* beſtimmt ſeyn.

3) Wenn der jetzige Werth einer Leibrente für eine gewiſſe Perſon geſucht wird, die nicht bloſs von dem Leben und Tode, ſondern auch von einer *beſtimmten Folge im Sterben bey zwo andern Perſonen* abhängt.

Hier

Herr *Morgan* hat die hieher gehörige Aufgaben alle nach der vorher erwähnten *Simpſoniſchen* Approximation aufgelöſet. Uebrigens iſt er weiter als andere hierin gegangen. Ich will verſuchen dieſe Aufgaben ſo zu ſtellen, daſs man ſie leicht überſehen, und auf ein Paar allgemeine, ſie alle zurück bringen könne. Es wird hierbey vorausgeſetzet, daſs die *Verbindungsrenten für drey Perſonen* gegeben ſind.

192.

Die *drey* Perſonen ſind A, B, C, und ihr Alter *a*, *b*, *c*. Der Exſpectant ſey C, auf den die Leibrente fallen ſoll, ſo kommen bey der erſten Claſſe von Aufgaben folgende verſchiedene Bedingungen und Beſtimmungen vor.

Satz 54. 1) *C ſoll die Leibrente haben, ſo lange A und B beyſammen leben*, (folglich, ſo lange *alle drey* gegebene Perſonen zuſammen leben.)

Alsdenn iſt der Wehrt der Anwartſchaft von C gleich dem Wehrt einer Verbindungsrente auf alle drey Perſonen $= \lambda \overline{a\,b\,c}$.

Dieſs iſt für ſich klar.

193.

Zuſatz 1. Soll die Leibrente des C auf eine beſtimmte Zahl von Jahren, auf *n* Jahren beſchränkt ſeyn; (wenn z. E. zwey Perſonen, ſo lange ſie zuſammen leben,

für

für ein Kind jährlich was bestimmtes geben, so lange, bis dieses zu einem bestimmten Alter gekommen ist), so ist die Leibrente $\lambda\overline{a\,b\,c}$ nur auf n Jahre zu berechnen. Das ist, es muss eine *aufhörende Verbindungsrente* für drey Personen gesucht werden, die durch $\overset{+n}{\frown}\lambda\overline{a\,b\,c}$ (nach der Analogie, wie oben §. 30.) bezeichnet werden kann. Ihr Wehrt wird, wenn anders für *drey* Personen von jedem Alter die *Verbindungsrenten* gegeben sind, leicht gefunden. Es ist nämlich $\overset{+n}{\frown}\lambda\overline{a\,b\,c} = \lambda\overline{a\,b\,c}$

$$- \frac{\overset{n}{\frown}A\ \overset{n}{\frown}B\ \overset{n}{\frown}C}{A.\,B.\,C} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \lambda\overline{(a+n).(b+n).(c+n)}.$$

Das ist: Von dem Wehrt der Verbindungsrente für die drey gegebene Personen wird abgezogen die *Verbindungsrente dreyer anderer*, jede um n Jahre älter, wenn die letztere vorher in dem Verhältniss des Products der Anfangszahlen für das *letztere* Alter zu dem Product derselben für das *gegebene* Alter verkleinert, und überdiess auf die gegebene Zahl von n Jahren zurück discontirt ist.

194.

Zusatz 2. Soll die Leibrente für C auf n Jahre *aufgeschoben* seyn, so ist das letztere nach dem vorhergehenden Zusatz abzuziehende Stück selbst der gesuchte Wehrt. Wird die aufgeschobene Leibrente auch hier nach der Analogie bezeichnet durch $\overset{-n}{\frown}\lambda\overline{a\,b\,c}$, so ist

$$\overset{-n}{\frown}\lambda\overline{a\,b\,c} = \frac{\overset{n}{\frown}A\ \overset{n}{\frown}B\ \overset{n}{\frown}C}{A.\,B.\,C} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \lambda\overline{(a+n).(b+n).(c+n)}.$$

195.

Satz 55. 2) *Der zweyte Fall iſt: C ſoll die Leibrente haben, nur wenn A und B beyde todt ſind. Dann iſt ihr Wehrt gleich der Leibrente von C, wenn die Verbindungsrenten von A und C, und von B und C, davon abgezogen, und die Verbindungsrente aller dreyen dazu addirt wird.*

Es iſt nämlich der geſuchte Wehrt

$$= \left(\frac{A - {}^{1}A}{A} \cdot \frac{B - {}^{1}B}{B} \cdot \frac{{}^{1}C}{Cr} + + \right)$$

$$= \left(\frac{{}^{1}C}{Cr} + + \right) - \left(\frac{{}^{1}B.{}^{1}C}{B.C} \cdot \frac{1}{r} + + \right) - \left(\frac{{}^{1}A.{}^{1}C}{A.C} \frac{1}{r} + + \right)$$

$$+ + \left(\frac{{}^{1}A.{}^{1}B.{}^{1}C}{A.B.C} \cdot \frac{1}{r} + + \right) = \lambda c - \lambda \overline{bc}$$

$$- \lambda \overline{ac} + \lambda \overline{abc}.$$

196.

Zuſatz. Dieſs iſt der *Wehrt des Ueberlebens der Perſon C über zwey andere gegebene A, B.* Auch der Wehrt einer *Wayſenpenſion*, die nach beyder Eltern Tode fällig wird. Soll ſie nur bis auf ein gewiſſes Alter der Kinder gehen, ſo ſind alle Theile, woraus ſie beſtehet, *aufhörende Renten;* ſie hören auf nach dem *Zieljahr.*

Ex. Das Alter des *Vaters* A ſey 50 Jahr, der *Mutter* B, 40 Jahr, und des Kindes C 15 Jahr. Letzteres ſoll

nach

nach dem Tode beyder Eltern eine jährliche Pension 1 haben; so ist $\lambda\overline{15} = 17,6104$, $\lambda\overline{15.40} = 11,6761$, $\lambda\overline{15.50} = 9,8279$, $\lambda\overline{15.40.50.} = 7,9331$. Der Wehrt der Letztern ist nach dem Satz in §. 163. nur durch Näherung gesucht. Also der *Wehrt des Ueberlebens der jüngsten Person* $= 17,6104 + 7,9331 - 11,6761 - 9,8279 = 4,0395$. Soll die Pension von C nur bis zum *25sten Jahr* des Alters gehen, dies noch eingeschlossen, so ist $\lambda\overline{15} = 17,6104$; und die nach zehn Jahren aufhörende Leibrente

$$\overset{+10}{\lambda\overline{15}} = 17,6104 - \frac{466}{511} \cdot 0,6756.\ \lambda\overline{25}$$

$$= 17,6104 - 0,6159.\ 15,987$$

$$= 17,6104 - 9,8464 = 7,7640.$$

Ferner $\lambda\overline{15.40} = 11,6761$, und die nach zehn Jahren aufhörende Verbindungsrente

$$\overset{+10}{\lambda\overline{15.40}} = 11,6761$$

$$- 0,6756. \frac{300.466}{374.511} \cdot \lambda\overline{25.50}$$

$$= 11,6761 - 0,6756.\ 0,7315.\ 9,4564$$

$$= 11,6761 - 4,6733 = 7,0028.$$

Auch $\lambda\overline{15.50} = 9,8279$ und

$$\overset{+10}{\lambda\overline{15.50}} = 9,8279$$

$$- 0,6756. \frac{210}{300} \cdot \frac{466}{511} \cdot 7,5464 = 9,8279$$

$$- 3,2547 = 6,5732.$$

Endlich $\lambda\overline{15.40.50} = \lambda\overline{15.59,6} = 7,9331$, und wenn ſie nur 10 Jahre dauern ſoll, (oder $\overset{+10}{\lambda}\overline{15.40.50}$)

$= 7,9331 - 0,6756.\frac{210.300.466}{300.374.511}.\lambda\overline{25.50.60.}$

$= 7,9331 - 0,6756.0,5121.$

$5,9720 = 7,9331 - 2,0662 = 5,8669.$

Folglich der geſuchte Wehrt $= 7,7640$
$- 7,0028 - 6,5732 + 5,8669 = 0,0549.$

197.

Satz 56. 3) *C ſoll die Leibrente haben, wenn eine der zwo übrigen gegebenen Perſonen A todt iſt, und dann ſo lange die andere B lebet. Alsdenn iſt der Wehrt der Erwartung*

$$= \left(\frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A}.\frac{\overset{1}{-}B}{B}.\frac{\overset{1}{-}C}{C}.\frac{1}{r} + +\right)$$

gleich dem Wehrt der Verbindungsrente von C und der zugleich Lebenden B, wenn davon der Wehrt der Verbindungsrente für alle drey abgezogen wird, oder $= \lambda\overline{bc} - \lambda\overline{abc}$.

Zuſatz 1. Iſt die Bedingung, daſs A mit C fortleben ſoll, B geſtorben ſeyn ſoll, ſo iſt der geſuchte Wehrt $= \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{abc}$.

Zuſatz 2. Soll alſo überhaupt C eine Leibrente genieſsen, ſo lange *einer von beyden*, A *oder* B, *mit* C *fortlebet*, nachdem die andere tod iſt, ſo iſt der Wehrt der Erwartung $= \lambda\overline{bc} + \lambda\overline{ac} - 2\lambda\overline{abc}$.

198.

Satz 57. 4) Der vierte Fall ist, wenn C die Leibrente haben soll, so lange noch Eine Person von den beyden übrigen lebt, es sey welche es wolle. Alsdenn ist der Wehrt der Erwartung W

$$= \left(\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{1}B}{B} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{r}{r} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{{}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{r}{r} + +\right) + \left(\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.B.C.r} + +\right)$$

$= \lambda\,\overline{a\,c} + \lambda\,\overline{b\,c} - \lambda\,\overline{a\,b\,c}$. In diesem Fall bekommt C nicht nur das, was in dem *Zusatz* 2. (§. 197.) gefunden ist, sondern auch noch die Rente so lange alle drey zusammen leben.

199.

Satz 58. Endlich fünftens, C soll die Leibrente haben, sobald einer von den beyden A oder B todt ist, und dann ohne weitere Bedingung. Alsdenn ist der gesuchte Wehrt

$$= \left(\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{r}{r} + +\right) +$$

$$+ \left(\frac{(A - {}^{1}A).{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.B} \frac{r}{C\,r} + +\right) + \left(\frac{(B - {}^{1}B)\,{}^{1}A\,{}^{1}C}{B\quad A\quad C} \frac{r}{r} + +\right)$$

= den Wehrten aus §. 195. und aus §. 197. *Zusatz* 2. zusammen, $= \lambda\,\overline{c} - \lambda\,\overline{a\,b\,c}$.

200.

Anmerkung. Dieſe beygebrachten Fälle ſind die *einfachen*, welche zu der erſten Claſſe gehören, alle. Daraus laſſen ſich die zuſammengeſetztern auflöſen. Einige von den letztern, die zu den Tontinen gehören, kommen noch in dem nächſt folgenden Capitel vor.

Die *zwote Claſſe von Fällen* enthält ſolche, wo eine Summe 1, als eine *Erbſchaft*, beym Abſterben Einer der drey gegebenen Perſonen zahlbar iſt, unter der Bedingung, daſs dieſe Perſonen in einer *gewiſſen Ordnung* wegſterben. Wenn der Erblaſſer ſtirbt, können 1) die andern *beyde noch am Leben ſeyn*, das iſt, *der Erblaſſer* ſoll *zuerſt* ſterben unter den dreyen. 2) Eine von den beyden andern kann todt, die zwote am Leben ſeyn, das iſt, der *Erblaſſer kann der zweyte im Sterben ſeyn* unter den dreyen. Endlich beyde auſser dem Erblaſſer können vorher todt ſeyn, wenn jener ſtirbt, das iſt, der *Erblaſſer ſoll der dritte im Sterben ſeyn.*

Bey dem *zweyten* und *dritten* Fall können wiederum Verſchiedenheiten ſtatt finden. Bey dem *zweyten* iſt es entweder *gleich viel*, welcher von den beyden andern *vor*, und welcher *nach* dem Erblaſſer abgehe; oder iſt auch *inſonderheit* beſtimmt, welche von jenen zuerſt ſterben ſoll. Bey dem *dritten* Fall kann es gleichgültig ſeyn, welche von *den* beyden *vor dem Erblaſſer geſtorbenen*, die *erſte* geweſen ſey, und welche die *zwote;* oder

oder *es wird insonderheit bestimmt, welche zuerst gestorben seyn solle.*

Alle hieher gehörigen Aufgaben kommen auf zwo Sätze an, ausser denen, die bey den vorhergehenden schon gebraucht sind. Damit reicht man denn auch aus bey der dritten Classe der Aufgaben. Da aber auch bey der *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens*, und *des Sterbens in einer gewissen Ordnung*, ähnliche Aufgaben vorkommen, wie bey der zu suchenden Anwartschaft, so will ich die hieher gehörigen Sätze gleichfalls beybringen.

201.

Satz 59. Die Wahrscheinlichkeit, dass von dreyen Personen, A, B, C vom Alter a, b, c, die letztere C, es sey die älteste, oder eine andere, zuerst sterbe (so nämlich, dass A und B am Ende des Jahrs, in dessen Lauf C stirbt, noch am Leben sind) wird gegeben durch

$$\left(\frac{{}^{1}\!A\,{}^{1}\!B.\,C}{A.B.C}+\frac{{}^{2}\!A\,{}^{2}\!B.\,{}^{1}\!C}{A.B.C}++\right)-\left(\frac{{}^{1}\!A\,{}^{1}\!B\,{}^{1}\!C}{A.B.C}++\right)$$

das ist, durch den Rest, wenn von der Verbindungsdauer von A und B mit einer dritten, welche um ein Jahr jünger ist als C, vergrössert in dem Verhältniss der Zahl der Lebenden für dieses jüngere Alter zu der Zahl derselben für das Alter von C, die Verbindungsdauer der gegebenen dreyen abgezogen wird.

Beweis. Es iſt nämlich die geſuchte *Wahrſcheinlichkeit* die Summe

$$\frac{{}^{1}A.\,{}^{-1}B.\,\Delta\,C}{A.\,B.\,C} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{-2}B.\,\Delta\,{}^{-1}C}{A.\,B.\,C} + + = \frac{{}^{1}A.\,{}^{-1}B.\,C}{A.\,B.\,C}$$

$$- \frac{{}^{1}A.\,{}^{-1}B.\,{}^{-1}C}{A.\,B.\,C} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{-2}B.\,{}^{-1}C}{A.\,B.\,C} - \frac{{}^{2}A.\,{}^{-2}B.\,{}^{-2}C}{A.\,B.\,C} + \equiv$$

$$= \frac{{}^{-1}C}{C} \cdot C\overline{a.\,b.\,(c-1)} - C\overline{a.\,b.\,c.}$$

202.

Zuſatz 1. Wenn auch die Fälle mitgerechnet werden ſollen, wo C mit B, oder mit A, oder mit allen beyden in demſelben Jahre ſtirbt, aber doch zuerſt, das iſt, wenn von der Wahrſcheinlichkeit des Vorſterbens des C überhaupt die Rede iſt, ſo iſt ſolche

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,\frac{{}^{-1}A}{A}\left(\frac{{}^{-1}C}{C} \cdot C\overline{(a-1)b.(c-1)} - C\overline{(a-1)b.c.}\right)$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{{}^{-1}B}{B} \cdot \left(\frac{{}^{-1}C}{C} \cdot C\overline{a.(b-1).(c-1)} - C\overline{a.(b-1).c}\right)$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{{}^{-1}A.\,{}^{-1}B}{A.\,B} \cdot C\overline{(a-1)(b-1).c} - \frac{{}^{-1}C}{C} \cdot C\overline{a.\,b.\,(c-1)}\right)$$

Den Beweis hiervon habe ich, weil er etwas weitläuftig iſt, in die *Zuſätze* gebracht. *)

203.

*) §. 7.

203.

Zusatz 2. Sind alle drey Personen von gleichem Alter, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{3}$. Die übrigen Theile der Formel heben sich in diesem Fall auf.

Anmerkung. *Simpson* und *Morgan* haben sich durchgehends hierbey der *Hypothese vom gleichförmigen Sterben bedienet.* Die Abweichung von den wahren Wehrten, die daraus entsteht, mag in den meisten Fällen nicht sehr beträchtlich seyn, zumal wenn man für die *Altersergänzungen* nach *Simpsons* Methode die *doppelte mittlere Lebensdauer* nimmt. Sind α, β, γ diese *Ergänzungen;* so sey noch n die kleinste von ihnen, unbestimmt, welche es sey. Alsdenn wird die Gröfse der hier gesuchten *Wahrscheinlichkeit* (W), *dass C zuerst sterbe*, seyn $= \frac{n}{\gamma}\left(1 - \frac{n}{2\alpha} - \frac{n}{2\beta} + \frac{n^2}{3\alpha\beta}\right)$. Siehe *Zusätze.* *)

Sind α, β, γ gleich, so ist $W = \frac{1}{3}$. Ist $\alpha = \beta = n$, so ist $W = \frac{n}{3\gamma}$.

204.

Satz 60. Die Wahrscheinlichkeit, dass C unter drey gegebenen Personen am längsten lebe, (oder der dritte im Sterben sey) ist die Wahrscheinlichkeit, dass C sterbe, wenn beyde A und B todt sind. Diese ist $\frac{\Delta C}{C}$.

*) §. 3.

$$\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{(A-{}^{1}A)(B-{}^{1}B)}{A\quad B}++=S.\frac{\Delta C}{C}-S.\frac{\Delta C.{}^{1}A}{C.A}$$

$$-S.\frac{\Delta C.{}^{1}B}{C.B}+S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{{}^{1}A}{A}\cdot\frac{{}^{1}B}{B},=1$$

weniger den beyden Wahrscheinlichkeiten, daſs C *vor* A, und daſs C *vor* B ſterbe (§. 168.), wenn wiederum die Wahrſcheinlichkeit, daſs C zuerſt ſtirbt (§. 201.) dazu addirt wird.

205.

Satz 61. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs C der zweete im Sterben ſey, iſt ſo groſs als die beyden Wahrſcheinlichkeiten, daſs A todt ſey, und B noch lebe, wenn C ſtirbt, zuſammen genommen.

Die *erſte* von dieſen beyden Wahrſcheinlichkeiten iſt

$$S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{(A-{}^{1}A)}{A}\cdot\frac{{}^{1}B}{B}=S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{{}^{1}B}{B}$$

$$-S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{{}^{1}A}{A}\cdot\frac{{}^{1}B}{B};$$ das iſt, *die Wahrſcheinlichkeit, daſs C vor B ſterbe* (§. 168.) *weniger der Wahrſcheinlichkeit, daſs C zuerſt aus dreyen ſtirbt.* (§. 201.)

Die zwote iſt $=\frac{S.\Delta C}{C}\cdot\frac{{}^{1}A}{A}\cdot\frac{(B-{}^{1}B)}{B}.$

$$=\frac{S.\Delta C.{}^{1}A}{C.A}-\frac{S.\Delta C}{C}\cdot\frac{{}^{1}A.{}^{1}B}{A.B}.$$ das iſt, die *Wahrſcheinlichkeit, daſs C ſterbe vor A, weniger der, daſs C zuerſt aus dreyen ſtirbt.*

Beyde

Beyde zusammen machen

$$S.\frac{\Delta C}{C}.\frac{\overline{-1}A}{A} + S.\frac{\Delta C}{C}.\frac{\overline{-1}B}{B}$$

$$- 2\,S.\frac{\Delta C}{C}.\frac{\overline{-1}A}{A}.\frac{\overline{-1}B}{B}.$$

206.

Zusatz. Nimmt man die *Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens* von A über C, und von B über C, nach *Satz 49.* §. 177, so wie sie angenommen werden müssen, wenn die Fälle des Zugleichsterbens wegfallen sollen, und eben so die *Wahrscheinlichkeit des Zuerststerbens* nach §. 217, so bekommt man auch die Wahrscheinlichkeiten in §. 204. und §. 205. auf dieselbe Art, und in demselben Sinn.

207.

Satz 62. Der baare Werth einer bey dem Absterben einer Person C zahlbaren Summe, im Fall selbige stirbt vor zwo andern A und B, ist

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right) + \frac{r}{6}.\frac{\overline{-1}A}{A}\left(\frac{\overline{-1}C}{C}.\lambda\overline{(a-1)b(c-1)}.\right.$$

$$\left. - \lambda\overline{(a-1)b.c.}\right) + \frac{r}{6}.\frac{\overline{-1}B}{B}.\left(\frac{\overline{-1}C}{C}\lambda\overline{.a.(b-1).(c-1)}.\right.$$

$$\left. - \lambda\overline{a.(b-1).c.}\right) - \frac{r}{3}.\left(\frac{\overline{-1}A}{A}.\frac{\overline{-1}B}{B}.\lambda\overline{(a-1)(b-1).c.}\right.$$

$$\left. - \frac{\overline{-1}C}{C}.\lambda\overline{a.b.(c-1)}\right).$$

208.

Anmerkung. Die Formel iſt der im §. 202. ähnlich, nur daſs hier *Verbindungsrenten* gebraucht werden ſtatt der *Dauer* vorher, wo denn jede derſelben mit r noch zu multipliciren iſt, weil die für das *erſte* Jahr zahlbare Summe, als gleich im Anfang fällig anzuſehen, und daher nicht diſcontirt werden darf. Ferner kommt an ſtatt $\frac{2}{3}$tel, hier $\frac{1}{3}\left(1-\frac{\lambda^{\overline{abc}}}{p}\right)$ das iſt $\frac{1}{3}$tel *des Wehrts einer bey dem Aufhören der Coexiſtenz von dreyen zahlbaren Summe.* Dieſs läſst ſich ſo ſchon überſehen, ich habe es aber in den *Zuſätzen* *) deutlicher gezeigt.

209.

Zuſatz 1. Iſt $a=b=c$, ſo iſt dieſer Wehrt, (er ſey W) $=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\lambda^{\overline{abc}}}{p}\right)$.

Zuſatz 2. Wenn das Alter auch nicht gleich iſt, man nimmt aber die *drey* Anwartſchaften zuſammen für den Fall, daſs C die erſte im Sterben ſey, und für die beyden andern, daſs A es ſey, und daſs B es ſey, ſo wird die Summe dieſer drey Wehrte $=1-\frac{\lambda^{\overline{abc}}}{p}$, das iſt dem *Wehrt der Summe 1, die bey der Trennung, es ſterbe zuerſt, welche man will, zahlbar iſt.* So lehrt es auch ohne Rechnung die Natur der Sache, womit die gegebenen Formeln übereinſtimmen, wie in den *Zuſätzen* der letzt angeführten Stelle ebenfalls erwieſen iſt.

Zuſatz

*) §. 9. 10.

Zusatz 3. Wird nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben gerechnet, so wird $w' = \frac{1}{\gamma} \lambda . \overline{a\,b}$; $\lambda \overline{a\,b}$ für die Verbindungsrente nach *augenblicklichen* Renten genommen. Nur im Fall γ kleiner ist als α, und als β, das ist, im Fall die Person C die *älteste* ist unter den dreyen gegebenen, darf von $\lambda \overline{a\,b}$ nicht mehr genommen werden, als der Theil, der auf γ Jahre geht. Ist das Alter aller dreyen gleich, so ist wiederum $w' = \frac{1}{\gamma} \lambda \overline{c\,c} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda \overline{c\,c\,c}}{\ldots B}\right)$. Siehe *Zusätze* 1).

210.

Anmerkung 1. Es giebt einige Aufgaben, wozu nöthig ist, die *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens* Eines von zweyen, welche in der Reihe $\frac{{}^{1}B.\Delta\,{}^{1}A}{A.B} + \frac{{}^{2}B.\Delta\,{}^{1}A}{A.} + +$ enthalten ist, *für jedes Jahr insonderheit* zu suchen. Die Zähler dieser Theile einzeln genommen drucken die Zahl der Fälle aus, worin A am Leben bleibt, wenn B abgeht, und die Brüche selbst die *Wahrscheinlichkeit*, dass das Vorsterben von B in *dem einzelnen Jahre* erfolge. Daraus ist klar, dass wenn man diese Theile von zweyen, dreyen, und so ferner mehrern Jahren zusammen nimmt, so hat man die Wahrscheinlichkeit, dass A, B überlebe in den zwey, drey, und so ferner, Jahren. Diess ist denn

*) §. 11.

denn auch zugleich die *Wahrſcheinlichkeit, daſs unter den in ſo vielen Jahren erfolgten Trennungen, diejenige geweſen ſey, bey der A übrig blieb, als B abgieng.* Denn die Summe der Zähler dieſer Brüche, die einen gemeinſchaftlichen Nenner haben, drückt die Summe dieſer Claſſe von Trennungen aus, welche bis dahin erfolget ſind. Man hat alſo auch in dieſen Summen von Brüchen die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A, B überlebet habe nach Ablauf ſo vieler Jahre, für welche man die Theile zuſammen nimmt.* So iſt $\frac{-^{1}A.\Delta B}{A.B}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs B vor A geſtorben ſey im *erſten* Jahr; $\frac{-^{1}A.\Delta B}{A.B} + \frac{-^{2}A.\Delta -^{1}B}{A.B}$ iſt ſie, daſs dieſs in den *beyden erſten Jahren* geſchehen ſey, und ſo weiter $\frac{-^{1}A.\Delta B}{A.B} + \frac{-^{2}A.\Delta -^{1}B}{A.B} + + \frac{-^{n}A.\Delta -^{n-1}B}{A.B}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs A nach n Jahren B überlebet habe.

211.

Anmerkung 2. Die Reihe, welche in jedem einzelnen Gliede die Wahrſcheinlichkeit ausdrückt, daſs in ſo viel Jahren, als der numerus termini iſt, A, B überlebet habe, iſt, wenn man die Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben vorausſetzt, folgende:

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta} + \frac{2}{\beta} - \frac{2^2}{2\alpha\beta} + \frac{3}{\beta} - \frac{3^2}{2\alpha\beta} + +,$$ wovon

der

der Terminus generalis für das *n*te Glied $= \frac{n}{\beta} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}$ ist. Hier sind wiederum α, β, die *Altersergänzungen*.

Der Beweis steht in den *Zusätzen* *), ist aber ohne dieſs leicht zu übersehen. Nach der erwähnten Hypothese ist die Reihe, welche die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A über B ausdruckt, wenn man auf ganze Jahre rechnet,

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha-2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha-3}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} + + +$$

Hiezu kommt aber noch für jedes Jahr $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\beta}$, nämlich die Hälfte von der Wahrscheinlichkeit, daſs beyde in demselben Jahre absterben. Folglich wird die gesuchte Reihe

$$= \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta} + \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2\alpha\beta} + \frac{1}{\beta} - \frac{5}{2\alpha\beta} + + +$$

Da nun die Summe der ungeraden Zahlen jedesmal den Quadraten der natürlichen Zahlen gleich ist, $1+3=2^2$; $1+3+5=3^2$ u.s.f. so wird die Reihe, welche die Summe von jenen Gliedern enthält, folgende:

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \left(\frac{2}{\beta} - \frac{2^2}{2\alpha\beta}\right) + \left(\frac{3}{\beta} - \frac{3^2}{2\alpha\beta}\right) + +$$

$$\left(\frac{n}{\beta} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}\right).$$ Das letzte Glied in dieſer summatorischen Reihe ist, wo *n* der *kleinſten Altersergänzung*, sie sey α oder β, gleich wird. Es ist also entweder $\frac{\alpha}{2\beta}$, oder $1 - \frac{\beta}{2\alpha}$; jenes, wenn $n = \alpha$, dieſs wenn $n = \beta$ ist; und $= \frac{1}{2}$, wenn $\alpha = \beta = n$ ist.

112.

*) §. 2.

212.

Anmerkung 3. In der Aufgabe, wo man dieſe Summe gebraucht, würde die Rechnung zu weitläuftig werden, wenn man die Decremente genau aus den Tabellen nehmen wollte. *Simpſon* und *Morgan* gebrauchen hier die Hypotheſe. Der *Terminus generalis* in §. 211. wird $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{{}^{n}A}{A} - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}A \cdot {}^{n}B}{A.B}\right)$ wenn $\frac{{}^{n}B}{B}$ für $\frac{\beta - n}{\beta}$, und $\frac{{}^{n}A}{A}$ für $\frac{\alpha - n}{\alpha}$ geſetzet wird. Dieſen Ausdruck durch die *Zahlen der Lebenden* habe ich in der Folge gebraucht. Für die Wahrſcheinlichkeit, daſs B überlebet habe, bekommt man ihn $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}A}{A} + \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}A \cdot {}^{n}B}{A.B}\right)$. Suchet man den genauen Wehrt, ſo läſst ſich ſolcher durch die Coexiſtenzen für zwo Perſonen angeben.*)

Mittelſt dieſer Sätze können nun alle Aufgaben der zwoten und dritten Claſſe (§. 191.), die vom Ueberleben unter drey Perſonen abhangen, ihre Auflöſung erhalten. Ich will ſolche nur kurz anzeigen.

213.

Satz 63. 1) *Eine Summe 1 iſt zahlbar bey dem Tode einer Perſon A, wenn dieſe zuerſt ſtirbt unter dreyen,* A, B, C. Das Alter der Perſonen *a, b, c* iſt gegeben.

In

*) *Zuſätze* §. 12.

In diesem Falle hat man die Summe

$$\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}B}{B}\cdot\frac{{}^{1}C}{C}+\frac{\Delta\,{}^{1}A}{A}\cdot\frac{{}^{2}B}{B}\cdot\frac{{}^{2}C}{C}\,\frac{1}{r}++$$

zu suchen. Sie wird gefunden nach dem 7ten Satz §. 207.

Zusatz. Zu diesem Wehrt die zwey andern zugelegt für die Fälle, dafs B und C die ersten im Sterben sind, so bekommt man $1-\frac{\lambda\overline{abc}}{p}$. *Zusatz* 2. §. 209. das ist man findet überhaupt den Wehrt einer Anwartschaft auf eine alsdenn zahlbare Summe, wenn von drey Personen eine abgeht, es sey, welche es wolle.

214.

Satz 64. a) *Der Erblasser A soll der zweyte in der Ordnung des Sterbens seyn, und insonderheit B soll vor ihm sterben, C ihn überleben.*

Alsdenn ist folgende Summe zu suchen

$$\frac{B-{}^{1}B}{B}\cdot\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}C}{C}+\frac{B-{}^{2}B}{B}\cdot\frac{\Delta\,{}^{1}A}{A}\cdot\frac{{}^{2}C}{C}\,\frac{1}{r}++$$

$$=\left(\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}C}{C}+\frac{\Delta\,{}^{1}A}{A}\cdot\frac{{}^{2}C}{C}\,\frac{1}{r}+{}^{?}+\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}B}{B}\cdot\frac{{}^{1}C}{C}+\frac{\Delta\,{}^{1}A.\,{}^{2}B.\,{}^{2}C}{A.\,B.\,C}\,\frac{1}{r}++\right)$$

Die *erste* Summe ist der Wehrt der Anwartschaft 1

beym Tode des A im Fall C überlebet. (§. 187.) Die zwote iſt die Anwartſchaft auf die Summe, wenn B und C beyde überleben. Wiederum nach dem 62ſten Satz. §. 207.

215.

Zuſatz 1. Sind A, B, C am Alter gleich, ſo wird die geſuchte Summe $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p}\right)$, $- \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}\right)$. Iſt es *nicht beſtimmt*, daſs B inſonderheit vor A abſterben ſoll, ſondern iſt es genug, wenn nur eine von beyden, B oder C, vorher ſtirbt und die andere überlebt, ſo muſs auf dieſelbe Art, wie vorher, der Wehrt der Anwartſchaft für den Fall gefunden werden, wenn C zuerſt ſtirbt, und B zuletzt. Dieſen Wehrt zu den vorhergefundenen addirt, giebt den geſuchten Wehrt, der, wie die Natur der Sache es mit ſich bringt, ſo groſs ſeyn muſs als jene beyde zuſammen genommen.

Zuſatz 2. Sind wiederum die Perſonen gleich alt, ſo hat man

$$1 - \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p} - \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p} + \frac{2}{3}\frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}$$

216.

Zuſatz 3. Der Wehrt der Anwartſchaft, wenn die Summe zahlbar iſt bey dem Tode der zwoten im Sterben

aus

aus dreyen, welche auch diese zwote sey, ist so gross als die Summe der Wehrte zusammen, die man für die bestimmten Fälle findet, in denen jede von den dreyen als die zwote angenommen wird, und in jedem dieser Fälle ist der Wehrt so gross als zwey andere Wehrte für die beyden möglichen Verschiedenheiten, dass, wenn eine, z. B. A die *zwote* ist, jede von den beyden andern B oder C die *erste*, auch die *dritte* seyn kann. Der gesammte Wehrt auf den Tod zwoer aus dreyen überhaupt ist, $= 1 - \frac{\lambda\,ab}{p} - \frac{\lambda\,ac}{p} - \frac{\lambda\,bc}{p} + \frac{2\,\lambda\,abc}{p}$.

Das Alter der Personen mag gleich oder ungleich seyn. Siehe *Zusätze* *)

217.

Satz 64. Der Erblasser A soll zuletzt abgehen, wenn B und C beyde todt sind, ohne dass eine gewisse Ordnung im Sterben unter diesen beyden bedungen werde.

Die zu suchende Summe ist alsdenn

$$= \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{(C - {}^{1}C)}{C}$$

$$+ \frac{1}{1} \cdot \frac{\Delta\,{}^{1}A}{A} \cdot \frac{(B - {}^{2}B)}{B} \cdot \frac{(C - {}^{2}C)}{C} + +$$

gleich folgenden Summen

$$\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{1}{r} + +\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{^{1}C}{C} + \frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{^{2}C}{C}\cdot\frac{1}{r} + +\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{^{1}B}{B} + \frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{^{2}B}{B}\cdot\frac{1}{r} + +\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{^{1}B}{B}\cdot\frac{^{1}C}{C} + \frac{\Delta^{1}A}{A}\cdot\frac{^{2}B}{B}\cdot\frac{^{2}C}{C}\cdot\frac{1}{r} + +\right)$$

Die *erſte* Summe iſt der Wehrt der Erbſchaft auf den Tod des A (§. 98.), die *zwote* der Wehrt der Anwartſchaft auf 1 beym Tode des A, wenn C, A überlebet, und die *dritte* für den Fall, wenn B, A überlebet, (§. 187.)

Die *vierte* iſt die Anwartſchaft auf den Fall, wenn A vor B und C ſtirbt. (§. 207.)

218.

Zuſatz 1. Sind A, B, C von gleichem Alter, ſo wird dieſe Summe

$$= 1 - \frac{\lambda_{a}}{p} - \left(1 - \frac{\lambda_{ab}}{p}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{abc}}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\lambda_{a}}{p} + \frac{\lambda_{ab}}{p} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda_{abc}}{p}.$$

Zuſatz 2. Und wenn dieſe Wehrte für alle drey Perſonen, jede als die letzte angenommen, addirt werden, ſo hat man $1 - 3\frac{\lambda_{a}}{p} + 3\frac{\lambda_{ab}}{p} - \frac{\lambda_{abc}}{p}$.

das iſt *der Wehrt der Anwartſchaft, wenn die Summe überhaupt*

überhaupt bey dem Tode des letztern im Sterben, das ist, bey dem gänzlichen Aussterben der drey verbundenen Personen, *zahlbar ist.*

Zusatz 3. Dieser letzte Wehrt kommt auch heraus, wenn die Personen am Alter ungleich sind. Alsdenn wird

$$\text{er} = 1 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right) + \left(\frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}}{p}\right) - \frac{\lambda\overrightarrow{abc}}{p}.$$

Siehe *Zusätze.* *)

219.

Satz 65. Es sey die Summe 1 zahlbar beym Tode von A, unter der Bedingung, dass beyde B und C todt und C vor B gestorben sey. Das Alter der Personen ist gegeben. Wie gros ist der baare Wehrt der Anwartschaft auf diese Summe?

1) Man suche den Wehrt der Summe für den Fall, dass A der *Längstlebende* sey, ohne Rücksicht auf die Ordnung, in der B und C gestorben sind (nach dem vorhergehenden 64sten Satz §. 217.) und nehme davon die Hälfte. *Diese Hälfte ist der gesuchte Wehrt, wenn A die älteste unter den dreyen ist, und die Hypothese vom gleichförmigen Absterben zum Grunde gelegt wird. Dieß ist sie auch ausser der Hypothese, wenn B und C am Alter gleich sind.*

2) Ist A *nicht die älteste*, so sind entweder B und C von gleichem Alter, oder nicht. In jenem Fall ist der

*) §. 14.

nach n. 1. gefundene Wehrt gleichfalls einerley mit dem, welchen man ſucht.

3) Sind β und γ, die *Alterserganzungen* von B und C, *verſchieden*, A nicht die älteſte Perſon, ſo iſt *entweder* zu dem nach n. 1. gefundenen Wehrt *hinzuzulegen*, die Hälfte von dem Wehrt einer beym Tode einer Perſon, die γ Jahre älter iſt, als A, zahlbaren Summe 1 unter der Bedingung, daſs noch eine andere, welche um γ Jahre älter iſt als B, vor jener geſtorben ſey, vermindert im Verhältniſs des Products der Lebenden in dem um γ vergrößerten Alter zu dieſem Product für das gegebene Alter, und dann auf $\gamma - 1$ Jahre zurück diſcontirt. Das iſt, es iſt *zuzulegen*

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{r^{\gamma+1}}\cdot\frac{{}^{\gamma}D_B}{D_B}\,\frac{{}^{\gamma}D_A}{D_A}\cdot\left(\frac{{}^{\gamma}D_B-{}^{\gamma+1}D_B}{{}^{\gamma}D_B}\cdot\frac{\Delta\,{}^{\gamma}D_A}{{}^{\gamma}D_A}+\right.$$

$$\left.\frac{({}^{\gamma}D_B-{}^{\gamma+2}D_B)}{{}^{\gamma}D_B}\cdot\frac{\Delta\,{}^{\gamma+1}D_A}{{}^{\gamma}D_A}\,\frac{1}{r}++\right)$$

Oder es muſs dagegen *abgezogen werden* der halbe Wehrt einer beym Tode einer Perſon, welche um β Jahre älter iſt als A, zahlbaren Summe 1 für den Fall, wenn eine andere, welche β Jahre älter iſt als C, vor jener geſtorben iſt; vermindert in dem Verhältniſs des Products der Lebenden in dem um β Jahre erhöheten Alter zu dieſem Product für die gegebenen Leben und

auf

auf $\beta - 1$ Jahre zurück discontirt. Das ist, man muss *abziehen*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{\beta-1}} \cdot \frac{{}^{\beta}C \cdot {}^{\beta}A}{C \cdot A} \left(\frac{{}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C}{{}^{\beta}C} \cdot \frac{\Delta\, {}^{\beta}A}{{}^{\beta}A} + \frac{{}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C}{{}^{\beta}C} \cdot \frac{\Delta\, {}^{\beta+1}A}{{}^{\beta}A\, r} + + \right)$$

220.

Zusatz. Wenn die beyden Altersergänzungen β und γ *gleich* sind, so fallen beyde Stücke, das zuzulegende und das abzuziehende weg. Eben so, wenn A die *älteste* Person ist, in welchem Fall ${}^{\beta}A$ und ${}^{\gamma}A = 0$ sind. Sind aber β und γ *ungleich*, so ist doch nur Eins von jenen beyden Stücken etwas, und jedesmal das andere $= 0$. Ist $\beta > \gamma$, so ist ${}^{\beta}C = 0$, und ist $\gamma > \beta$, so ist ${}^{\gamma}B = 0$. Daher Eins von beyden auch nur erfordert werden kann.

Den Beweis siehe in den *Zusätzen*. *)

221.

Anmerkung. Diese Auflösung ist nur eine Annäherung, weil sie die Hypothese vom gleichförmigen Absterben vorausfetzet. Sie erfordert, dass man die Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebethaben für jede einzelne Jahre durch Summirung suche nach dem Ausdruck in §. 211.

*) §. 15. 16. 17. 18.

Man könnte auch hier verleitet werden, eine ähnliche fehlerhafte Auflöſung, wie die *Moivriſche* oben war, (§. 186.) anzubringen. Wenn zuförderſt der Wehrt der Anwartſchaft berechnet iſt auf eine Summe, die bey dem Tode der längſtlebenden A zahlbar iſt, und man nun dieſe multipliciren wollte in die Wahrſcheinlichkeit, daſs von den *vor A abgeſtorbenen*, B und C, die erſtere B die letztere C überlebet habe, ſo würde dieſs Verfahren unrichtig ſeyn, aus dem nämlichen Grunde, der oben §. 186. angeführet iſt.

222.

Nun das letzte Problem, was zu der dritten Claſſe gehört. §. 191.

Satz 66. Eine Perſon A von gegebenen Alter ſoll eine Leibrente 1 empfangen, nach dem Tode einer andern B, unter der Bedingung, daſs die letztere B eine dritte C überlebet habe. Der erſte Termin der Leibrente fällt am Ende des Sterbejahrs von B. Der baare Wehrt der erwähnten Leibrente von A, wenn man, wie vorher, von der Hypotheſe des gleichförmigen Abſterbens Gebrauch macht, wird auf folgende Art gefunden:

1) „Man ſuche die Hälfte des Wehrts der Leibrente „A nach dem Tode der beyden andern Perſonen B und C, „nach dem 55ſten Satz in §. 195;

„$= \frac{1}{2}(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} - \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{abc})$.

2) „Hier-

2) „Hierzu werde *entweder addirt* der *halbe Wehrt* „*des Ueberlebens* einer Person vom Alter $a+\gamma$ über eine „andere vom Alter $b+\gamma$, vermindert in dem Verhält„nifs des Products der Lebenden in dem Alter $a+\gamma$ und „$b+\gamma$, zu diesem Product in dem Alter a und b, dis„contirt auf γ Jahre. Das ist, es werde *addirt*

„$\frac{1}{2}\frac{1}{r^{\gamma}}\frac{{}^{\gamma}A.{}^{\gamma}B}{A.B}\cdot(\lambda\overline{a+\gamma}) - \lambda\overline{(a+\gamma).(b+\gamma)}$. Es „ist a, b, c das gegebene *Alter*; α, β, γ sind die *Alters*„*ergänzungen*.

3) „*Oder es werde davon abgezogen* die Hälfte *des* „*Wehrts des Ueberlebens* einer Person vom Alter $a+\beta$, „über eine andere vom Alter $c+\beta$, vermindert in dem „Verhältnifs des Products der Lebenden, aus den Jahren „$(a+\beta)$, $(c+\beta)$, zu dem Product aus den Jahren a, „und c; und denn auf β Jahre zurück discontirt. Das „ist es werde abgezogen

$$\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{r^{\beta}}\cdot\frac{{}^{\beta}A{}^{\beta}C}{A.C}\right\}(\lambda\overline{(a+\beta)} - \lambda\overline{(a+\beta)(c+\beta)})$$

Siehe *Zusätze.* *)

*) §. 21.

Zusätze
zum vierten Capitel,
Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartschaften.

I.

Zu §. 169.

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dafs A, B überlebe, oder $S.\frac{A\Delta B}{A.B}$, blofs auf *ganze* Jahre berechnet wird, so enthält sie die Bedingung, dafs A noch das Ende des Jahrs erlebe, während dessen B gestorben ist, und ist

$= \frac{\frac{1}{B}}{B} \cdot C.a.(b-1) - C\overline{a\,b}$. (Cap. IV. §. 172.)

Soll aber jene auf *Augenblicke* berechnet werden, so findet man die noch hinzuzulegende Correction auf folgende Art.

Man theile das Jahr in n Momente und setze den augenblicklichen Abgang von B gleich $\frac{\Delta B}{n}$, und von $A = \frac{\Delta A}{n}$. Das Absterben nämlich während der einzelnen Jahre wird als *gleichförmig* angesehen. Alsdenn erhält man für das *erste* Jahr, anstatt $\frac{1}{A.B}$, folgende Theile

$(\frac{1}{A}$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}A+(n-1)\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}}{A.B}+\frac{\left(\frac{2}{n}A+(n-2)\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}}{A.B}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}A+1\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}+\frac{\frac{1}{n}A.\Delta B}{n.A.B}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}A.\Delta B.n}{A.B.n}+\frac{\Delta A.\Delta B}{n.n.A.B}(n-1+n-2+n-3+\cdots+1)$$

$$=\frac{\frac{1}{n}A.\Delta B}{A.B}+\frac{\Delta A.\Delta B}{2.A.B}, \text{ wenn } n \text{ unendlich ist.}$$

Eben so für das zweyte Jahr,

$$\frac{\frac{2}{n}A.\Delta\frac{1}{n}B}{A.B}+\frac{\Delta\frac{1}{n}A.\Delta\frac{1}{n}B}{A.B} \text{ an statt } \frac{\frac{2}{n}A.\Delta\frac{1}{n}B}{A.B}.$$

Also muss zu dem obigen Wehrt von $S.\frac{\frac{1}{n}A.\Delta B}{A.B}$ noch $S.\frac{\Delta A.\Delta B}{2.A.B}$ hinzugesetzet werden.

Auf eine gleiche Weise zeiget sich, dass dieselbe Correction für $S.\frac{\frac{1}{n}B.\Delta A}{A.B}$, oder für die Wahrscheinlichkeit, dass B überlebe, erforderlich sey. Es ist $S.\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}$ die *Wahrscheinlichkeit des Zugleichsterbens* in einem Jahre. Diese muss zur Hälfte auf jede der beyden Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens vertheilet werden.

2.

Zusatz 1. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben wird die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens

leicht

von ihr, und also das *nach der zwoten Sterben* noch die Jahre durch fort, um welche ihre Altersergänzung die der andern übertrifft. So ist es nicht, wenn die *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens* genommen wird. Die Zahl der Paare, von denen eine Person am Leben bleibt, wenn die andere stirbt, wird nicht mehr vergrösert, so bald die ältere der beyden todt ist. Aber die Zahl der Paare, wovon eine nach der andern stirbt, nimmt noch zu bis an das letzte Jahr des Ueberlebenden. Es muss also in jenem Fall noch etwas vorher hinzugesetzet werden. Der Altersunterschied sey z, so ist diese Ergänzung $\frac{S.dz}{\alpha} = \frac{z}{\alpha}$, für A, wenn A, und $\frac{z}{\beta}$, wenn B überleben soll.

Daher hat man für die Wahrscheinlichkeit, dass *A nach B sterbe*, im Fall A die jüngere ist, $\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{2\alpha}$. Ist A *älter*, so bekommt man $\frac{\beta}{2\alpha}$, wie vorher §. 2. So auch bey B.

Um den Folgen dieses Umstandes zu entgehen, ist es die meistenmale besser und einfacher, die *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens*, als die des *Nachsterbens*, zu berechnen.

4.

Zu §. 183.

Auf dieselbe Art, wie vorher §. 1. findet man bey *Anwartschaften* den Unterschied zwischen den Wehrten für *ganze Jahre* und für *Augenblicke*.

Die

Die Differenz beyder ist $= \frac{n}{\beta} - \frac{n}{\alpha} = \frac{(\alpha-\beta).n}{\alpha\beta}$.

Und ihre Summe $\frac{n}{\beta} + \frac{n}{\alpha} - \frac{n^2}{\alpha\beta} = 1$, es sey $n = \alpha$, oder $= \beta$.

Ist A die *älteste* der gegebenen Personen, so muss x nach der Integration α werden. Dann ist

$S. \frac{(\alpha - x)\,dx}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}$. $\overline{Ea}$, das ist, der mittlern Lebensdauer von A, dividirt durch die Altersergänzung der jüngern B.

3.

Zusatz. 2. Die Wahrscheinlichkeit, dass B schon todt sey, wenn A stirbt, das ist, dass *A nach B sterbe*, muss einerley seyn mit der, dass *A, B überlebe*, wenn auf die *ganze Lebenszeit* gerechnet wird. Es ist A der Längstlebende in beyden Fällen. (Cap. IV. §. 176.)

Diese letzte Wahrscheinlichkeit, dass eine nach der andern sterbe, wird bey der Hypothese vom gleichförmigen Absterben,

1) dass *A nach B sterbe* $= S. \frac{x}{\beta} \cdot \frac{dx}{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\alpha\beta}$.

2) dass *B nach A sterbe* $= S. \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{dx}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\alpha\beta}$.

Diese *unvollständigen* Integralia sind zwar gleich, allein man muss bedenken, dass wenn diejenige Person, welche die andere überleben soll, jünger ist, als die zwote, ihre Altersergänzung also gröser, so dauret das Absterben

von

ganze Jahrsrenten, so bekommt man den Wehrt der obigen Anwartschaft für das erste Jahr

$$= \frac{{}^{1}\!A.\,\Delta\,B}{A.\,B} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\Delta\,A.\,\Delta\,B}{A.\,B} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{p'}{p} - \frac{\Delta\,A.\,\Delta\,B}{A.\,B} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{r}(p'-p).$$

Die Veränderung ist für alle Jahre die ähnliche. Es ist also die Anwartschaft *auf den Tod von B*, wenn B vor A stirbt

$$= \frac{p'}{pr} \cdot \left(\frac{{}^{1}\!A.\,\Delta\,B}{A.\,B} + \frac{{}^{2}\!A.\,\Delta\,{}^{1}\!B}{A.\,B\,r} + \frac{{}^{3}\!A.\,\Delta\,{}^{2}\!B}{A.\,B.\,r^2} + + \right)$$

$$+ \frac{p'}{pr} \left(\frac{\Delta\,A.\,\Delta\,B}{A.\,B} + \frac{\Delta\,{}^{1}\!A.\,\Delta\,{}^{1}\!B}{A.\,B.\,r} + + \right)$$

$$- \frac{p'}{pr} \cdot (p'-p) \left(\frac{\Delta\,A.\,\Delta\,B}{A.\,B} + \frac{\Delta\,{}^{1}\!A.\,\Delta\,{}^{1}\!B}{A.\,B.\,r} + + \right)$$

Die Anwartschaft auf *den Tod von A*, im Fall dieser vor B stirbt, wird auf dieselbe Weise,

$$= \frac{p'}{pr} \cdot \frac{1}{A.\,B} \cdot \left({}^{1}\!B\,\Delta\,A + {}^{2}\!B.\,\Delta\,{}^{1}\!A + + \right)$$

$$+ \frac{p'}{pr} \cdot \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\Delta\,B.\,\Delta\,A + \frac{\Delta\,{}^{1}\!B.\,\Delta\,{}^{1}\!A}{r} + + \right)$$

$$- \frac{p'}{pr} \cdot (p'-p) \cdot \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\Delta\,A.\,\Delta\,B + \frac{\Delta\,{}^{1}\!A.\,\Delta\,{}^{1}\!B}{r} + + \right)$$

Die letztern Theile, welche zu den ersten beyden Anwartschaften hinzukommen, sind einander gleich, und da $\frac{p'}{pr}(p'-p) = 0{,}3$ ganz nahe, so kann man sie,

=

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B} + \frac{\Delta^{\overline{1}}A\,\Delta^{\overline{1}}B}{A.B.r} + +\right)$ annehmen. Die beyden erſten Theile verhalten ſich zu den Anwartſchaften auf *ganze* Jahre berechnet, das iſt zu den beyden Wehrten

$\frac{1}{A.B}\left({}^{\overline{1}}A\,\Delta B + \frac{{}^{\overline{2}}A.\Delta^{\overline{1}}B}{r} + +\right)$ und

$\frac{1}{A.B}\left({}^{\overline{1}}B.\Delta A + \frac{{}^{\overline{2}}B.\Delta^{\overline{1}}A}{r} +\right)$ auf gleiche Weiſe,

nämlich wie $\frac{p'}{p}\cdot\frac{1}{r}$: 1, das iſt wie der baare Wehrt *einer Rente in augenblicklichen Terminen*, zu ihrem baaren Wehrt, wenn die Summe aller Theile auf einmal im Anfang gegeben wird (*Zuſätze* zu Cap. I. §. 9.) Uebrigens iſt die Anwartſchaft auf den *gleichzeitigen* Tod beyder Perſonen ein Nichts. Aber es zeigt ſich aus dem vorhergehenden, „daſs ihr Wehrt, den ſie hat, „wenn auf *ganze* Jahre gerechnet wird, auf die Wehrte „des Ueberlebens ganz nahe zur Hälfte auf jede falle.“

5.

Zuſatz. Berechnet man die Wehrte dieſer Anwartſchaft nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, ſo iſt die Anwartſchaft, im Fall A, B überlebet

$= \int \frac{\overline{\alpha-x}}{\alpha\beta}\cdot\frac{dx}{r^x} = \frac{1}{\beta}\int\frac{dx'}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x} = \frac{1}{\beta}\lambda^{\overline{a}}$

wenn B die *jüngſte* Perſon iſt, alſo β gröſser als α, und daher x nach der Integration α wird. Iſt aber B die

älteste und also β kleiner als α, so muss statt $\lambda\overline{a}$ eine nach β Jahren *aufhörende* Leibrente von A genommen werden. Denn nach der Integration wird x in diesem Fall nicht α, sondern β. Die nach β Jahren aufhörende Leibrente für A, ist $= \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int \frac{x\,dx}{r^x}$, so genommen, dass nach der Integration $x = \beta$ wird. Dies wird

$$= p\int \frac{dx}{r^\beta} - \frac{p}{\alpha}\cdot\int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{p\beta}{\alpha r^\beta}$$

$$= p\int \frac{dx}{r^\beta} - \frac{p}{\beta}\int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{\beta p}{\beta r^\beta}$$

$$+ \left(\frac{p}{\beta} - \frac{p}{\alpha}\right)\cdot\int \frac{dx}{r^\beta} + \left(\frac{p}{\alpha} - \frac{p}{\beta}\right)\frac{\beta}{r^\beta} = \lambda\overline{b}$$

$$+ p\left(\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{\beta}{\alpha r^\beta}\right).$$

6.

Zusatz zum 53sten Satz in §. 189. und 190.

Es ist der *Wehrt des Ueberlebens* von A über B, oder der *Wehrt einer Leibrente von A nach dem Tode von B*, nach §. 127. Cap. III. berechnet, $= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b}$. So hingegen berechnet, *dass A*, nach dem Tode von B, *sogleich auf einmal abgefunden werde*, mit dem am Ende des Sterbjahrs fälligen Termin und mit dem Wehrt seiner Leibrente für das folgende Leben, bekommt man die Summe: $\frac{\Delta B}{B}\cdot\frac{\overline{1}A}{A}\cdot\frac{(1+\lambda\overline{a+1})}{r}$

$$+ \frac{\Delta\overline{1}B}{B}\cdot\frac{\overline{2}A}{A}\cdot\frac{(1+\lambda\overline{a+2})}{r^2} + \text{+++} + \frac{\Delta\overline{n}B}{B}\cdot\frac{\overline{n+1}A}{A}$$

(1 +

$$\frac{\left(1+\lambda\overline{a+n+1}\right)}{r^{n+1}} = \frac{\Delta B}{B}\cdot\lambda\overline{a} + \frac{\Delta^{1}B}{B}\cdot\frac{^{1}A}{A}\cdot\lambda\overline{a+1} + \frac{\Delta^{2}B}{B}\cdot\frac{^{2}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^{2}} + + \frac{\Delta^{n}B}{B}\cdot\frac{^{n}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}}.$$

Daſs dieſe letztere Summe ſey

$$= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} = \frac{(B-{}^{1}B)}{B}\frac{^{1}A}{A}\cdot\frac{1}{r} + \frac{(B-{}^{2}B)}{B}\frac{^{2}A}{A.r^{2}}\cdot + + \frac{(B-{}^{n+1}B)}{B}\frac{^{n+1}A}{A}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}$$

erhellet ſo. Es iſt $\lambda\overline{a} = \frac{^{1}A}{A.r} + \frac{^{2}A}{A.r^{2}} + + \frac{^{n+1}A}{A.r^{n+1}}$;

$$\frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{^{2}A}{^{1}A.r^{2}} + \frac{^{3}A}{^{1}A.r^{3}} + + \frac{^{n+1}A}{^{1}A.r^{n+1}};$$

$$\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^{2}} = \frac{^{3}A}{^{2}A.r^{3}} + \frac{^{4}A}{^{2}A.r^{4}} + + \frac{^{n+1}A}{^{2}A.r^{n+1}};$$

$$\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}} = \frac{^{n+1}A}{^{n}A.r^{n+1}} + +$$

Folglich wird die erſte Summe

$$= \frac{\Delta B}{B}\cdot\left(\frac{^{1}A}{A.r} + \frac{^{2}A}{A.r^{2}} + + \frac{^{n+1}A}{A.r^{n+1}}\right) + \frac{\Delta^{1}B}{B}\cdot\left(\frac{^{2}A}{A.r^{2}} + \frac{^{3}A}{A.r^{3}} + + \frac{^{n+1}A}{A.r^{n+1}}\right)$$

$$+\frac{\Delta^{2}B}{B}\left(\frac{^{3}A}{A.r^{3}}+\frac{^{4}A}{A.r^{4}}++\frac{^{n+1}A}{A.r^{n+1}}\right)++$$

$$+\frac{\Delta^{n}B}{B}\left(\frac{^{n+1}A}{A}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\right)=\frac{\Delta B}{B}\cdot\frac{^{1}A}{Ar}$$

$$+\left(\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta^{1}B}{B}\right)\frac{^{2}A}{A.r^{2}}$$

$$+\frac{1}{A.B}\left(\frac{\Delta B+\Delta^{1}B+\Delta^{2}B}{r^{3}}\right)^{3}A++$$

$$+\left(\frac{\Delta B+\Delta^{1}B+\Delta^{2}B++\Delta^{n}B}{r^{n+1}}\right).\ ^{n+1}A.$$

Dieſs iſt

$$=\frac{(B-^{1}B)}{B}\cdot\frac{^{1}A}{A.r}+\frac{(B-^{2}B)}{B}\cdot\frac{^{2}A}{A.r^{2}}\cdot$$

$$+\frac{(B-^{3}B)}{B}\cdot\frac{^{3}A}{Ar^{3}}++\frac{(B-^{n+1}B)^{n+1}A}{B.A\quad r^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{^{1}A}{A.r}+\frac{^{2}A}{A.r^{2}}+++\right)-\left(\frac{^{1}B}{B}\frac{^{1}A}{A}\frac{1}{r}+\frac{^{2}B.\ ^{2}A}{A.Br^{2}}++\right)$$

$$=\lambda\overline{a}\ -\ \lambda\overline{a\,b}.$$

7.

Beweis des Satzes in §. 202.

Es iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs von dreyen gegebenen Perſonen A, B, C, die letzte C *zuerſt abſterbe*, wenn nur auf ganze Jahre geſehen wird, ſo viel als die Summe

$$\frac{^{1}A.\ ^{1}B\,\Delta\,C}{A.\,B.\,C}+\frac{^{2}A.\ ^{2}B.\,\Delta\,^{1}C}{A.\,B.\,C}++$$

=

$$= \frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,C}{A.B.C} - \frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.B.C} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{2}B.\,{}^{1}C}{A.B.C} - \frac{{}^{2}A.\,{}^{2}B.\,{}^{2}C}{A.B.C} + +$$

$$= \frac{{}^{-1}C}{C} \cdot C\overline{a.b.(c-1)} - C\overline{abc}.$$

Rechnet man nun aber auch die Fälle mit, wo C und A, ingleichen C und B, *beyde während deſſelben Jahrs ſterben*, ingleichen auch die, wo alle *drey zugleich abgehen*, ſo muſs zu dem obigen Wehrt noch die Hälfte der Summe $\frac{{}^{1}B.\,\Delta A.\,\Delta C}{A.B.C} + \frac{{}^{2}B.\,\Delta\,{}^{1}A.\,\Delta\,{}^{1}C}{A.B.C} + +$ ingleichen die Hälfte von der Summe $\frac{{}^{1}A.\,\Delta B.\Delta C}{A.B.C} + \frac{{}^{2}A.\,\Delta\,{}^{1}B\,\Delta\,{}^{1}C}{A.B.C} + +$; auch ferner $\frac{1}{3}$tel der Summe $\frac{\Delta A.\Delta B.\Delta C}{A.B.C} + \frac{\Delta\,{}^{1}A.\,\Delta\,{}^{1}B.\Delta\,{}^{1}C}{A.B.C} + +$ addirt werden.

Die erſte Summe enthält die Fälle, in denen C mit A in demſelben Jahre abgeht, wovon die Hälfte zu denen gehöret, wo *C zuerſt* ſtirbt, was auf eine ähnliche Art erhellet, wie es oben §. 1. bey zwey Leben gezeiget iſt. Die zwote Summe enthält die Fälle, in welchen C mit B in demſelben Jahre ſtirbt, wovon die Hälfte auch hieher gehört.

Ferner drückt die letzte Summe die Fälle aus, wo alle drey in demſelben Jahre abgehen, davon $\frac{1}{3}$tel diejenigen begreift, in denen C zuerſt ſtirbt.

Nimmt man blofs die Theile für das erste Jahr, woraus sich die für die folgenden von selbst geben, so ist

$$\frac{{}^{-1}A\,{}^{-1}B\,\Delta\,C}{A.\,B.\,C} = \frac{1}{A.B.C}\left(C.\,{}^{-1}A.\,{}^{-1}B - {}^{-1}A.\,{}^{-1}B.\,{}^{-1}C\right);$$

$$\frac{{}^{1}A.\Delta.B.\Delta C}{2\,A.\,B.\,C} = \frac{1}{2\,ABC}\left({}^{1}A.C.B - {}^{1}A.B.{}^{1}C + {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - C\,{}^{1}A\,{}^{1}B\right);$$

$$\frac{{}^{1}B.\,\Delta A.\,\Delta C}{2\,A.\,B.\,C} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{A.B.C}\left(A\,{}^{1}B\,C - {}^{1}A\,{}^{1}B\,C + {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - C\,{}^{1}A\,{}^{1}B\right);$$

$$\frac{\Delta A.\,\Delta B.\,\Delta B}{3\,A.\,B.\,C} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{A.B.C}\left(A.B.C - B.C\,{}^{1}A + A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - AB\,{}^{1}C + B\,{}^{1}A\,{}^{1}C - {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - AC\,{}^{1}B + C\,{}^{1}A\,{}^{1}B\right).$$

Die Summe dieser Theile ist

$$\frac{1}{3}\left(\frac{A\,B\,C - {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{A.C.\,{}^{1}B - A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{B.C.\,{}^{1}A - B\,{}^{1}A\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{A.B.\,{}^{1}C - C\,{}^{1}A\,{}^{1}B}{A.\,B.\,C}\right)$$

Nun ist $\frac{1}{3}\,\frac{(ABC - {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C)}{A\,B\,C} = \frac{1}{3}\,\frac{\Delta\,(A\,B\,C)}{A\,B\,C}$ aus allen Jahren zusammen genommen $= \frac{1}{3}$. Ferner ist

$\frac{A\,C\,{}^{1}B}{A\,B\,C}$ aus allen Jahren $= C\,\frac{{}^{-1}A\;{}^{-1}C}{A\,C}\cdot\overline{(a-1)\,b.\,(c-1)}$;

auch $\int\frac{A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A\,B\,C} = \frac{{}^{-1}A}{A}\cdot\,C\overline{(a-1)\,b.c.}$ Ferner

$\int BC$

$\int \frac{BC^{-1}A}{A.b.C}$ aus allen Jahren $= \frac{=^{-1}B.=^{-1}C}{B.C}$.

$C^{\overline{a.(b-1).(c-1)}}$ und ſo weiter. Alſo der geſammte geſuchte Wehrt

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{=^{-1}A}{A}\cdot\left(\frac{=^{-1}C}{C}\,C^{\overline{(a-1)\,b.(c-1)}} - C^{\overline{(a-1)b.c}}\right) + \frac{1}{6}\,\frac{=^{-1}B}{B}\cdot\left(\frac{1}{C}\cdot C^{\overline{a(b-1)(c-1)}} - C^{\overline{a(b-1)c}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{=^{-1}A\;=^{-1}B}{A.B}\cdot C^{\overline{(a-1)(b-1)c}} - \frac{=^{-1}C}{C}\cdot C^{\overline{a.b.(c-1)}}\right).$$

8.

Zu §. 203.

Die Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben vorausgeſetzt, iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs C zuerſt abſterbe aus dreyen A, B, C, oder $W = S.\frac{(\alpha-x)(\beta-x)dx}{\alpha\,\beta\,\gamma}$

Denn $\frac{\alpha-x}{\alpha}$ iſt gleich der Zahl der noch Lebenden von A nach verfloſſener Zeit x durch die anfängliche Zahl der Lebenden dividirt, weil die Zahl der Geſtorbenen ſich jedesmal verhält wie die verfloſſene Zeit. Eben das iſt $\frac{\beta-x}{\beta}$ bey B, und $\frac{dx}{\gamma}$ iſt der Abgang von C in jedem Augenblick.

Nun ist $S.\frac{\overline{\alpha-x}}{\alpha}.\frac{\overline{\beta-x}}{\beta}.\frac{dx}{\gamma}$

$= \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\alpha\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma} + \frac{x^3}{3\alpha\beta\gamma}$; wo x nach der Integration so grofs genommen werden mufs, als die kleinste von den dreyen gegebenen Altersergänzungen, α, β, γ. Setzet man also n für die kleinste dieser Gröfsen, unbestimmt welche, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{n}{\gamma}\left(1 - \frac{n}{2\alpha} - \frac{n}{2\beta} + \frac{n}{3\alpha\beta}\right)$. Da man hier auf Augenblicke rechnet, so fallen von selbst die Zusätze weg, die wegen des Zugleichabgehens mehrerer erfordert werden.

Zusatz. Wenn C nicht die jüngste ist, also auch nach der Integration x entweder α oder β wird, so ist

$S.\frac{(\alpha-x)}{\alpha}\frac{(\beta-x)}{\beta}\frac{dx}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\int\frac{(\alpha-x)}{\alpha}\frac{(\beta-x).dx}{\beta}$

$= \frac{1}{\gamma} C\overline{a\,b}$.

9.

Beweis des 62sten Satzes §. 207.

Sucht man auf ähnliche Art *den Wehrt* (W') einer bey dem Tode der Person C zahlbaren Summe, im Fall diese *vor den beyden* A und B abstirbt, so erhält man für das *erste* Jahr dieselbigen Theile, wie im §. 7. und zwar völlig dieselbigen, *undiscontirt*, weil die auf dies Jahr fallende Ausgabe angesehen wird als eine *baare* Ausgabe. Die auf das *zweyte* Jahr fallende wird zuerst discontirt.

Daher

Daher ist W' auf das erste Jahr

$$= \frac{1}{3}\frac{(A.B.C - {}^{1}A.{}^{1}B\,{}^{1}C)}{A.B.C} + \frac{1}{6}\frac{(A.C.{}^{1}B - A.{}^{1}B.{}^{1}C)}{A.B.C.}$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{(B.C.{}^{1}A - B\,{}^{1}A\,{}^{1}C)}{A.B.C} - \frac{1}{3}\frac{(A.B.{}^{1}C - C\,{}^{1}A\,{}^{1}B)}{A.B.C.}$$

Nun ist das erste Stück für alle Jahre zusammen genommen

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{A.B.C.}{A.B.C.} + \frac{{}^{1}A.{}^{1}B.{}^{1}C}{A.B.C.r} + +\right)$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{{}^{1}A.{}^{1}B.{}^{1}C}{A.B.C} + \frac{{}^{2}A.{}^{2}B.{}^{2}C}{A.B.C.r} + +\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \lambda\overline{abc} - r.\lambda\overline{abc}\right) = \frac{1-(r-1)\lambda\overline{abc}}{3}.$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right).$$

Das Stück

$$\frac{1}{6}\left(\frac{A.C.{}^{1}B}{A.B.C} + \frac{{}^{1}A.{}^{1}C.{}^{2}B}{A.B.C} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

wird, alle Jahre zusammengenommen,

$$= \frac{1}{6}\,r.\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B}{A.C} \cdot \lambda\overline{(a-1).b.(c-1)}.$$

Eben so werden ferner alle übrigen Stücke Wehrte der Verbindungsrenten mit r multiplicirt, wie sie vorher Verbindungsdauer waren.

Dieſs giebt den geſammten Wehrt,

$$W' = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{P}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{\overline{\overline{-1}}A}{A}\left(\frac{\overline{\overline{-1}}}{C}\cdot\right.$$

$$\lambda\overline{(a-1).b.(c-1)} - \lambda\overline{(a-1).b.c.}\Big) +$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{\overline{\overline{-1}}B}{B}\left(\frac{\overline{\overline{-1}}C}{C}\cdot\ \lambda\overline{a.(b-1)(c-1)}\cdot -\right.$$

$$\left.\lambda\overline{a.(b-1)(c-1)}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\overline{\overline{-1}}A.\overline{\overline{-1}}B}{A.B}\cdot\lambda\overline{(a-1).(b-1)c.}\right.$$

$$\left. - \frac{\overline{\overline{-1}}C}{C}\cdot\ \lambda\overline{a.(b-1)(c-1)}\right).$$

10.

Fortſetzung.

Sucht man auch den Wehrt der Anwartſchaft für den Fall, *daſs B die vor den übrigen ſterbende* Perſon iſt $\left(\frac{\overline{\overline{-1}}A.\overline{\overline{-1}}C.\Delta B}{A.C.B.} + +\right)$, ingleichen den Wehrt für den Fall, wenn *A zuerſt* abgeht, das iſt $\left(\frac{\overline{\overline{-1}}B.\overline{\overline{-1}}C.\Delta A}{B.C.A} + \frac{\overline{\overline{-2}}B.\overline{\overline{-2}}C\Delta A}{B.C.A}\cdot\frac{1}{r} + +\right)$ und nennet die beyden letztern Wehrte W'', W''', ſo macht $W' + W'' + W'''$ ſo viel aus, als *den Wehrt einer Anwartſchaft auf die Trennung der drey Perſonen.* Denn nun iſt es gleich viel, welche von ihnen zuerſt ſtirbt. Dieſer Wehrt iſt $= 1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{P}$.

Dieſs

Dieſs lehren auch die obigen Formeln. Das erſte Stück in $W' = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{abc}}{p}\right)$ iſt für alle drey Fälle daſſelbe. Für alle drey zuſammen macht es alſo $1 - \frac{\lambda_{abc}}{p}$. Die übrigen Theile heben ſich einander auf.

Man hat in W' für das erſte Jahr

$$\frac{1}{6}\frac{AC^{1}B}{ABC} + \frac{1}{6}\frac{BC^{1}A}{ABC} - \frac{1}{3}\frac{AB^{1}C}{ABC}$$

Dazu kommt in W'', in dem zweyten Fall,

$$\frac{1}{6}\frac{AB^{1}C}{ABC} + \frac{1}{6}\frac{AC^{1}B}{ABC} - \frac{1}{3}\frac{BC^{1}A}{ABC},$$

und in W''' das iſt in dem dritten Fall,

$$\frac{1}{6}\frac{BC^{1}A}{ABC} + \frac{1}{6}\frac{AB^{1}C}{ABC} - \frac{1}{3}\frac{AC^{1}B}{ABC}.$$

Dieſe Stücke zuſammen ſind = o.

Eben ſo hat man

in W'; $-\frac{1}{6}\cdot\frac{A^{1}B^{1}C}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{B^{1}A^{1}C}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C^{1}A^{1}B}{ABC}$

in W''; $-\frac{1}{6}\cdot\frac{B^{1}A^{1}C}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{C^{1}AB}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{A^{1}B^{1}C}{ABC}$

und in W'''; $-\frac{1}{6}\cdot\frac{C^{1}A^{1}B}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{A^{1}B^{1}B}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{B^{1}A^{1}C}{ABC}$

Dieſe Theile heben ſich wieder auf.

II.

Zu §. 209.

Nach *Moivres* Hypothese gerechnet ist der gesuchte Wehrt $W' = \int \frac{\overline{\alpha - x}.\ \overline{\beta - x}.\ d\,x}{\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ r^x}$, wo x nach der Integration der kleinsten Altersergänzung gleich werden muss. Ist nun γ nicht die kleinste, oder C nicht die jüngste Person, so ist $W' = \frac{1}{\gamma}\ \lambda\overline{a\,b}$, (wenn nämlich $\lambda\overline{a\,b}$ oder die Verbindungsrente von A und B für augenblickliche Renten genommen wird.) Ist aber C die jüngste, dass also x nach der Integration γ wird, so muss $\lambda\overline{a\,b}$ nicht weiter als γ Jahre genommen werden. Das ist, statt der ganzen Verbindungsrente ist es eine, welche nach γ Jahren aufhört.

Sind die *Altersergänzungen gleich*, so ist wiederum $\frac{1}{\alpha}\ \lambda\overline{a\,a} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{q\,a\,a}}{p}\right)$ nach derselben Voraussetzung.

12.

Zu §. 212.

Die Reihe, welche die *Wahrscheinlichkeit*, *dass A fortlebe*, *wenn B stirbt*, *für jedes einzelne Jahr* ausdruckt, und welche *ganz* genommen *die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A* über eine zwote Person enthält, ist nach § 1.

=

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left({}^{1}\!A.\,\Delta B + \frac{\Delta A.\,\Delta B}{2} + {}^{2}\!A.\Delta {}^{1}\!B + \right.$$

$$\left. \frac{\Delta {}^{1}\!A.\,\Delta {}^{1}\!B}{2} + + \right) \text{ſie ſey} = W.$$

Dieſe Reihe hat ſo viele Theile, als die *kleinſte Altersergänzung* ausmacht, welche, im Fall man nicht nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben rechnet, der Abſtand des gegebenen Alters von dem kürzeſten Alter der Tabelle iſt.

Dieſe Reihe ſummirt, giebt eine andere *ſummatoriſche Reihe*, deren erſtes Glied das erſte Glied von jener, deren zweytes die beyden erſten von jener, das dritte die drey erſten zuſammen genommen, enthält.

Der *Terminus generalis dieſer ſummatoriſchen Reihe* iſt für ein *n*tes Glied

$$= S.\frac{{}^{n}\!A.\Delta {}^{n-1}\!B}{A.B} + S.\frac{\Delta {}^{n-1}\!A.\,\Delta {}^{n-1}\!B}{2\,A.\,B}$$

$$= S.\frac{{}^{n-1}\!A.\,\Delta {}^{n-1}\!B}{A.B} - S.\frac{\Delta {}^{n-1}\!A.\,\Delta {}^{n-1}\!B}{2.\,A.\,B}$$

$$= S.\frac{{}^{n-1}\!A.\,({}^{n-1}\!B - {}^{n}\!B)}{A.B} - S.\frac{({}^{n-1}\!A - {}^{n}\!A)({}^{n-1}\!B - {}^{n}\!B)}{2.\,A.\,B}$$

$$= S.\frac{{}^{n-1}\!A.\,{}^{n-1}\!B - S.{}^{n-1}\!A.\,{}^{n}\!B + S.{}^{n}\!A.\,{}^{n-1}\!B - S.{}^{n}\!A{}^{n}\!B}{2\,.\,A.\,B}$$

Dieſe Summen ſind Theile von Coexiſtenzen, nämlich von Coexiſtenzen auf *n* Jahre berechnet.

Es

Es ist $S.\frac{\overline{\overline{n}}A.\overline{\overline{n}}B}{2\,A.\,B} = \frac{C\,\overline{ab}}{2}$ auf die ersten n Jahre;

$S.\frac{\overline{\overline{n-1}}A.\overline{\overline{n-1}}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overline{\overline{-1}}A.\overline{\overline{-1}}B}{A.\,B} \cdot \frac{C\,\overline{(a-1)\,(b-1)}}{2}$ eben

solche. Auch $S.\frac{\overline{\overline{n-1}}A.\overline{\overline{n}}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overline{\overline{-1}}A}{A} \cdot \frac{C.\overline{(a-1)\,b}}{2}$,

und $S.\frac{\overline{\overline{n}}A.\overline{\overline{n-1}}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overline{\overline{-1}}B}{B} \cdot \frac{C.\overline{a\,(b-1)}}{2}$ nach n Jahren.

13.

Beweis des Zusatzes in §. 216.

Wenn A aus dreyen Personen von gegebenen Alter a, b, c, die *zwote* im Absterben seyn soll, so ist der Wehrt der Anwartschaft auf die Summe 1 zahlbar bey dem Tode von A,

$$= \left(\frac{\Delta\,A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{1}}C}{C} + \frac{\Delta\,\overline{\overline{1}}A\,\overline{\overline{2}}C}{A\;\;C} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

$$- \left(\frac{\Delta\,A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{-1}}B.\,\overline{\overline{1}}C}{B.\,C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta\,A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{1}}B}{B} + \frac{\Delta\,\overline{\overline{1}}A\,\overline{\overline{2}}B}{A.\,B} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

$$- \left(\frac{\Delta\,A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{1}}B\,\overline{\overline{1}}C}{B.\,C} + +\right).$$

Das ist gleich dem Wehrt für den Fall, dass *B die erste und C die letzte* ist, und für den zweyten, dass umgekehrt *C die erste und B die letzte* ist.

Nun

Nun sey auch B der Erblasser, der zwischen A und C sterben soll, so erhält man den Wehrt für diesen Fall,

$$= \left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overline{1}C}{C} + +\right) - \left(\frac{\Delta B. \overline{1}A. \overline{1}C}{A. B. C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overline{1}A}{A} + +\right) - \left(\frac{\Delta B. \overline{1}A \overline{1}C}{B. A. C} + +\right)$$

Und endlich, wenn C der *zwote* im Sterben seyn soll

$$= \left(\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\overline{1}A}{A} + +\right) - \left(\frac{\Delta C. \overline{1}A. \overline{1}B}{C. A. B} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\overline{1}B}{B} + +\right) - \left(\frac{\Delta C \overline{1}A \overline{1}B}{C. A. B} + +\right)$$

Es ist aber $\left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overline{1}C}{C} + +\right) + \left(\frac{\Delta C \overline{1}A}{C. A} + +\right)$

$= 1 - \frac{\lambda \overline{a c}}{p}$ (§. 82. Cap. 4.)

und $\left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overline{1}A}{A} + +\right) + \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overline{1}B}{B} \cdot + +\right)$

$= 1 - \frac{\lambda a b}{p}$ · (eben daselbst.)

Diese Theile zusammen geben also

$$3 - \frac{\lambda \overline{a c}}{p} - \frac{\lambda \overline{a b}}{p} - \frac{\lambda \overline{b c}}{p} \cdot \cdot$$

Die

Die Summen, welche hiervon abzuziehen sind, machen

$$2.\left(\frac{\Delta A.\overline{-1}B\,\overline{-1}C}{A.B.C}++\right)+\left(\frac{\Delta B\overline{-1}A.\overline{-1}C}{B.A.C}++\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta C}{C}.\frac{\overline{-1}A.\overline{-1}B}{A.B}+\right)=2\left(1-\frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right).$$

(§. 10. *Zus.* zum IV. Capitel).

Daraus wird der Wehrt für den allgemeinen Fall, dafs die zu empfangende Summe 1, zahlbar sey beym Tode der *zwoten sterbenden Person aus dreyen, überhaupt*, in welcher Ordnung sie auch absterben

$$=3-\left(\frac{\lambda\overline{ab}+\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{bc}}{p}\right)-2\left(1-\frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right)$$

$$=1-\left(\frac{\lambda\overline{ab}+\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{bc}}{p}\right)+2\,\frac{\lambda\overline{abc}}{p}..$$

14.

Zu §. 218. Zus. 3.

Wenn A zuletzt abgeht aus A, B, C, so ist der Wehrt einer bey dessen Tode zahlbaren Summe

$$=\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta\overline{-1}A}{A}.\frac{1}{r}++\right)-\left(\frac{\Delta A\overline{-1}C}{A.C}++\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A.\overline{-1}B}{A.B}++\right)+\left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overline{-1}B.\overline{-1}C}{B.C}++\right).$$

Ist B *der letzte*, so wird der Wehrt

$$=\left(\frac{\Delta B}{B}++\right)-\left(\frac{\Delta B.\overline{-1}A}{B.A}++\right)-\left(\frac{\Delta B.\overline{-1}C}{B.C}++\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta B}{B}.\frac{\overline{-1}A\,\overline{-1}C}{A.C}++\right).$$

Und

Und ist C *der letzte*, so ist selbiger

$$= \left(\frac{\Delta C}{C} + +\right) - \left(\frac{\Delta C.\overline{\ }^{1}A}{C.A} + +\right) - \left(\frac{\Delta C.\overline{\ }^{1}B}{C.B} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C}{C}.\ \frac{\overline{\ }^{1}A.\overline{\ }^{1}B}{A.B} + +\right).$$

Aber

$$\left(\frac{\Delta A}{A} + +\right) + \left(\frac{\Delta B}{B} + +\right) + \left(\frac{\Delta C}{C} + +\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda\overline{a}}{p} + 1 - \frac{\lambda\overline{b}}{p} + 1 - \frac{\lambda\overline{c}}{p}.$$

Und $\left(\frac{\Delta A.\overline{\ }^{1}C}{A.C} + +\right) + \left(\frac{\Delta A.\overline{\ }^{1}B}{A.B} + +\right)$

$$+ \left(\frac{\Delta B.\overline{\ }^{1}A}{B.A} + +\right) + \left(\frac{\Delta B.\overline{\ }^{1}C}{B.C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C.\overline{\ }^{1}A}{C.A} + +\right) + \left(\frac{\Delta C.\overline{\ }^{1}B}{C.B} + +\right)$$

$$= 3 - \left(\frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}}{p}\right).$$ (§. 182. Cap. IV. und hier 13.)

Auch $\left(\frac{\Delta A.\overline{\ }^{1}B\ \overline{\ }^{1}C}{A.B.C} + +\right) + \left(\frac{\Delta B.\overline{\ }^{1}A\ \overline{\ }^{1}C}{B.A.C} + +\right)$

$$+ \left(\frac{\Delta C.\overline{\ }^{1}A\ \overline{\ }^{1}B}{C.A.B} + +\right) = 1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}.$$

Alles zusammen also $= 3 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right)$

$- \left(3 - \frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}}{p}\right) + 1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}$

$= 1 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right) + \left(\frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}}{p}\right)$

$- \frac{\lambda\overline{abc}}{p}$

15.

Beweis des 65sten Satzes §. 219.

Diese Aufgabe hat drey Bedingungen.

1) Die Summe 1 ist zahlbar beym Tode A.

2) Die beyden andern B und C sollen alsdenn todt seyn, und

3) B soll gestorben seyn nach C.

Für jedes einzelne Jahr *(n)* ist die Wahrscheinlichkeit, dass B nach C sterbe $= \frac{(C - {}^{n}\overline{C})}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}B}{B}$

Und die Wahrscheinlichkeit, dass bis an dieß Jahr hin C gestorben sey vor B, ist die Summe aller solcher Theile bis auf dieß Jahr eingeschlossen, also

$= S.\frac{(C - {}^{n}\overline{C})}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}B}{B}.$

Daher ist für dasselbe Jahr die Wahrscheinlichkeit, *daß A sterbe, B und C todt sind und C vor B gestorben,*

$= \frac{\Delta^{n-1}A}{A} \cdot S.\frac{(C - {}^{n}\overline{C})}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}B}{B}.$

Folglich

Folglich der baare Wehrt einer Summe zahlbar beym Tode von A unter den gesetzten Bedingungen, für dies ste Jahr, $= \frac{\Delta^{n-1} A \, S.(C - {}^{n}C) \, \Delta^{n-1} B}{A. \; C. \; B \, r^{n-1}}$.

Dies ist der *terminus generalis* der Reihe, die summirt den gesuchten Wehrt giebt.

Der gesuchte Wehrt ist nämlich

$$= \int \frac{\Delta^{n-1} A}{A} \cdot \frac{S.(C - {}^{n}C) \, \Delta^{n-1} B}{C. \quad B. \quad r^{n-1}}$$

$$= \int \frac{\Delta^{n-1} A}{A. \, r^{n-1}} \cdot \frac{S.(C - {}^{n}C) \, \Delta^{n-1} B}{C \quad B}.$$

Nun ist für das ste Jahr

$$S.\frac{(C - {}^{n}C)}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1} B}{B} = S.\frac{\Delta^{n-1} B}{B} - S.\frac{{}^{n}C. \, \Delta^{n-1} B}{C. \; B}$$

Auch ist, wenn die Hypothese vom gleichförmigen Absterben genommen wird

$$\frac{{}^{n}C. \; \Delta^{n-1} B}{C. \; B} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} + \frac{{}^{n}C}{C} - \frac{{}^{n}B \; {}^{n}C}{B. \; C}\right)$$

(Cap. IV. §. 212.) weil hier $S.\frac{{}^{n}C. \; \Delta^{n-1} B}{C. \quad B}$ die Wahrscheinlichkeit bis auf n Jahre enthält, dass C, B überlebet habe.

Noch ist $S.\frac{\Delta^{n-1}\overline{B}}{B} = \frac{B - \overline{B}^{n}}{B} = 1 - \frac{\overline{B}^{n}}{B}$ ...

Daraus wird $S.\frac{(C - \overline{C}^{n})}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}\overline{B}}{B}$:

$$= 1 - \frac{\overline{B}^{n}}{B} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\overline{B}^{n}}{B} + \frac{\overline{C}^{n}}{C} - \frac{\overline{B}^{n}\,\overline{C}^{n}}{B.\,C}\right)$$

Und der gesuchte Wehrt also

$$S.\left(1 - \frac{\overline{B}^{n}}{B}\right)\frac{\Delta^{n-1}\overline{A}}{A\,r^{n-1}} - S.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overline{B}^{n}}{B} + \frac{\overline{C}^{n}}{C} - \frac{\overline{B}^{n}.\,\overline{C}^{n}}{B.\,C}\right)\frac{\Delta^{n-1}\overline{A}}{A.\,r^{n-1}}$$

Hierbey ist aber in Hinsicht des letzten Theils wohl zu bemerken, dass $S.\frac{\overline{C}^{n}\,\Delta^{n-1}\overline{B}}{C.\,B}$ nicht weiter geht, als auf die *kleinste Altersergänzung* von C und B, sie sey nun die von C, γ, oder die von B, β. Wenn in der Summe diese kleinste Altersergänzung für n gesetzet ist, so hat diese ihre unveränderliche Grösse. Dagegen $S.\frac{\Delta^{n-1}\overline{B}}{B}$ jedesmal so lange wachsen kann, bis $1 - \frac{\overline{B}^{\beta}}{B} = 1$ wird.

In dem Fall, wenn α die *kleinste* Altersergänzung ist, also auch weder $S.\frac{\Delta^{n-1}\overline{B}}{B}$ noch $S.\frac{\overline{C}^{n}\,\Delta^{n-1}\overline{B}}{C.\,B}$ für so viele Jahre genommen werden darf, als β oder γ gross ist, kann es gleich viel seyn, welche von diesen beyden

beyden letztern die gröfsere oder kleinere sey. In diesem Fall ist der terminus generalis

$$= S.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}C}{C} + \frac{{}^{n}B.\,{}^{n}C}{B.\,C}\right).\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,S.\frac{\left(B - {}^{n}B\right)}{B}.\frac{\left(C - {}^{n}C\right)}{C}.\frac{\Delta^{n-1}A}{A.r^{n-1}}\ldots$$

Dann ist auch der *gesuchte Wehrt gleich der Hälfte des Wehrts einer beym Tode von A zahlbaren Summe, wenn A zuletzt aus dreyen A, B, C stirbt;* gleichviel ob B vor C, oder C vor B gestorben sey. Dieser Wehrt ist nach dem 64sten Satz im Cap. IV. §. 217. zu finden.

16.

Wenn $\beta = \gamma$, so ist es wiederum einerley, ob α gröfser oder kleiner als β sey. Der gesuchte Wehrt ist, im Fall α gröfser als β ist,

$$= S.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\beta}B}{B} - \frac{{}^{\beta}C}{C} + \frac{{}^{\beta}B.\,{}^{\beta}C}{B.\,C}\right).\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}$$

$$= S.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\beta}B}{B}\right).\left(1 - \frac{{}^{\beta}C}{C}\right).\frac{\Delta^{n-1}A}{A.r^{n-1}},$$

das ist wiederum *dem halben Wehrt einer Summe 1 bey dem Tode von A, wenn B und C beyde vorher gestorben sind, gleichviel in welcher Ordnung.* Hier ist auch, nach der Natur der Sache, die Wahrscheinlichkeit, dafs B nach C sterbe, so grofs als die, dafs C nach B sterbe. Also auch die Wahrscheinlichkeit, dafs A *zuletzt* sterbe, wenn C vor B gestorben ist, so grofs, als in dem Fall,

wenn B vor C stirbt. Folglich ist jede derselben die Hälfte der gesammten Wahrscheinlichkeit, *dass A zuletzt stirbt*, ohne Rücksicht auf die Ordnung, in der B und C sterben.

17.

Allein wenn β und γ verschieden sind, so ist es nicht gleichviel, welches das grösere davon sey.

1) *Es sey* $\beta > \gamma$.

Zu Berichtigung des termini generalis gehört folgendes. Es ist

$$S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\,\Delta\frac{{}^{n-1}B}{B} = S.\Delta\frac{{}^{n-1}B}{B} - S.\frac{{}^{n}C}{C}.\,\Delta\frac{{}^{n-1}A}{B},$$

für das Jahr γ,

$$= 1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B} + \frac{{}^{\gamma}C}{C} - \frac{{}^{\gamma}B\,{}^{\gamma}C}{B\,C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B}\right), \text{ weil dieſs das Jahr ist, worin } {}^{\gamma}C = 0 \text{ wird.}$$

Allein hier muſs das erste Stück $1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B}$, von dem zweyten separirt werden. Jenes wird noch gröſser in den folgenden Jahren. Es wird $1 - \frac{{}^{\gamma+1}B}{B}$, $1 - \frac{{}^{\gamma+2}B}{B}$, und im letzten Lebensjahr von B, kommt es auf $1 - \frac{{}^{\beta}B}{B} = 1$. Bis so

hoch

hoch kann es in $S.\left(1-\frac{{}^{n}B}{B}\right)\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}$ heraufgehen, wenn nicht etwa α kleiner als β ist.

Allein das zweyte Stück

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma_B}{B}+\frac{\gamma_C}{C}-\frac{\gamma_B.\gamma_C}{B.C}\right)$ wird nicht gröfser nach dem Jahr γ. Alsdenn ist es $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma_B}{B}\right)$ und diesen Wehrt behält es für alle folgende Jahre. Die Summe $S.\frac{{}^{n}C}{C}.\frac{\Delta^{n-1}B}{B}$ kann nach dem Jahr γ, wo die kleinste Altersergänzung aufhört, nicht gröfser werden.

Demnach kann für diesen Fall, $\beta > \gamma$, der Factor $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}.\frac{\Delta^{n-1}B}{B}$ so gros werden als

$1-\frac{\beta_B}{B}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma_B}{B}\right)$, das ist, es kann werden

$=\frac{1}{2}-\frac{\beta_B}{B}+\frac{\gamma_B}{2B}-\frac{\beta_B}{2B}+\frac{\beta_B}{2B}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta_B}{B}\right)+\frac{\left(\gamma_B-\beta_B\right)}{2B}$.

wenn B vor C stirbt. Folglich ist jede derselben die Hälfte der gesammten Wahrscheinlichkeit, *dass A zuletzt stirbt*, ohne Rücksicht auf die Ordnung, in der B und C sterben.

17.

Allein wenn β und γ verschieden sind, so ist es nicht gleichviel, welches das grösere davon sey.

1) *Es sey* $\beta > \gamma$.

Zu Berichtigung des termini generalis gehört folgendes. Es ist

$$S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\Delta^{\overline{n-1}}B = S.\Delta^{\overline{n-1}}B - S.\frac{{}^{n}C}{C}.\Delta^{\overline{n-1}}A,$$

für das Jahr γ,

$$= 1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\alpha}B}{B} + \frac{{}^{\gamma}C}{C} - \frac{{}^{\gamma}B.{}^{\gamma}C}{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B}\right),$$ weil dies das Jahr ist, worin ${}^{\gamma}C = 0$ wird. Allein hier muss das erste Stück $1 - \frac{{}^{\gamma}B}{B}$, von dem zweyten separirt werden. Jenes wird noch grösser in den folgenden Jahren. Es wird $1 - \frac{{}^{\gamma+1}B}{B}$, $1 - \frac{{}^{\gamma+2}B}{B}$, und im letzten Lebensjahr von B, kommt es auf $1 - \frac{{}^{\beta}B}{B} = 1$. Bis so hoch

Weiter soll $S.\frac{{}^{n}C}{C}.\frac{\Delta^{n+1}B}{B}$ sich nicht verändern. Also kann $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\frac{\Delta^{n+1}B}{B}$ auch nicht gröfser werden als $1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{{}^{\beta}C}{C}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta}C}{C}\right)$.

Behält man dagegen den obigen unbestimmten Ausdruck auch für die auf β folgenden Jahre bis γ, so wird für das nächste Jahr, $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\frac{\Delta^{n+1}B}{B}$ $=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{{}^{\beta+1}C}{C}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta+1}C}{C}\right)$, für das zweyte, $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta+2}C}{C}\right)$ u. s. f. bis $\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\gamma}C}{C}\right)=\frac{1}{2}$. So viel also mufs wiederum *abgezogen* werden, wenn man jenen obigen Ausdruck gebrauchen will. Dieſs abzuziehende Stück ist aber gleichfalls nur Etwas, unter der Bedingung, dafs γ gröfser als β ist.

Nimmt man das für $\beta \geqslant \gamma$ zu *addirende* mit dem für $\gamma \geqslant \beta$ zu *subtrahirenden* Stück zusammen, so kann $\frac{({}^{\gamma}B-{}^{1+m}B)}{2B}-\frac{({}^{\beta}C-{}^{1+m}C)}{2C}$ als das Stück angesehen werden, was zu dem obigen Ausdruck von $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\frac{\Delta^{n+1}B}{B}$, nämlich

$$\text{zu } 1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} + \frac{{}^{n}C}{C} - \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B.\ C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}C}{C} + \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B\ C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right).\left(1 - \frac{{}^{n}C}{C}\right)$$ *zuzulegen* ist, so bald n gröſser wird als die kleinſte Altersergänzung des B oder C. Eins von den beyden Theilen, woraus der Zuſatz beſteht, iſt in jedem Fall $= 0$; ſie können es alle beyde ſeyn. Es iſt nur immer der Theil etwas, der in Rechnung zu bringen iſt.

18.

Die *Wahrſcheinlichkeit, daſs B vor C geſtorben ſey*, alſo vorher berichtiget, ſo iſt nun die Reihe zu ſummiren, deren *terminus generalis*

$$\frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}}.\ S.\frac{(C - {}^{n}C)}{C}.\ \frac{\Delta^{n-1}B}{B}, \text{ iſt. Dieſer}$$

terminus iſt nunmehro

$$= \frac{1}{2}.\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right)\left(1 - \frac{{}^{n}C}{C}\right).\ \frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}} +$$

$$\left(\frac{{}^{\gamma}B - {}^{\gamma+m}B}{2\,B} - \frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+m}C)}{2\,C}\right)\frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}} \text{ für}$$

die auf die kleinſte Altersergänzung von B oder C folgende Jahre.

Wenn

Wenn nun α gröſser iſt als eine von den beyden Ergänzungen β und γ, oder als alle beyde, ſo iſt zu der Hälfte der Wehrte der Summe für den Fall, daſs A *am letzten* ſtirbt in §. 15. oben noch zuzulegen

$$S.\left(\frac{\overset{\alpha}{}B - \overset{\gamma+m}{}B}{2\,B} - \frac{\left(\overset{\beta}{}C - \overset{\beta+m}{}C\right)}{2\,C}\right).\ \frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}$$

für die über β oder γ hinausgehende Jahre.

Dieſs zuzulegende Stück iſt nach dem obigen, weil h in dem einen Fall $= \gamma$, in dem andern $= \beta$ wird,

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\gamma-1}}\cdot\frac{\overset{\gamma}{}B.\overset{\gamma}{}A}{B.\ A}\cdot\left(\frac{\left(\overset{\gamma}{}B - \overset{\gamma+1}{}B\right)}{\overset{\gamma}{}B}\cdot\frac{\Delta\overset{\gamma}{}A}{\overset{\gamma}{}A} + \frac{\left(\overset{\gamma}{}B - \overset{\gamma+1}{}B\right)}{\overset{\gamma}{}B}\cdot\frac{\Delta^{2}\overset{\gamma+1}{}A}{\overset{\gamma}{}A}\cdot\frac{1}{r} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\beta-1}}\cdot\frac{\overset{\beta}{}C.\overset{\beta}{}A}{C.\ A}\cdot\left(\frac{\left(\overset{\beta}{}C - \overset{\beta+1}{}C\right)}{\overset{\beta}{}C}\cdot\frac{\Delta\overset{\beta}{}A}{\overset{\beta}{}A} + \frac{\left(\overset{\beta}{}C - \overset{\beta+1}{}C\right)}{\overset{\beta}{}C}\cdot\frac{\Delta^{2}\overset{\beta+1}{}A}{\overset{\beta}{}A}\cdot\frac{1}{r} + \text{etc.}\right)$$

Das erſte Stück davon iſt *der baare Wehrt einer beym Tode einer Perſon vom Alter ſo groſs, als das Alter von A iſt, um γ vergröſsert, das iſt, vom Alter $a+\gamma$, unter der Bedingung zahlbaren Summe 1, daſs dieſe eine andere Perſon vom Alter $\beta+\gamma$ überlebet habe*, multiplicirt mit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\gamma-1}}\cdot\frac{\overset{\gamma}{}B.\overset{\gamma}{}A}{B.\ A}$. Das zweyte Stück iſt

ein

ein solcher Werth, wenn die *Summe zahlbar ist beym Tode einer Person, die um β Jahre älter ist als A, das ist vom Alter a+β unter der Bedingung, dass eine andere um β Jahre älter als C, das ist vom Alter c+β vorhergestorben sey*, multiplicirt mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma^{\beta-1}} \frac{\Gamma^{\beta} C \cdot \Gamma^{\beta} A}{C \cdot A}$.

Dieſs ist die Auflösung der Aufgabe im 65sten Satz. §. 219.

19.

Ohne *Hypotheſe wird die Wahrscheinlichkeit*, dass von drey Personen C *zuerst*, *dann* B und *zuletzt* A sterbe, auf folgende Weise bestimmt.

Es ist diese Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes unbestimmtes Jahr

$$= \frac{\Delta^{n-1} A}{A} \cdot S. \frac{(C - {}^{n}C)}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1} B}{B}$$

$$= \frac{\Delta^{n-1} A}{A} \cdot S. \frac{\Delta^{n-1} B}{B} - \frac{\Delta^{n-1} A}{A} \cdot S. \frac{{}^{n}C \cdot \Delta^{n-1} B}{C \cdot B}$$

$$= \frac{(B - {}^{n}B)}{B} \cdot \frac{\Delta^{n-1} A}{A} \cdot - \frac{\Delta^{n-1} A}{A} S. \frac{{}^{n}C \cdot \Delta^{n-1} B}{C \cdot B}$$

Die *Summe dieſer Theile ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit* für *alle* Jahre, oder die Wahrscheinlichkeit überhaupt. Dieſe ist

$$= S. \frac{(B - {}^{n}B)}{B} \cdot \frac{\Delta^{n-1} A}{A} - S. \frac{\Delta^{n-1} A \cdot S. {}^{n}C \cdot \Delta^{n-1} B}{A \cdot C \cdot B}$$

=

$$= S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A} - S.\frac{{}^{n}B.\,\Delta^{n-1}A}{B.\,A} \cdot S.\frac{\Delta^{n-1}A\; S.{}^{n}C.\,\Delta^{n-1}B}{A.\;C.\;B}$$

Der *erſte* Theil $S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A}$ wird = 1.

Der *zweyte* Theil $S.\frac{{}^{n}B.\,\Delta^{n-1}A}{B.\,A}$ iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs B, A überlebe, kann alſo auch als bekannt angeſehen werden.

Um das *dritte* Stück $S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A} \cdot \frac{S.{}^{n}C\;\Delta^{n-1}B}{C.\;B}$ zu bekommen, nehme man $\Delta^{n-1}A$, und $\Delta^{n-1}B$ für *augenblickliche Decremente* von ^{n-1}A, und von ^{n-1}B an, oder rechne für Augenblicke. Dann ſey $\frac{\Delta^{n-1}A}{A} = dy$, und $\frac{{}^{n}C.\,\Delta^{n-1}B}{C.\;B} = dz$, ſo iſt das zu ſuchende dritte Stück $= S.\,z\,dy = zy - S.\,y\,dz$ das iſt

$$= S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A} \times S.\frac{{}^{n}C\;\Delta^{n-1}B}{C\qquad B} -$$

$$S.\frac{{}^{n}C.\,\Delta^{n-1}B}{C.\;B} \cdot S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A}.$$ Nun iſt $S.\frac{\Delta^{n-1}A}{A}$ in jenem einzelnen Theile $\frac{A - {}^{n}A}{A}$. Folglich iſt das zu findende Stück

$=$

Daher $S.\frac{{}^{n}C\,\Delta^{n-1}B}{C.\ B.} = \frac{{}^{n}C}{C} - \frac{{}^{n}C\,{}^{n}B}{C.\ B} + S.\frac{\Delta^{n-1}C}{C}$

$- S.\frac{{}^{n}B\ \Delta\ {}^{n-1}C}{B.\quad C}$.

Nun ist hier auch $\Delta^{n-1}C = \Delta^{n-1}B$, und ${}^{n}C = {}^{n}B$

Folglich $S.\frac{{}^{n}C\ \Delta^{n-1}B}{C.\quad B} = \frac{{}^{n}C}{C}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right) +$

$1 - \frac{{}^{n}B}{B} = 1 - \frac{{}^{n}C\ {}^{n}B}{C.\ B}$, und

$S.\frac{{}^{n}C\ \Delta^{n-1}B}{C.\quad B} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B.\ C}\right)$

Und

$\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}.\ S.\frac{{}^{n}C.\ \Delta^{n-1}B}{C.\quad B} = \frac{1}{2}\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}\left(1 - \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B.\ C}\right)$

$= \frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}.\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} + \frac{{}^{n}C}{C} - \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B.\ C}\right)$

Daher der gesuchte Wehrt W

$= S.\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{1}{2} + \frac{{}^{n}B}{2B}\right.$

$\left. - \frac{{}^{n}C}{2C} + \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{2B\ C}\right) = S.\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right)\left(1 - \frac{{}^{n}C}{C}\right)\frac{1}{2}\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}$

das ist *die Hälfte des Wehrts der Anwartschaft auf den Tod von A*, im Fall A nach B und C stirbt.

Auch

Auch ist überhaupt der Werth der Anwartschaft auf den Tod A, wenn A *zuletzt* stirbt, nach B und C, so gros als die beyden Wehrte für die besondern Fälle, für den nämlich, dass *C vor B*, und den, dass *B vor C* sterbe, zusammengenommen.

Beyde Wehrte zusammen machen

$$S.\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}.\left(1-\frac{{}^{n}B}{B}+1-\frac{{}^{n}C}{C}\right)$$

$$-\int\frac{\Delta^{n-1}A}{Ar^{n-1}}S.\frac{{}^{n}C.\,\Delta^{n-1}B}{C.\quad B}-\int\frac{\Delta^{n-1}A\,S.{}^{n}B.\,\Delta^{n-1}C}{Ar^{n-1}\quad C.\quad B}$$

Nun ist $S.\frac{{}^{n}C\,\Delta^{n-1}B}{C.\quad B}=\frac{{}^{n}C}{C}S.\frac{\Delta^{n-1}B}{B}$

$$-S.\frac{\Delta^{n}C.\,S.\Delta^{n-1}B}{C.\qquad B}=\frac{{}^{n}C}{C}\left(1-\frac{{}^{n}B}{B}\right)$$

$$+S.\frac{\Delta^{n-1}C.\,(B-{}^{n}B)}{C.\qquad B}=\frac{{}^{n}C}{C}\left(1-\frac{{}^{n}B}{B}\right)$$

$$+\frac{C-{}^{n}C}{C}-S.\frac{{}^{n}B\,\Delta^{n-1}C}{B.\quad C}=1-\frac{{}^{n}C\;{}^{n}B}{C.\quad B}$$

$$-S.\frac{{}^{n}B\;\Delta^{n-1}C}{C.\quad B}.$$

Folglich $S.\frac{{}^{n}C\;\Delta^{n-1}B}{C.\quad B}+S.\frac{{}^{n}B.\,\Delta^{n-1}C}{B.\quad C}$

$$=1-\frac{{}^{n}B\;{}^{n}C}{B.\quad C}.$$

Daher der gesuchte Wehrt der Anwartschaft

$$= \int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}} \left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}C}{C} + \frac{{}^{n}B\,{}^{n}C}{B\,C}\right)$$

$$= \int \left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right) \cdot \left(1 - \frac{{}^{n}C}{C}\right) \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}}$$, das ist

der *Wehrt einer beym Tode von A zahlbaren Summe 1, wenn A nach B und C stirbt.*

Um den Wehrt von W' ohne Hypothese zu haben, kommt es auf das Stück $\int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A.\, r^{n-1}} \; S. \frac{{}^{n}C.\, \Delta^{\overline{n-1}} B}{C.\, B}$ an.

Man setze $\frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}} = dy$, und $\frac{{}^{n}C.\, \Delta^{\overline{n-1}} B}{C.\, B} = dz$,

so ist $\int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A.\; S. {}^{n}C.\, \Delta^{\overline{n-1}} B}{A r^{n-1}.\quad C.\quad B} = S z\,dy = zy - S\,y\,dz$

$$= \int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}} \times S. \frac{{}^{n}C\; \Delta^{\overline{n-1}} B}{C \qquad B}$$

$$- S. \frac{{}^{n}C.\, \Delta^{\overline{n-1}} B}{C.\, B} \int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A.\, r^{n-1}} = \left(1 - \frac{\lambda_n}{p}\right) \cdot$$

$$S. \frac{{}^{n}C.\, \Delta^{\overline{n-1}} B}{C. \qquad B} - S. \frac{{}^{n}C\; \Delta^{\overline{n-1}} B}{C. \qquad B} \cdot \int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}}.$$

Nun ist $\int \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta^{\overline{1}} A}{A r} + \frac{\Delta^{\overline{2}} A}{A r^2} + + \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A r^{n-1}}$

$$= \frac{A}{A} + \frac{{}^{1}A}{A r} + \frac{{}^{2}A}{A r^2} + + \frac{\Delta^{\overline{n-1}} A}{A.\, r^{n-1}}$$

—

$$-\left(\frac{{}^{1}\overline{A}}{A}+\frac{{}^{2}\overline{A}}{Ar}+\frac{{}^{3}\overline{A}}{Ar^{2}}+\cdots+\frac{{}^{n}\overline{A}}{Ar^{n-1}}\right)$$

$$=1+{}^{+n-1}\overline{\lambda a}-r.{}^{+n}\overline{\lambda a};$$ wo nämlich ${}^{+n-1}\overline{\lambda a}$, ${}^{+n}\overline{\lambda a}$ aufhörende Leibrenten sind.

Allein auf diese Weise bleibt immer ein Theil des ganzen Wehrts übrig, der auf andere bekannte Anwartschaften sich nicht reduciren läßt. Will man hier aber zur Bestimmung von $\int\frac{\Delta^{n-1}\overline{A}}{Ar^{n-1}}$ die Hypothese zu Hülfe nehmen, so ist $\int\frac{\Delta^{n-1}\overline{A}}{Ar^{n-1}}$

$$=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{\Delta A}{Ar^{2}}+\cdots+\frac{\Delta A}{Ar^{n-1}}$$

$$=\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^{2}}+\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^{n-1}}\right)\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{r-1}\cdot\left(1-\frac{1}{r^{n-1}}\right),$$ wo α die Altersergänzung für A ist.

Daraus erhält man $\left(p \text{ gesetzt für } \frac{1}{r-1}\right)$ $W=\int\frac{\Delta^{n-1}\overline{A}}{Ar^{n-1}}$

$$-\int\frac{{}^{n}\overline{B}.\Delta^{n-1}\overline{A}}{B.\ Ar^{n-1}}-\left(1-\frac{\lambda\overline{a}}{p}\right)S.\frac{{}^{n}\overline{C}.\Delta^{n-1}\overline{B}}{C.\ B}$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{p}{\alpha}\right)\cdot S.\frac{{}^{n}\overline{C}.\Delta^{n-1}\overline{B}}{C.\ B}-\frac{p}{\alpha}\int\frac{{}^{n}\overline{C}.\Delta^{n-1}\overline{B}}{C.\ Br^{n-1}}.$$

Dabey aber zu bemerken, daſs die Summe $S.\frac{{}^{n}C.\ \Delta^{n-1}B}{C.\ B}$ nicht weiter genommen werden darf, als bis $n = \alpha$ wird, im Fall jene ſonſt weiter gehen könnte.

21.

Beweis des 66ſten Satzes §. 222.

Es ſoll A eine Leibrente 1 haben, nach dem Tode von B, davon der erſte Termin zahlbar iſt am Ende des Sterbejahrs; allein unter der Bedingung, daſs B eine dritte Perſon C überlebet habe. Das gegebene Alter von A iſt a, das von B, b, das von C, c, und die dazu gehörigen Altersergänzungen ſind α, β, γ.

Nun iſt, die Hypotheſe vorausgeſetzt, der *Terminus generalis* der Reihe, welche den geſuchten Werth enthält, das iſt der Wehrt der ſo beſtimmten Leibrente von A, auf Ein unbeſtimmtes Jahr n

$$= \frac{{}^{n}A}{Ar^{n}}\ S.\ \frac{C - {}^{n}C}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}B}{B} \cdot$$ und die Summe

davon $= \frac{1}{2}\int \frac{{}^{n}A}{Ar^{n}}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B} - \frac{{}^{n}C}{C} + \frac{{}^{n}B\ {}^{n}C}{B.\ C}\right)$

wenn dazu geleget wird

$$\frac{1}{2}\int \frac{{}^{n+1}A}{Ar^{n-1}}\left(\frac{{}^{\gamma}B - {}^{\gamma+1}B}{B} - \frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C)}{C}\right)$$

für die über γ oder β hinausgehende Jahre, falls es dergleichen in der Reihe giebt, das iſt, falls A nicht die älteſte

teste oder eine der ältesten Personen ist. Dieſs erhellet hier völlig auf dieſelbige Art, wie in dem vorhergehenden §. 17, in dem Beweiſe des 65ſten Satzes,

Es iſt alſo die ganze Reihe

$$\int \frac{{}^{n}\overline{A}}{A\,r^{n}},\ S.\frac{(C-{}^{n}\overline{C})}{C}\cdot\frac{A^{n-1}\overline{B}}{B}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\frac{{}^{n}\overline{A}}{A\,r^{n}} - \int\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B}}{A.\,B\,r^{n}} - \int\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{C}}{A.\,C\,r^{n}}\right.$$

$$\left. + \int\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B}\,{}^{n}\overline{C}}{A\;B\;C\,r^{n}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\gamma}}\cdot\frac{{}^{\gamma}\overline{A}\,{}^{\gamma}\overline{B}}{A.\,B}\cdot$$

$$\int\frac{({}^{\gamma}\overline{B} - {}^{\gamma+1}\overline{B})}{{}^{\gamma}\overline{B}}\cdot\frac{{}^{\gamma+1}\overline{A}}{{}^{\gamma}\overline{A}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\beta}}\cdot\frac{{}^{\beta}\overline{A}.\,{}^{\beta}\overline{C}}{A.\,C}$$

$$\int\left(\frac{({}^{\beta}\overline{C} - {}^{\beta+1}\overline{C})}{{}^{\beta}\overline{C}}\cdot\frac{1}{r}\right)\frac{{}^{\beta+1}\overline{A}}{{}^{\beta}\overline{A}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} - \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{a\,b\,c}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\gamma}}\cdot\frac{{}^{\gamma}\overline{A}\,{}^{\gamma}\overline{B}}{A.\,B}\left(\lambda\overline{a+\gamma} - \lambda\overline{(a+\gamma).\,(b+\gamma)}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\beta}}\cdot\frac{{}^{\beta}\overline{A}\,{}^{\beta}\overline{C}}{A.\,C}\left(\lambda\overline{a+\beta} - \lambda\overline{(a+\beta).\,(c+\beta)}\right)$$

Es iſt aber $\frac{1}{2}\left(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} - \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{a\,b\,c}\right) =$ der *Hälfte des baaren Wehrts einer Leibrente für A, im Fall A der Längſtlebende unter A, B, C iſt. Cap. IV, §. 194.*

Wenn A die älteste der gegebenen Personen ist, so ist nichts zu der Hälfte hinzuzulegen, noch davon abzuziehen. Ist etwas *zuzulegen*, wie in dem Fall, wenn B, welcher C überleben soll, jünger ist als C (A nämlich nicht der älteste von allen) folglich β grösser als γ, so wird $\overset{\beta}{-}C = 0$, und das abzuziehende Stück wird $= 0$. Ist hingegen etwas *abzuziehen*, wie in dem Fall, wenn C jünger ist, so ist $\overset{\gamma}{-}B = 0$, und das zuzulegende Stück wird $= 0$, wie vorher im §. 17.

Dieſs ist die Auflösung des Problems nach der Hypotheſe. Ohne Hypotheſe kommt man auf ein ähnliches Verfahren, das bey der nächstvorhergehenden Aufgabe §. 19. und 20. gewieſen ist.

Fünftes Capitel.

Von den Renten auf das längſte Leben.

Erſter Abſchnitt.

Von der Dauer des längſten Lebens aus mehreren Perſonen.

223.

Grundſatz.

Die Lebensdauer derjenigen Perſon, die aus mehreren gegebenen zuletzt ſtirbt, welche man kurz die *Dauer des längſten Lebens*, auch ſchlechtweg das *längſte Leben* nennt, iſt *offenbar ſo groſs als die Zeit, in der die gegebenen Perſonen alle abſterben.*

Dieſs iſt wiederum die *mittlere Zeit* für mehrere Fälle. Eine Perſon für ſich allein hat ihre beſtimmte *mittlere Lebensdauer;* allein wenn dazu noch eine andere genommen wird von demſelben Alter, ſo wird es ſchon wahrſcheinlicher, daſs eine von dieſen beyden näher an das höchſte Lebensziel hinaufkomme, als dieſs bey *Einer* allein ſich erwarten läſst. Auch wenn dieſe hinzukommende zwote Perſon älter iſt, als jene erſtere, ſo wird es dennoch wahrſcheinlicher, daſs von dieſen zwoen Eine ein höheres Alter erreiche, als bey der jüngſten allein erwartet werden kann.

224.

Satz 67. Die Dauer des Längſtlebenden aus mehreren Perſonen iſt ſo groſs, als die Altersergänzung der jüngſten, weniger der Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns aller Perſonen.

Es iſt klar. Berechnet man, wie lange *alle* gegebene Perſonen abgeſtorben geweſen ſind, nach Ablauf der Zeit, in welcher ſie alle geſtorben ſeyn müſſen; ſo erhält man auch die *Zeit, bis wohin noch Eine aus ihnen gelebt hat*, wenn man die erſtere von der Zeit, in welcher ſie alle geſtorben ſeyn müſſen, abzieht. Länger kann keine leben, als die *Altersergänzung der jüngſten groſs iſt.* Dieſs iſt die Zeit, in der ſie nothwendig geſtorben ſeyn müſſen.

Zuſatz 1. Die mittlere Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns eines Paars, A und B, iſt nach §. 110.

$$= \frac{(A - \overline{-}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overline{-}^{1}B)}{B} + \frac{(A - \overline{-}^{2}A)}{A.} \frac{(B - \overline{-}^{2}B)}{B} + +$$

$$\frac{(A - \overline{-}^{x}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overline{-}^{x}B)}{B}$$, wo x die Altersergänzung der jüngſten von beyden iſt; oder

$$\left(\frac{(A - \overline{-}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overline{-}^{1}B)}{B} + + \right).$$

Man kann ſie kürzer durch $C\overline{-ab}$, auf eine der obigen analoge Art bezeichnen.

Und dann iſt $x - C\overline{-ab}$ die Lebensdauer des Längſtlebenden von zweyen.

225.

225.

Zusatz 2. Und weil ferner $\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B}$

$= \frac{AB - {}^{1}A B. - A\,{}^{1}B + {}^{1}A.\,{}^{1}B}{A.\quad B} = 1 - \frac{{}^{1}A}{A} - \frac{{}^{1}B}{B}$

$+ \frac{{}^{1}A\,{}^{1}B}{A.\,B}$, und so ferner $\frac{(A - {}^{n}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{n}B)}{B}$

$= \frac{A.\,B - {}^{n}A.\,B - A.\,{}^{n}B + {}^{n}A.\,{}^{n}B}{A \qquad B}$

$= 1 - \frac{{}^{n}A}{A} - \frac{{}^{n}B}{B} + \frac{{}^{n}A.\,{}^{n}B}{A.\,B}$ bis x Jahre,

so wird $x = S.\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B}$

$= x - \left(x - S.\frac{{}^{1}A}{A} - S.\frac{{}^{1}B}{B} + S.\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B}{A.\,B}\right)$

$= S.\frac{{}^{1}A}{A} + S.\frac{{}^{1}B}{B} - S.\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B}{A.\,B}$

$= E\overline{a} + E\overline{b} - C\overline{a\,b}.$

Das heifst: *Man addire die Dauer der beyden einzelnen Lebenden, und ziehe von dieser Summe die Dauer ihrer Verbindung ab, so ist der Rest die Dauer des Längstlebenden aus ihnen.*

226.

Anmerkung. Dieser Satz wird auch so bewiesen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs *von zweyen* Personen A,

und B, *Eine* im nächſten Jahr noch lebe, enthält in ſich 1) die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs A *allein* lebe, das iſt, A lebe, B todt ſey; 2) die, daſs *B allein* lebe, A todt ſey, und 3) daſs *beyde*, A und B, noch leben. Dieſe drey Fälle ſind begriffen in dem allgemeinen Fall, daſs *wenigſtens Eine von beyden* lebe.

Wenn zu dieſen drey Fällen (die unter dem allgemeinen ſtehen, daſs *Eine* wenigſtens noch lebe,) der *vierte*, daſs *alle beyde todt* ſind, geſetzet wird, ſo hat man *alle mögliche* Fälle, von denen nothwendig Einer ſtatt finden muſs. Die Wahrſcheinlichkeiten derſelben zuſammen genommen müſſen der *Gewiſsheit* gleich kommen. Zieht man alſo von der Gewiſsheit die letztere *Wahrſcheinlichkeit*, *daſs beyde geſtorben* ſind, ab, ſo hat man die Wahrſcheinlichkeit für den zweyten *gerade entgegenſtehenden* Fall, daſs noch Eine wenigſtens am Leben ſey.

Die Wahrſcheinlichkeit für das nächſte Jahr, daſs *beyde* A und B todt ſind, oder des *Ganzausgeſtorbenſeyns* eines gegebenen Paars iſt

$$= \frac{(A - {}^{1}\!A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}\!B)}{B} \cdot \text{ §. 110.}$$

Folglich $1 - \left(\frac{(A - {}^{1}\!A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}\!B)}{B}\right)$

$$= \frac{{}^{1}\!A}{A} + \frac{{}^{1}\!B}{B} - \frac{{}^{1}\!A\ {}^{1}\!B}{A.\ B} = \text{der } \textit{Wahrſcheinlichkeit, daſs noch Eine von beyden lebe.}$$

Die

Die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A allein* lebe, iſt $= \frac{{}^{1}A\,(B - {}^{1}B)}{A.\ B}$; die, daſs *B allein* lebe, $= \frac{{}^{1}B}{B} \cdot \frac{(A - {}^{1}A)}{A}$; und die, daſs *beyde noch leben*, $= \frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A\ B}$. Dieſe drey zuſammen machen gleichfalls die Wahrſcheinlichkeit des allgemeinen unbeſtimmten Falls aus, daſs noch Eine wenigſtens lebe, denn ſie machen $= \frac{{}^{1}A}{A} + \frac{{}^{1}B}{B} - 2\frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A\ B} + \frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A\ B} =$ dem vorhergefundenen $\frac{{}^{1}A}{A} + \frac{{}^{1}B}{B} - \frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A.\ B}$.

Daraus folgt dann wiederum umgekehrt, daſs dieſe Wahrſcheinlichkeit für alle Jahre zuſammengenommen ſo groſs ſey, als die *Lebensergänzung der jüngſten, weniger der mittlern Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns*. Denn es iſt

$$\frac{{}^{1}A}{A} + \frac{{}^{1}B}{B} - \frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A.\ B} = 1 - \left(1 - \frac{{}^{1}A}{A} - \frac{{}^{1}B}{B} + \frac{{}^{1}A\ {}^{1}B}{A.\ B}\right)$$

für das erſte Jahr. Für das zweyte

$$= 1 - \left(1 - \frac{{}^{2}A}{A} - \frac{{}^{2}B}{B} + \frac{{}^{2}A\ {}^{2}B}{A\ B}\right)$$ und ſo ferner, bis x Jahre, ſo weit als die Altersergänzung der *jüngſten* geht. Alſo die ganze Summe dieſer Theile für die einzelnen Jahre, macht $x - C\overline{x}_{a\,b}$.

227.

Anmerkung 2. Ungemein fehlerhaft würde folgender Schluſs ſeyn. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs A in dem nächſten erſten Jahr noch lebe, iſt $= \frac{\text{[illegible]}}{A}$; die Wahrſcheinlichkeit, daſs B alsdenn noch lebe, iſt $= \frac{1-B}{B}$. Alſo die Wahrſcheinlichkeit, daſs einer von beyden alsdenn noch lebe, iſt $= \frac{1-A}{A} + \frac{1-B}{B}$. Dieſs hieſse, es ſey *mehr als gewiſs*, daſs noch Einer lebe. Der Grundſatz, *daſs die Wahrſcheinlichkeit eines allgemeinen Falls gleich ſey der Summe der Wahrſcheinlichkeiten der beſondern unter jenen begriffenen Fälle*, kann nicht unrichtig ſeyn, wenn er ſeinem wahren Sinn nach angewandt wird. Dieſe letztern beſondern Fälle ſind Theile des Umfangs von dem allgemeinen Fall. Daher macht die Summe der beſondern Fälle, in denen etwas Statt findet, die Menge aller Fälle aus, die zu dem Allgemeinen gehören. Und aus dem Verhältniſs der Menge der Fälle, in denen ſich etwas beſonders eräugnet, zu der Menge aller möglichen Fälle, in der ſich Eins eräugnen, und auch nicht eräugnen kann, entſteht die Wahrſcheinlichkeit des erſtern. Allein die Anwendung hievon muſs logiſch richtig gemacht werden. Wer ſo verfahren wollte, wie vorher gedacht, würde die Fälle nicht ſo nehmen, wie ſie bey einer richtigen Abtheilung unterſchieden

ſchieden werden müſſen. Soll einer von zweyen noch leben, ſo iſt das nicht vollſtändig ausgedrückt, wenn man ſagt, es lebt entweder A noch, oder B noch. Sie können alle beyde leben. Es muſs ſo heiſsen: es lebt entweder *A allein;* oder *B allein*, oder A und B *beyſammen*, oder keiner von ihnen.

228.

Anmerkung 3. Im Vorbeygehen ſey es erlaubt, hiervon eine andere Anwendung auf die Beſtimmung der *hiſtoriſchen Wahrſcheinlichkeit* zu machen. Sie gehört hier nicht her, als nur der Aehnlichkeit wegen, allein ſie ſchien mir ſo erheblich zu ſeyn, daſs ſie hier einen Platz haben könne. *Die Wahrſcheinlichkeit der Ausſage eines Zeugen* A, in Hinſicht des Facti F, ſey $\frac{a}{n}$. Sie muſs *beſtimmt werden aus dem Verhältniſs der Menge der Fälle, in denen nach der Erfahrung eine ſolche Ausſage*, (eines ſolchen Zeugen, unter ſolchen Umſtänden,) *wahr befunden wird*, zu der Menge aller Fälle, wo ſie wahr und falſch befunden wird. Man hat noch ſolche Aufzählungen nicht gemacht; man begnügt ſich mit einem allgemeinen Ueberſchlage, da man nämlich jenes Verhältniſs nur einigermaſsen zu ſchätzen ſuchet. So lange ſolcher nicht genauer angegeben werden kann, iſt es denn auch nicht möglich, mehr zu thun, als die hiſtoriſche Glaubwürdigkeit zu *ſchätzen*. Muſs es auch auf immer dabey bleiben; ſo ſieht man dennoch, was

man

man haben müſſe, und was man nicht hat, wenn man beſtimmt darüber urtheilen will.

Die *Wahrſcheinlichkeit eines andern Zeugen B*, für ein Factum G, ſey auf gleiche Weiſe beſtimmt, $\frac{b}{n}$.

Stehen dieſe Facta, F und G, in keiner logiſchen Beziehung auf einander, wodurch die Wahrheit oder Falſchheit des einen von der Wahrheit oder Falſchheit des andern abhängig würde, ſo iſt

1) *die Wahrſcheinlichkeit des Facti F für ſich allein*, $= \frac{a}{n}$.

2) *Die Wahrſcheinlichkeit von G für ſich*, $= \frac{b}{n}$.

3) *Die Wahrſcheinlichkeit*, daſs *F wahr und zugleich G falſch ſey*, $= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$.

4) Die, daſs *G wahr*, und *zugleich F* falſch ſey, $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

5) Die, *daſs beyde wahr* ſind, $= \frac{ab}{nn}$.

6) Daſs *Eins von beyden wahr* ſey, $= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

7) Daſs *keins von beyden wahr ſey*, $= \left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{b}{n}\right) = 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}$.

Sind

Sind die beyden Facta *einerley*, ſo iſt es *Ein durch zwey Ausſagen bezeugtes Factum.* Alsdenn iſt die *Wahrſcheinlichkeit deſſelben*, nicht $= \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$, was gröſſer als die Gewiſsheit ſeyn würde, und der Natur der Sache entgegen iſt; ſondern $= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$. Ein Ausdruck, der dem für das *längſte Leben* ähnlich iſt. Dieſs iſt noch jedesmal ein eigentlicher Bruch, weil $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ dergleichen ſind, aber es kann der Einheit ſehr nahe kommen. Es iſt nämlich in dieſem Fall nichts mehr erforderlich, als daſs nur *nicht beyde Ausſagen* falſch ſind. Alſo die Wahrſcheinlichkeit, daſs *beyde Zeugniſſe falſch ſind*, von der *Gewiſsheit* abgezogen, hinterläſst die *Wahrſcheinlichkeit des Facti.* Dieſe iſt alſo

$$1 - \left(1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}.$$

Der *Ueberſchuſs der Wahrſcheinlichkeit* des bezeugten Facti über ſeine *Unwahrſcheinlichkeit*, oder der Ueberſchuſs ſeiner Wahrſcheinlichkeit über die *Wahrſcheinlichkeit ſeines Gegentheils*, den man gewöhnlich auſser der Wiſſenſchaft *unter Wahrſcheinlichkeit* verſteht, iſt $= 2\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}\right) - 1$.

Iſt die *Zahl der übereinſtimmenden Zeugen noch gröſser*, ſo erhält man gleichfalls einen Ausdruck für die Wahrſcheinlichkeit der bezeugten Sache, der dem für *die Dauer* des *Längſtlebenden* aus *mehreren* Perſonen

ähnlich

ähnlich iſt. Die Wahrſcheinlichkeit nähert ſich immer mehr der völligen Gewiſsheit, und kann ſich ihr über alle Gränzen nähern, je nachdem die Zahl der Zeugen und die Wahrſcheinlichkeit der einzelnen gröſser iſt. Aber ganz erreicht ſie ſolche nicht, noch weniger kann ſie über ſie hinausgehen. *Mehr als gewiſs* kann nicht werden, wenn man eigentlich redet.

Sind die Facta F und G *einander entgegen*, ſo können die Ausſagen 1) *einander gerade widerſprechen*, das iſt, *weder zugleich wahr, noch zugleich falſch* ſeyn. In dieſem Fall iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs *beyde* falſch ſind, ein Nichts, eben ſo, wie die, daſs beyde wahr ſind. Eins von beyden iſt gewiſs. Die *ganze Gewiſsheit liegt alſo in den zwey Fällen*, in dem, daſs die Ausſage von A wahr iſt, und in dem, daſs die andere von B es iſt. Es bleiben hier nämlich dieſe zwey Fälle als möglich zurück. Daher ſind alle mögliche Fälle in $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}$ begriffen. Daraus iſt denn klar, daſs *die Wahrſcheinlichkeit des Facti F* zur *Gewiſsheit* ſich verhalte wie $\frac{a}{n} : \frac{a+b}{n}$, alſo $= \frac{a}{a+b}$ ſey; und die des *Gegentheils*, oder des Facti G, $= \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b}$, das iſt gleich der *Unwahrſcheinlichkeit von F*. Der Ueberſchuſs der Wahrſcheinlichkeit von F, über die des Gegentheils, das iſt, die Erwartung von F iſt $= \frac{a-b}{a+b}$.

2) Die

2) Die beyden Ausſagen können *unbeſtehbar* ſeyn mit einander, aber doch *beyde zugleich falſch.* Eine kann z. B. enthalten, daſs jemand zu einer beſtimmten Zeit an einem Orte geweſen ſey; die andere, daſs er zu derſelben Zeit an einem andern weit davon entfernten ſich befunden habe.

Auch 3) iſt es möglich, daſs zwey Ausſagen *nicht zugleich falſch*, obſchon *zugleich wahr* ſeyn können. Z. B. A bezeuget von *Einigen* etwas, welches B *Einigen*, die unter daſselbe allgemeine Subject gehören, abſpricht. Zwey particuläre einander entgegengeſetzte Ausſagen können beyde zugleich wahr ſeyn, aber nicht beyde zugleich falſch. Dieſs Verhältniſs iſt eine *Entgegenſtehung der zwoten Art.* Einige nennen es *oppoſitio ſubcontraria.* Sie findet nur Statt, wo Eine oder beyde Ausſagen in *Hinſicht des Subjects* unbeſtimmt ſind.

Wie in dieſen Fällen die Wahrſcheinlichkeit des einen oder des andern Facti zu beſtimmen ſey, fällt nicht ſo leicht auf. Ohne hier weiter in dieſe Materie hineinzugehen, will ich bloſs die Reſultate herſetzen, auf welche ich gekommen bin. Sie ſind Folgen derſelbigen allgemeinen Grundſätze, worauf das Vorhergehende beruhet, und ſtimmen auch mit dieſem, wie unter ſich, völlig überein. Dieſs wird noch deſto mehr einleuchten, je mehr man ſie gebrauchen, und aus ihnen weiter ſchlieſsen wird.

Es giebt überhaupt vier Claſſen der *an ſich* möglichen Fälle.

1) Die *Ausſage von A iſt wahr*, und *die von B falſch* $= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$.

2) Die *Ausſage des B iſt wahr*, die *des A falſch*, $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

3) *Beyde ſind zugleich wahr*, $= \frac{ab}{nn}$; und

4) *Keine iſt wahr* $= 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}$.

In der Summe aller Fälle, die zu dieſen vier Claſſen gehören, muſs allemal die *Gewiſsheit* liegen, oder alle unter dieſen begriffene Fälle machen alle mögliche Fälle aus. Man kann unter der Wahrſcheinlichkeit der Claſſe ſich die Summe der dazu gehörigen Fälle vorſtellen. Ihre Summe iſt auch $= 1$. Nun aber fällt durch die beſtimmte Bedingung, daſs beyde Ausſagen nicht zugleich wahr ſeyn können, die *dritte Claſſe* von Fällen als unmöglich weg. Die Gewiſsheit liegt alſo in den übrigen, welche nun als die Summe aller möglichen Fälle anzuſehen ſind. Dieſe Summe macht.

$$\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} + 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn} = 1 - \frac{ab}{nn}.$$

Das *Factum F*, *was auf der Ausſage des A beruhet*, fällt bloſs in die eine Claſſe von Fällen, deren Summe

=

$= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$ iſt. Das zweyte G, bloſs in die Claſſe $\frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$. Die *Wahrſcheinlichkeit des erſten F verhält ſich alſo zur Gewiſsheit, wie die Zahl der Fälle, in denen es Statt findet, zur Zahl aller möglichen*, und iſt alſo $= \frac{\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}} = \frac{na - ab}{nn - ab}$.

Die Wahrſcheinlichkeit des Gegentheils iſt

$= 1 - \frac{na-ab}{nn-ab} = \frac{nn-na}{nn-ab} = \frac{1 - \frac{a}{n}}{1 - \frac{ab}{nn}}$

$= \frac{\frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}} + \frac{1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}}$, das iſt, *gleich der Wahrſcheinlichkeit der beyden entgegengeſetzten Fälle*, die zuſammengenommen das Gegentheil enthalten.

Wenn die Ausſagen auf die zwote Art einander entgegen ſtehen, das iſt, *nicht beyde falſch ſeyn können* nach der Natur der Sache, ſo fällt die vierte Claſſe von Fällen weg, und es bleiben nur $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{ab}{nn}$ Möglichkeiten.

Diejenigen, in denen die Ausſage von A wahr iſt, ſind die erſte und dritte $\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{ab}{nn} = \frac{a}{n}$.

Eben ſo giebt es von Fällen, bey denen die zwote Ausſage wahr iſt, ſo viele, alſo $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{ab}{nn} = \frac{b}{n}$.

Daher iſt die *Wahrſcheinlichkeit des durch die Ausſage von A bezeugten Falli F zur Gewiſsheit*, wie $\frac{a}{n} : \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} = \frac{a}{a + b - \frac{ab}{n}}$.

Dieſe Wahrſcheinlichkeit iſt gröſser als $\frac{a}{n}$, weil $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$ kleiner als die *Einheit* iſt. Die hinzukommende Ausſage von B beſtätiget alſo in etwas die Ausſage des A, indem ſie die Wahrſcheinlichkeit derſelben gröſser macht, als ſolche für ſich allein geweſen ſeyn würde. Dieſs darf nicht befremden. Beyde Ausſagen heben ſich nicht nur nicht auf, weil ſie beyde wahr ſeyn können, ſondern in ſo ferne die eine davon nicht falſch ſeyn kann, ohne daſs die andere wahr ſey, ſo liegt in der Wahrſcheinlichkeit bey jener, daſs ſie falſch ſey, auch die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe wahr ſey. Wenn eine Ausſage *Einigen* etwas beylegt, die andre *Einigen*, (unbeſtimmt, ob denſelbigen oder andern) etwas abſpricht, ſo liegt darin, daſs die letztere verneinende ſich nur auf Einige einſchränkt, eine Beſtätigung der erſtern. Ein anders iſt es, wie weit die Vorausſetzung, daſs nothwendig eine von beyden wahr ſeyn müſſe, wirklich Statt finde. Solche Fälle, wo dieſs nicht als ſchlechthin nothwendig angenommen werden kann, gehören nicht hieher.

Ist die Aussage von B *gewiss falsch*, oder ist $1 - \frac{b}{n} = 1$. oder $b = o$, so wird die Wahrscheinlichkeit des von A bezeugten Facti $= \frac{a}{a} = 1$. So ist es auch nach der Natur der Sache. Eine muss hier wahr seyn, sobald die andere falsch ist.

229.

Satz 68. *Für drey Personen A, B, C, wird die* mittlere Zeit *des Ganzausgestorbenseyns*

$$C\overline{-abc} = S.\frac{(A - \frac{1}{2}A)}{A}.\frac{(B - \frac{1}{2}B)}{B}.\frac{(C - \frac{1}{2}C)}{C}$$

$$= S.\left(1 - \frac{\frac{1}{2}A}{A} - \frac{\frac{1}{2}B}{B} - \frac{\frac{1}{2}C}{C} + \frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}B}{A.\,B}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}C}{A.\,C} + \frac{\frac{1}{2}B\,\frac{1}{2}C}{B\,C} - \frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}B\,\frac{1}{2}C}{A.\,B.\,C}\right).$$

Also $x - C\overline{-abc} = x - x + S.\frac{\frac{1}{2}A}{A} + S.\frac{\frac{1}{2}B}{B}$

$$+ S.\frac{\frac{1}{2}C}{C} - \left(S.\frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}B}{A\,B} + S.\frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}B}{A\,B}\right.$$

$$\left. + S.\frac{\frac{1}{2}B\,\frac{1}{2}C}{B\,C}\right) + S.\frac{\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}B\,\frac{1}{2}C}{A.\,B.\,C} = E\overline{a} + E\overline{b}$$

$$+ E\overline{c} - (C\overline{a\,b} + C\overline{a\,c} + C\overline{b\,c}) + C\overline{abc}.$$

Das ist. *Man nehme die Summe der einzelnen Lebensdauern, ziehe davon ab die Coexistenz jeder zwo Personen,*

welche aus dreyen mit einander verbunden werden können, und lege wiederum hinzu die Dauer der Verbindung der dreyen.

230.

Zuſatz. 1. Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, wird für den Fall, daſs alle gegebene Perſonen *gleich alt* ſind, alſo ihre *gemeinſchaftliche Altersergänzung a*, *die Dauer des Längſtlebenden* $= \frac{n}{u+r} \cdot a$, wenn n die Zahl der Perſonen iſt. Der Beweis ſteht in den *Zuſätzen* zu dieſem Capitel. *)

231.

Anmerkung. Nach der Sterblichkeitstafel ſoll unter einer gewiſſen Zahl von Lebenden von einem beſtimmten Alter, *Einer* das *höchſte* Alter erreichen. Nach *Süſsmilchs* Tafel kommt von 300 Funfzigjährigen *Einer* dahin. Berechnet man dagegen die Dauer der *Längſtlebenden* aus 300 dieſes Alters, ſo wird ſie kleiner ſeyn als die *Altersergänzung* zu 50 Jahren. Daſſelbe findet Statt, nach welcher Sterbensordnung man auch rechnet. Mit andern Worten, es wird auch der Längſtlebende nicht ganz das höchſte Alter erreichen, alſo keiner von den angenommenen 300 Funfzigjährigen wird dahin kommen. Zwar mag ſehr wenig daran fehlen; nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben nicht mehr als $\frac{1}{301}$ der Altersergänzung. Dennoch iſt dieſs immer etwas.

Iſt

*) §. 2.

Iſt es denn nicht erlaubt ſo zu ſchlieſsen: „Von N „Perſonen des Alters *a*, kommt Einer zu 96 Jahren. „Dieſs ſagt die allgemeine Sterblichkeitstafel. Hier iſt „eine ſolche Zahl ſolcher Perſonen. Alſo wird Einer „aus ihnen dahin kommen?“

Dieſer Schluſs iſt fehlerhaft. Die Sterblichkeitstafel ſagt nicht, was man ſie ſagen läſst. Sie ſagt, daſs aus N Perſonen des Alters *a*, *im Durchſchnitt Eine* das höchſte Alter erreiche; *im Durchſchnitt*, das heiſst hier, man vertheile alle 50 jährige Lebende in Haufen von 300, ſo wird aus einem Haufen vielleicht Einer, aus einem andern mehrere, aus einem dritten gar keiner dahin kommen. Das *Mittel* aber aus dieſen genommen giebt auf jeden ſolcher Haufen von 300 im Durchſchnitt Einen. Das iſt es aber nicht, wovon hier die Rede iſt, nemlich von *dem beſtimmten Haufen* N. Jenes heiſst nicht, daſs *jeder* beſtimmte *Haufen* N Einen Höchſtalten liefere. Da man auf die beſondere Qualität der Individuen nicht ſieht, ſo kann der Haufe N nach 10 Jahren ſchon ganz ausgeſtorben ſeyn; kann auch Einen nach 20 oder 30 oder 40 Jahren übrig haben, kann mehr als Einen ins höchſte Alter bringen, und ſo ferner. Es giebt viele Möglichkeiten. *Das Mittel, nicht aus den Zahlen derer, die das höchſte Alter erreichen*, ſondern das *Mittel aus dem Alter, welches die Längſtlebende der verſchiedenen Haufen erreichen, iſt die mittlere Dauer der Längſtlebenden.* Wie die mittlere künftige Lebensdauer eines

Einzelnen nicht ſagt, daſs er ſo alt werde, ſondern daſs dieſs das Mittel aus den verſchiedenen Stufen ſey, die Einzelne erreichen, ſo auch hier. Nicht in einem beſtimmten Haufen ſoll der Längſtlebende gewiſs ſo alt werden, ſondern das Alter der Längſtlebenden aus allen Haufen giebt ſo ein Mittel.

Die allgemeine Sterblichkeitstafel ſagt nichts mehr, als daſs im *Durchſchnitt* von 300 Funfzigjährigen *Einer* das höchſte Alter erreiche; ſie ſagt das nicht von jedem beſondern Haufen, worein man die wirklich Lebenden von jenem Alter vertheilen mögte. Es würde widerſinnig ſeyn, ſie ſo zu erklären. So müſsten jede 300 Funfzigjährigen, nach allen beliebigen Combinationen Einen haben, der zum 96ſten Jahre kommt; man mögte lauter Schwache, oder lauter Starke zuſammen nehmen, ſo gar lauter Kranke oder lauter Geſunde. Aber wenn auch alle Individuen an Geſundheit und Conſtitution für gleich gehalten werden, *ſo geht es doch nicht an*, daſs jede beſondere Combination von 300, das iſt, eine ſolche Zahl von Individuen, wie man ſie auch nimmt, Einen enthalte, der 96 Jahr alt wird. Man ſetze unter den 300, A, B, C, u. ſ. f. ſey ſo Einer, und unter 300 andern a, b, c, u. ſ. f. auch Einer. Sollte nun unter jeden 300, wie man ſie aus jenen und dieſen A, a, B, b, u. ſ. f. verbinden kann, ein Candidat des höchſten Alters begriffen ſeyn, ſo müſsten ihrer viel mehr als *zwey* unter den 600 ſich befinden. Sollten A und *a*, z. B. die beyden ſeyn;

ſo

so wird ohngefähr der vierte Theil aller möglichen Verbindungen keinen von diesen beyden in sich enthalten, aus denen doch auch gleichwohl Einer das Ziel erreichen sollte.

Wahr ist es, bey der Anwendung, die man gewöhnlich von der allgemeinen Tabelle macht, scheint angenommen zu werden, sie enthalte wahre *Allgemeinsätze von jedem Haufen* Menschen vom bestimmten Alter. Wir schliessen, von 10 Funfzigjährigen sind fast die Hälfte schon im 67sten Jahre todt, darum weil nach der Tabelle alsdenn nicht mehr als 152 von 300 leben. Wie können wir so schliessen, wenn das nicht wahr ist von jeden 300 ohne Ausnahme?

Das hiesse allerdings sehr übel geschlossen, wenn die Sätze, die wir aus dem Grundsatz ziehen, den Sinn haben sollten, dass z. B. von den bestimmten 10 Lebenden im 50sten Jahr, von A, B, C, u. s. w. gewiss nur Fünf im 67sten Jahr übrig sind. Aber so wissen wir ja, dass die Bestimmung der Lebensdauer und auch der Leibrenten eine Bestimmung dessen sey, was sich nur als ein *Mittel* oder *Durchschnitt* in mehreren Fällen zeiget. Es wird nicht erwartet, dass es bey jedem einzelnen Falle besonders zutreffe, sondern dass wenn in einem Fall, bey einem Individuo oder bey einem Haufen etwas zu viel erfolgt, in dem andern zu wenig geschehen werde. Die Rechnung giebt nicht das Wirkliche bey einzelnen Fällen, sondern *das Mittel aus dem Wahr-*

ſcheinlichen. Wenn man es erwartet in einem einzelnen Fall, ſo erwartet man, was man nicht erwarten ſollte, was nach groſser Wahrſcheinlichkeit nicht erfolgt. Aber wenn man *in mehreren Fällen zuſammen* ſo viel erwartet, als das Mittel für jeden beträgt, ſo wird der wirkliche Erfolg hier mehr, dort weniger geben, im Ganzen aber mit der Erwartung übereinſtimmen.

Auf dieſe Art, meine ich, fallen alle Zweifel von ſelbſt weg, die hier aufſtoſsen könnten. Ein Mann, wie *d' Alembert* traf dergleichen an. Es muſs alſo wohl Stellen geben, wo längſt dem rechten Wege ſich Abwege finden, die der gröſste Theil der Wanderer und der Nachwanderer vielleicht glücklich vermeidet, die aber den, der auch zu den Seiten hin die Augen wirft, und die rechte Bahn nicht nur halten, ſondern auch jedesmal ſich verſichern will, daſs er ſie halte, zweifelhaft machen können.

232.

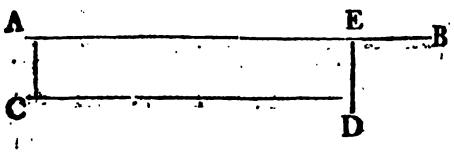
Zuſatz 2. Der 68ſte Satz im §. 229, kann allgemein für *mehrere* Perſonen ausgedruckt werden. Man nehme 1) die Summe aller *einzelnen* Lebensdauern, 2) die Summe der *Verbindungsdauer von je zwo und zwo;* 3) die Summe derſelben von *dreyen*, ſo viele dergleichen Verbindungen bey der gegebenen Zahl von Perſonen möglich ſind, und 4) ſo ferner die Coexiſtenzen von *mehreren*, bis die letztere die Verbindungsdauer *aller* gegebenen iſt,

Von

Von dieſen ſo gefundenen Summen wird die zwote von der *erſten abgezogen;* dann die dritte wiederum *addirt*, und ſo ferner, die folgenden wechſelsweiſe ſubtrahirt und addirt. So bekommt man die Dauer des Längſtlebenden. Siehe die *Zuſätze* zu dieſem Capitel.*)

233.

Anmerkung. Man kann die *Dauer des Längſtlebenden* und die davon abhangenden Gröſsen auch aus andern Grundſätzen herleiten, die in ihrer Anwendung leichter und weiter führen. Es ſey AB die Dauer des Längſtlebenden *unter zwoen Perſonen*, die mittlere Lebensdauer *der zwoten*, mit der längſtlebenden verbundenen Perſon ſey CD; oder *Einer* lebe durch die Zeit AB, der *Andere* durch CD; ſo iſt AE = CD *die Dauer der Verbindung von beyden.*

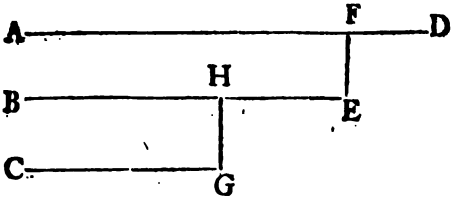


Nun iſt $AB+CD=E\overline{a}+E\overline{b}$, das iſt, ſo groſs als die Summe der einzelnen Lebensdauer der Perſonen. Der Eine lebt länger, der andere weniger, als ſeine mittlere Lebensdauer, allein die beyden Lebenswährungen machen nicht mehr noch weniger als die Summe ihrer mittlern Lebensdauer. Nimmt man alſo dieſe Summe und zieht davon ab die Dauer der Verbindung, ſo be-

kommt man A B, die Dauer des *Längſtlebenden* $= E\overline{a} + E\overline{b} - C\overline{ab}$.

Dieſs iſt auch ſo klar. Wenn man die einzelne Lebensdauer der beyden addirt, ſo hat man 2. A E, oder die *Dauer der Verbindung* zweymal, und E B, oder die *Dauer des Ueberlebens* des Einen zuſammen. Man ziehe ſo viel Jahre als doppelt gezählet ſind, wiederum ab, ſo bekommt man die Dauer des Längſtlebenden.

Für drey Perſonen nehme man an: die *Längſtlebende* erreiche AD Jahre; die Nächſtvorherſterbende, B E, und die Erſte im Sterben C G. Die Summe AD + BE + CG muſs der Summe der einzelnen Lebensdauer $E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c}$ gleich ſeyn.



Allein wenn man dieſe Summe nimmt, ſo hat man CG *dreymal*, und BE *zweymal* gerechnet, da jede doch in dem längſten Leben nur einmal gerechnet werden ſollte: BE iſt aber *die Zeit, bis wohin noch zwey zuſammen gelebet haben*, oder *die Zeit, in der zwey aus dreyen abgegangen ſind*, und CG iſt *die Dauer der Verbindung aller dreyen*, oder *die Zeit, in der Einer von dreyen abgeht*. Daher giebt $E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c} - BE - CG$ die Dauer des Längſtlebenden. Es iſt $CG = C\overline{abc}$ die *Verbindungsdauer aller dreyen*, wie für ſich klar iſt.

Nur

Nur B E iſt noch zu ſuchen. Dieſs iſt die Zeit, bis wohin immer noch zwey aus dreyen beyſammen leben, nach deren Verlauf *zwey aus dreyen abgeſtorben ſind*, oder auch *die Dauer des längſten Zuſammenlebens zweyer aus dreyen.*

Sie wird ſo gefunden. Drey Perſonen geben drey Verbindungen zu zwoen, nämlich A. B, A. C, B. C. Dieſe drey Verbindungen dauern alle, ſo lange alle drey Perſonen leben, das iſt, durch die Zeit C G. So bald aber Eine aus dreyen abgeht, bleibt auch nur Eine Verbindung übrig. Alſo in der Zeit H E hat nur *Eine* davon gedauert.

Nimmt man folglich alle drey Verbindungen zwoer Perſonen zuſammen, $C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}$, ſo hat man B H *dreymal* und H E *einmal*, davon alſo 2 B H abgezogen, bleibt B E übrig; das iſt,

$$C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}} - 2\,C_{\overline{abc}} = BE.$$

Daraus wird

$$AD = E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}} - (C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}) + 2\,C_{\overline{abc}}$$
$$- C_{\overline{abc}} = E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}} - (C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}) + C_{\overline{abc}}.$$

Es läſst ſich daraus auch die Zeit HE, die *Dauer der bloſsen Verbindung von Zweyen*, das iſt, in der *nur zwey* am Leben ſind, ingleichen F D die Dauer des *Ueberlebens* des *Längſtlebenden* über die andern beſtimmen. Hier habe ich nur die erſten Gründe davon beygebracht. Etwas weiter iſt dieſe Unterſuchung in den *Zuſätzen* ausgeführt. *)

234.

*) §. 4 u. f. f.

234.

Satz 69. Die Dauer des Ueberlebens des Längſtlebenden unter zwoen, iſt gleich der Summe der einzelnen Lebensdauern weniger der Dauer der Verbindung zweymal genommen; das iſt $= E\overline{a} + E\overline{b} - 2\,C\overline{ab}$.

Beweis. Es iſt offenbar, daſs wenn von der ganzen Dauer des *Längſtlebenden* die *Zeit des Zuſammenlebens* abgezogen wird, ſo bleibt die Zeit, die der erſtere *allein* nach dem andern noch fortlebet, übrig. Die *Dauer des Längſtlebenden* iſt $= E\overline{a} + E\overline{b} - C\overline{ab}$ (§. 225.) Daher die Dauer des *Zuletztalleinlebens* $= E\overline{a} + E\overline{b} - 2\,C\overline{ab}$.

235.

Zuſatz 1. Sind *drey* Perſonen gegeben, ſo iſt die Dauer des Längſtlebenden
$= E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c} - (C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc}) + C\overline{abc}$.
Davon muſs die Zeit abgezogen werden, bis wohin noch wenigſtens zwey zuſammen leben, das iſt $C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc} - 2\,C\overline{abc}$. (§. 233.) Dieſs giebt für die Zeit des *Alleinnachlebens* des Längſtlebenden $E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c} - 2(C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc}) + 3\,C\overline{abc}$.

236.

Zuſatz 2. Die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs von zweyen A und B, *inſonderheit* A der *Längſtlebende* ſey, iſt einerley mit der *Wahrſcheinlichkeit*, daſs A, B überlebe (§. 168).

Und

Und *die Dauer des Ueberlebens*, oder *des Lebens nach der Trennung*, iſt $E\overline{a} - C\overline{ab}$.

237.

Zuſatz 3. Eben ſo iſt die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs A inſonderheit unter dreyen der *Längſtlebende* ſey einerley mit der *Wahrſcheinlichkeit*, daſs A die beyden andern überlebe. Und die *Dauer des Ueberlebens* des A nach dem Tode der beyden andern iſt

$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac}) + C\overline{abc}$.

Zweyter Abſchnitt.

Von Renten auf die Dauer des Längſtlebenden.

238.

Satz 70. Der Wehrt des längſten Lebens, oder *der baare Wehrt einer Rente, welche ſo lange gezogen wird, als noch Einer aus mehreren am Leben iſt, wird überhaupt auf dieſelbige Art aus den Wehrten der einfachen Leibrenten und der Verbindungsrenten beſtimmt, wie die Dauer des längſten Lebens aus der Dauer des einzelnen Lebens und der Verbindungen.*

Beweis. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs im $n$ten Jahr noch Eine Perſon am Leben ſey, iſt gleich der Einheit weniger der Wahrſcheinlichkeit, daſs ſie alle geſtorben ſind. Alſo

$$= \left(\frac{\overline{A}^n}{A} + \frac{\overline{B}^n}{B} + \frac{\overline{C}^n}{C} + +\right) - \left(\frac{\overline{A}^n\ \overline{B}^n}{A.\ B}\right.$$

$$\left. + \frac{\overline{A}^n\ \overline{C}^n}{A.\ C} + \frac{\overline{B}^n\ \overline{C}^n}{B\ C}\right) + \frac{\overline{A}^n\ \overline{B}^n\ \overline{C}^n}{A.\ B.\ C} + +$$

Der *baare* Wehrt der Ausgabe für dieſes Jahr iſt alſo auch

$$= \left(\frac{\overline{A}^n}{A\,r^n} + \frac{\overline{B}^n}{B\,r^n} + \frac{\overline{C}^n}{C\,r^n} + +\right)$$

$$- \left(\frac{\overline{A}^n\ \overline{B}^n}{A.\ B\,r^n} + \frac{\overline{A}^n\ \overline{C}^n}{A.\ C\,r^n} + \frac{\overline{B}^n\ \overline{C}^n}{B.\ C\,r^n} + +\right)$$

$$+ \frac{\overline{A}^n\ \overline{B}^n\ \overline{C}^n}{A.\ B.\ C\,r^n} + +$$

Und die Summe aus allen Jahren $= (\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} + +)$
$- (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc} + +) + \lambda\overline{abc} + +$.

239.

Zuſatz. 1. Daraus folgt dann der *Wehrt der Rente auf das längſte Leben* von Zweyen, *a* und *b*,
$= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{ab}$.

Zuſatz 2. Der *Wehrt der Rente auf das längſte Leben aus dreyen*
$= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - \lambda\overline{ab} - \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{bc} + \lambda\overline{abc}$

240.

Zuſatz 3. Der *Wehrt einer Leibrente, welche Einer von beyden A oder B zu heben hat, nach dem Tode des andern*, iſt $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - 2\,\lambda\overline{ab}$. (§. 134.)

Hat

Hat *A allein* die Erwartung, B nicht, ſo iſt der Wehrt $= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$, Cap. III. §. 129.

241.

Zuſatz 4. Die Rente für den *Längſtlebenden aus dreyen* iſt $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc}$. §. 233.

Zuſatz 5. Die Rente für den Nachlebenden aus drey Perſonen auf Lebenszeit iſt $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - 2(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + 3\lambda\overline{abc}$. §. 229.

Zuſatz 6. Hat *A allein* die Erwartung einer Leibrente nach dem Tode von B und C, ſo iſt der Wehrt dieſer Erwartung $= \lambda\overline{a} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \lambda\overline{abc}$, wie Cap. IV. §. 195.

242.

Anmerkung. Es läſst ſich hier bey den Renten auch dieſelbe Art zu ſchlieſsen anwenden, die vorher §. 233, bey der Beſtimmung der *Dauer* gebraucht iſt. Soll z. B. die Rente des Längſtlebenden unter zweyen A und B, gefunden werden, ſo iſt es offenbar daſſelbe, als wenn jedem inſonderheit, dem A ſowohl als B, eine *Leibrente* bezahlet würde, mit der Bedingung, daſs von dieſen zweyen jährlichen Renten *Eine* jedesmal zurück gegeben werde, ſo lange beyder Verbindung dauert. Auf dieſe Art wird nur *Eine* Rente bezahlet, ſo lange Einer von beyden lebet. Daraus folgt dann von ſelbſt, *der Wehrt*

der Rente des Längſtlebenden ſey gleich der Summe der Renten für die einzelnen Leben, wenn die Verbindungsrente davon abgezogen wird.

Eben ſo erhellet, daſs es einerley ſey, eine Rente *an Einen von beyden*, an A oder an B, nach dem Tode des andern zu bezahlen; und an *alle beyde von nun an*, an jeden eine zu zahlen, ſich aber, ſo lange A und B beyſammen leben, beyde Renten zurück geben zu laſſen. Das heiſst ſo viel, als nichts zahlen, ſo lange beyde zuſammen leben. Daraus folgt dann der Wehrt *der Rente des Nachlebens* $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{ab}$.

So geht man leicht weiter. Soll die Rente an den *Längſtlebenden aus dreyen* bezahlet werden, ſo zahle man an deſſen Statt ſie an alle drey, an jeden Eine, jedoch mit der Bedingung, daſs ſo lange alle *drey* in Verbindung ſind, *zwo*, und ſo lange nachher noch zwey in Verbindung ſind, *Eine* Rente wieder zurück gegeben werde. Denn auf dieſe Weiſe wird jedesmal nur Eine Rente wirklich bezahlet. Dieſs iſt aber wiederum ſo viel, als wenn *Eine* Rente zurückgegeben werden ſoll, ſo lange noch zwey beyſammen leben, und noch *Eine* dazu, ſo lange *alle drey* beyſammen leben.

Renten aber zu finden für die längſte Verbindung *von zweyen aus dreyen*, kann man ſo ſchlieſsen. Man zahle ſo viele Verbindungsrenten für zwey, als Verbindungen der Art aus drey Perſonen vorhanden ſind, das iſt, man

zahle

zähle drey ſolche Renten, weil drey ſolcher Verbindungen aus drey Perſonen entſtehen. Davon nehme man aber wiederum *zwey* jedesmal zurück, ſo lange die Verbindung aller *drey* beſtehet. Auf dieſe Art zahlet man nur Eine, ſo lange eine Verbindung von zweyen da iſt. Folglich iſt die Rente für die längſte Verbindung von zwey aus dreyen $= \lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc} - 2\lambda\overline{abc}$. Und weil nun dieſer Wehrt nebſt der Verbindungsrente aller dreyen, das iſt zuſammen, $\lambda\overline{\overline{ab}} + \lambda\overline{\overline{ac}} + \lambda\overline{\overline{bc}} - \lambda\overline{\overline{abc}}$ von der Summe der *einzelnen Renten* abgegeben werden ſoll, um den Wehrt der Rente auf den Längſtlebenden zu haben, ſo wird dieſer letztere.

$= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{\overline{abc}}$.

So folgt auch auf dieſe Art, daſs der Wehrt der Renten, aus den gegebenen Renten auf dieſelbe Art gefunden werde, wie die Dauer aus der gegebenen Dauer der einzelnen Leben und der Verbindungen.

243.

Satz 71. Der Wehrt einer Leibrente für A, die A, ſo lange B lebet, mit B zur Hälfte theilen ſoll, iſt der ganzen Leibrente von A gleich, wenn davon die Hälfte des Wehrts der Verbindung von A und B abgezogen wird; oder $= \lambda\overline{a} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

Beweis. Es iſt nämlich klar, daſs man ſich die Sache ſo vorſtellen könne. Die Rente werde A ganz gegeben,

nur, ſo lange B mit A lebet, ſollte A jedesmal die Hälfte beym Empfang zurückzahlen. Alsdenn iſt das, was A *haben* ſoll $= \lambda\overline{a}$, und was er *zurück zahlen* ſoll $= \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$. Beydes zuſammen alſo $\lambda\overline{a} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

Anders. Man kann auch ſo ſchlieſsen: A ſoll gleich von Anfang an empfangen die *Hälfte* ſeiner Leibrente $\frac{\lambda\overline{a}}{2}$, und nach dem Tode von B noch *jährlich* $\frac{1}{2}$ mehr, ſo lange A überlebet, das iſt noch $\frac{\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}}{2}$ mehr. §. 240.

Folglich zuſammen $\lambda\overline{a} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

244.

Zuſatz. Der Wehrt der Erwartung der Perſon B iſt $= \lambda\overline{b} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$; und *beyde Erwartungen* von A und B *zuſammen* $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{ab}$, der Wehrt der Rente für den Längſtlebenden oder für zwey Leben nach einander. §. 239.

245.

Satz 72. Der Wehrt einer Leibrente von A, welche ſo lange B und C mit A leben, unter dieſe drey, und ſo lange Einer von beyden, B oder C mit A lebet, unter dieſe zwey gleich vertheilet werden, nach dem Abſterben von B und C aber ganz an A fallen ſoll, iſt

$$= \lambda\overline{a} - \frac{(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac})}{2} + \frac{\lambda\overline{abc}}{3}.$$

Beweis.

Beweis. Es iſt in dem angenommenen Fall ſo, als wenn 1) A die volle Leibrente empfangen, dabey aber 2) ſo lange entweder B oder C mit ihm leben, jedesmal die Hälfte zurückgeben ſoll, und 3) auſserdieſs noch $\frac{1}{6}$ derſelben ſo lange, als alle drey zuſammen leben. Da nun der Wehrt einer Rente auf Eine von den beyden Verbindungen, A mit B, und A mit C, ſo viel iſt als $\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{abc}$ (§. 238. 242. und *Zuſätze* zu dieſem Cap. *)), ſo geben die obigen Stücke zuſammen

$$\lambda\overline{a} - \frac{(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac})}{2} + \frac{\lambda\overline{abc}}{2} - \frac{1}{6}\lambda\overline{abc}$$

$$= \lambda\overline{a} - \frac{(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac})}{2} + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}.$$

Anders. A ſoll $\frac{1}{3}$tel der Rente gleich genieſsen, dieſs macht $\frac{1}{3}\lambda\overline{a}$, dazu noch $\frac{1}{6}$tel mehr, nachdem die Verbindung aller drey aufhöret, das iſt $\frac{1}{6}\lambda\overline{a} - \frac{1}{6}\lambda\overline{abc}$; und endlich noch $\frac{1}{2}$ nachdem die Verbindungen, A mit B, oder A mit C, erloſchen ſind, das iſt, noch $\frac{1}{2}\lambda\overline{a} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} - \lambda\overline{abc})$.
Folglich zuſammen $\frac{1}{3}\lambda\overline{a} + \frac{1}{6}\lambda\overline{a} - \frac{1}{6}\lambda\overline{abc}$
$+ \frac{1}{2}\lambda\overline{a} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \frac{1}{2}\lambda\overline{abc}$
$= \lambda\overline{a} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}.$

246.

Zuſatz 1. So wie für zwo Perſonen, A und B, der Wehrt der Erwartung *beyder zuſammen* ſo groſs iſt als

*) *Zuſätze* §. 11,

die Erwartung des Längſtlebenden, ſo iſt auch, wenn drey Perſonen genommen werden, die Erwartung von A

$= \lambda\overline{a} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}$;

Die von B

$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{bc}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}$;

Die von C

$= \lambda\overline{c} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}$.

Die Summe davon macht

$\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc}$,

das iſt die Erwartung des Längſtlebenden aus dreyen.

Zuſatz 2. Sollen die gegebenen zwo oder drey Perſonen, ſo lange mehrere von ihnen zuſammen leben, nach verſchiedenen Verhältniſſen die Rente theilen, bis der Ueberlebende ſie endlich ganz oder auch nur einen Theil davon erhält, ſo läſst ſich der Wehrt der Erwartung nach denſelben Grundſätzen berechnen.

247.

Satz 73. „Wenn die Zahl der gegebenen Perſonen „N iſt, die ſo lange *alle* oder *einige* von ihnen beyſammen leben, die Rente zu gleichen Theilen genieſſen, „davon der Längſtlebende ſie aber *allein* bekommt, ſo iſt „der Wehrt der Erwartung für eine beſtimmte Perſon „A ſo groſs als die Leibrente derſelben, wenn davon die „Summe aller Verbindungsrenten auf zwo Perſonen, „worunter A iſt, halbirt, abgezogen, und wiederum „$\frac{1}{3}$-tel der Summe aller Verbindungsrenten auf *drey*,

„worun-

„worunter A iſt, addiret; dann $\frac{1}{4}$tel der Summe der „Renten der nächſthöhern Verbindungen, worin *A* iſt, „*abgezogen*, und nach dieſer Regel fortgefahren wird, „bis zuletzt $\frac{1}{N}$tel der Verbindungsrente *aller gegebenen* „Perſonen abgezogen oder addirt iſt, je nachdem die „Zahl N *gerade* oder *ungerade* iſt.“

*Den Beweis ſiehe in den Zuſätzen zu dieſem Capitel.**)

Zuſatz. Wenn alle gegebene Perſonen von gleichem Alter ſind, ſo iſt der Wehrt der *Erwartung von A*

$$= \lambda\,\overline{a} - \frac{N-1}{2}\cdot\lambda\,\overline{a\,a} + \frac{\overline{N-1}.\ \overline{N-2}}{1.\quad 2}\cdot\lambda\,\overline{a^3}$$

$$- \frac{1}{N}\lambda\,\overline{a\,a\,a\ldots},$$

248.

Anmerkung. Dieſs iſt der Grundſatz bey *Tontinen*, wenn der Wehrt der Erwartung für einzelne Intereſſenten beſtimmt werden müſste. Bekanntlich ſind *Tontinen geſellſchaftliche Renten*, die unter den Intereſſenten, welche gewöhnlich von gleichem oder doch faſt gleichem Alter genommen werden, nach Kopfzahl zu vertheilen ſind, bis endlich der zuletztlebende ſie allein ganz empfängt. Dieſs iſt das Weſentliche. Das Uebrige läſst ſich nach Willkühr auf verſchiedene Art einrichten. Der Hauptpunct iſt auf Seiten des Entrepreneurs, zu wiſſen, wie hoch er die Renten ſetzen könne? Nun iſt

*) §. 17. 18.

aus dem obigen klar, daſs der Wehrt der an die Geſellſchaft bis zu ihrem gänzlichen Ausſterben zu zahlenden Rente ſo groſs ſey, als der *Rentenwehrt für den Längſtlebenden* aus den gegebenen Mitgliedern. Dafür kann, wo die Zahl der Perſonen groſs iſt, der Wehrt einer Zeitrente *auf die Dauer des Längſtlebenden*, und weil dieſe Dauer, bey einer groſsen Anzahl von Perſonen, wenig von der *Altersergänzung* verſchieden iſt, der Wehrt *der Zeitrente auf die Altersergänzung* genommen werden. Etwas zu Gunſten der Caſſe darf man rechnen. Niedriger darf ſie aber auch, um ein Erhebliches nämlich, nicht angeſchlagen werden, es ſey denn die Zahl der Perſonen geringer als die Altersergänzung; denn in dieſem Fall wird ſie auf die obige Art merklich zu hoch geſchätzt. Höher aber gar nicht, als etwa um ſo viel, als für die Verwaltung in Anſchlag zu bringen iſt. Sonſt werden die Intereſſenten vervortheilt.

Das zweyte, worauf es nächſtdem ankommt, iſt die Beſtimmung der Wehrte der Erwartung eines *Tontiniſten*. Hierzu dient der Satz in dem nächſtvorhergehenden §. Iſt die Zahl der noch lebenden Theiler ſehr groſs, ſo kann man ſeinen Wehrt nahe genug finden, wenn der Wehrt der ganzen Rente, wie vorher, einer Zeitrente auf die Altersergänzung gleich geſetzet, und dann durch die Zahl der Perſonen dividirt wird. Es wird vorausgeſetzet, daſs dieſe letztern *alle* ſehr nahe von gleichem Alter ſind. *)

Näher

*) *Zuſ.* §. 20.

Näher wird es doch in jedem Fall zutreffen, wenn man sich bey den Verbindungsrenten auf mehr als zwo Personen, einer Voraussetzung bedient, die eine Art von Näherung ist, wenn man nämlich annimmt, dass sie in einer geometrischen Proportion abnehmen, so dass $\lambda\overline{a}\,;\lambda\overline{a\,a} = \lambda\overline{a\,a}\,:\lambda\overline{a\,a\,a}$, und so ferner die Rente auf n verbundene Personen zu der auf $n+1$ sich verhalte wie $\lambda\overline{a}\,:\lambda\overline{a\,a}$. Dieſs vorausgesetzt sey $\frac{\lambda a}{\lambda a\,a} = t$, so wird der *Wehrt der Erwartung für eine einzelne Person der Gesellschaft* durch $\left(1-\left(1-\frac{1}{t}\right)^n\right)\cdot\frac{t}{n}\cdot\lambda\overline{a}$ *gegeben, wo n die Zahl der Personen* ist.

Aber $1-\frac{1}{t}$ ist ein eigentlicher Bruch, und wenn also n sehr grofs ist, so kann $\frac{t}{n}\,\lambda\overline{a}.\left(1-\frac{1}{t}\right)^n$ als ein ganz unbeträchtliches Stück weggelassen werden, und der gesuchte Wehrt wird $\frac{t}{n}\cdot\lambda\overline{a}$ seyn. Ist n aber klein, so ist auch $\left(1-\frac{1}{t}\right)^n$ leicht zu berechnen, und darf in diesem Fall nicht weggelassen werden. Z. B. Es sey $n=2$, und $a = 40$ Jahr, so ist $\lambda\overline{a} = 13,1565$, und $\lambda\overline{a}^2 = 9,9484$; daher $t=1,3$, und $\frac{1}{t} = 0,74$. Daraus wird $\frac{t}{n}\,\lambda\overline{a}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2$ $= \frac{13.1565.1.3}{2}\cdot 0,0676 = 8,55.0,0676 = 0,57798$.

Zusätze zum fünften Capitel.

Von der Dauer des Längstlebenden.

I.

Beweis des Zusatzes im §. 232.

Die mittlere *Zeit* des *Ganzausgestorbenseyns* einer Verbindung von mehreren Personen $(C\overline{\ a\ b\ c}\ldots)$ ist überhaupt in der Reihe

$$\int\left(\frac{A-{}^{n}\overline{\ }A}{A}\cdot\frac{B-{}^{n}\overline{\ }B}{B}\cdot\frac{C-{}^{n}\overline{\ }C}{C}\cdot\ldots\right)$$

enthalten, wenn diese bis zu dem letzten Lebensjahr, das ist, so viel Jahre durchgenommen wird, als die Altersergänzung der *jüngsten* Person x beträgt. Nun ist das allgemeine Glied dieser *Summe*

$$=1-\left(\frac{{}^{n}\overline{\ }A}{A}+\frac{{}^{n}\overline{\ }B}{B}+\frac{{}^{n}\overline{\ }C}{C}+\ldots\right)$$

$$+\left(\frac{{}^{n}\overline{\ }A}{A.}\frac{{}^{n}\overline{\ }B}{B}+\frac{{}^{n}\overline{\ }A}{A.}\frac{{}^{n}\overline{\ }C}{C}+\frac{{}^{n}\overline{\ }B}{B}\frac{{}^{n}\overline{\ }C}{C}+\ldots\right)$$

$$-\frac{{}^{n}\overline{\ }A}{A.}\frac{{}^{n}\overline{\ }B}{B.}\frac{{}^{n}\overline{\ }C}{C}$$ Wenn für $\frac{{}^{n}\overline{\ }A}{A}$, y, für $\frac{{}^{n}\overline{\ }B}{B}$, y', für $\frac{{}^{n}\overline{\ }C}{C}$, y'', und so weiter y''', y^{IV} gesetzet wird; so ist der vorige *Terminus generalis* $(1-y).(1-y').(1-y'').(1-y''').(1-y^{IV})$ woraus nach den bekannten Eigenschaften der *Gleichung* entstehet

$1-$

$1 - (y + y' + y'' + y''') + (yy' + yy'' + yy''' + y'y'' + y'y''' + y''y''') - yy'y'' - yy'y''' - y'y''y''' - yy''y''' + yy'y''y'''$. Dieſs Glied enthält in ſeinem zweyten Theil die Summe *aller einzelnen Wehrte*, in dem *dritten* die *Summe aller Producte* aus *zweyen*, in dem *vierten* die *Summe aller Producte von dreyen;* und ſo ferner. Gleichfalls iſt es klar, daſs die Theile wechſelsweiſe negativ und poſitiv ſind.

Folglich iſt die Summe der Reihe, wozu dieſs allgemeine Glied gehört, $S\overline{1+1+}+$ bis x, (das iſt x), weniger der *Summe* aller einzelnen Exiſtenzen, dazu *addirt* die *Summe aller Coexiſtenzen* von *zwey* und *zwey*, ſo viel dergleichen aus der gegebenen Zahl der Perſonen ſich machen. Dann wiederum abgezogen die Summe aller Verbindungen zu drey u. ſ. f.

Laſs die mittlere Lebensdauer einer *einzelnen* Perſon im allgemeinen bezeichnet werden durch $E\overline{I}$; die Dauer der Verbindung von *zweyen* durch $C.\overline{II}$; die von *dreyen* durch $C.\overline{III}$, und ſo ferner, und die *Summe* derſelben durch $S.E\overline{I}$; $S.C.\overline{II}$; $S.C.\overline{III}$ u. ſ. f. Dann iſt zufolge des obigen die Zeit des *Ganzausgeſtorbenſeyns* mehrerer Perſonen, oder

$C\overline{-abc} = x - S.E\overline{I} + S.C.\overline{II} - S.C.\overline{III} + S.C.\overline{IV} - +$

Unmittelbar folgt daraus die *Dauer des Längſtlebenden*

$= x - C\overline{-abc}_{,,,} = S.E\overline{I} - S.C\overline{II} + S.C\overline{III} + -$

2.

Beweis des §. 230.

Nach der Hypotheſe *vom gleichförmigen Abſterben*, iſt, wenn *alle* gegebene *Perſonen gleich alt* ſind, die Dauer des Längſtlebenden $= \frac{n}{n+1} x$, wenn x die *Altersergänzung* iſt, und n die *Zahl der Perſonen*.

Es iſt nämlich alsdenn die Zeit des *Ausgeſtorbenſeyns aller* $= Sx^n dx = \frac{x^n}{n+1}$. Alſo $x - \frac{x^n}{n+1} = \frac{n}{n+1} x^n$ die Dauer des *Längſtlebenden*.

Dazu führet auch der obige allgemeine Ausdruck $S.E\overline{I} - S.C\overline{II} + S.C\overline{III} - +$

Denn in dem angenommenen Fall iſt die Dauer jeder einzelnen Perſon $= \frac{1}{2} x$; die Dauer jeder Verbindung von *zweyen*, $= \frac{1}{3} x$; jeder von *dreyen* $= \frac{1}{4} x$, und jeder von $n = \frac{1}{n+1} x$.

Nun iſt die Zahl der *einzelnen* Exiſtenzen aus n Perſonen $= n$; die Zahl der Verbindungen zu *zweyen* $= \frac{n.\overline{n-1}}{1.2.}$; der zu *dreyen*, $= \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}$; der zu $n-1 = \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\ldots 2}{1.2.3\ldots n-1} = n$; und der zu $n = 1$.

Daraus

Daraus wird die Dauer der Längstlebenden

$$= \frac{n}{2}x - \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{1}{3}.x$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{1}{4}.x - + = S.$$

Man setze $r-1=n$, so wird

$$S = x\left(\frac{r-1}{2} - \frac{r-1.r-2}{2.3} + \frac{r-1.r-2.r-3}{2.3.4} - +\right)$$

und $\frac{r}{1}S = x.\left(\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2} - \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + -\right)$

$= \left((1-1)^r - 1 + r\right)x$, weil der Factor von x gleich ist der Summe der Coefficienten des binomii, ausser dem ersten, und also, $= (1-1)^r - (1-r)$.

Daher $S = \frac{r-1}{r}.x = \frac{n}{n+1}.x$.

3.

Anmerkung. Man kann noch auf eine andere Art zu diesen Sätzen kommen. Sie ist derjenigen ähnlich, die in den *Zusätzen* zum zweyten Cap. §. 7, bey den einfachen Leibrenten gebraucht ist. Die Zahl der verbundenen Personen sey n, die Frage ist, wie lange *Eine* aus ihnen übrig seyn wird? Nun ist das Product aus den Gestorbenen für jedes $m$te Jahr

$= (1-{}^m y).(1-{}^m y').(1-{}^m y'') - - - =$

${}^m Z.{}^m Z'.{}^m Z'' - - - =$ der Summe der nach m Jahren *ganz ausgestorbenen* Verbindungen zu n, wenn das

Product

Product der Anfangszahlen in einander A. B. C ——— die *anfängliche Zahl dieſer Verbindungen* iſt. Ferner iſt auch das *Increment der ganz ausgeſtorbenen* Verbindungen, in dem $m+1$ten Jahre, nämlich $\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$, (was aber mit *dem Increment der aufhörenden Verbindungen*, wohin auch die *bloſs getrennten* gehören, nicht verwechſelt werden muſs) gleich der Zahl der Verbindungen zu n, welche im $m+1$ten Jahre (und zwar im Anfang deſſelben) *ganz ausſterben*. Aber eben, weil ſie dann erſt ganz ausſterben, ſo iſt bis dahin immer *Eine* der verbunden geweſenen Perſonen am Leben geweſen.

Alſo haben die im $m+1$ten Jahr ganz ausſterbende Verbindungen $\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$, und zwar jede für ſich m Jahre durch, eine oder mehrere Perſonen aus ſich übrig gehabt, das iſt, *die Dauer des Längſtlebenden aus jenen Verbindungen iſt m Jahre geweſen*. Das Product $m.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'\overset{m}{-}Z'')$ iſt alſo das Product *der Dauer des Längſtlebenden, in die Zahl der Verbindungen*, in denen der Längſtlebende dieſe Dauer gehabt hat. Man nehme dieſe Producte aus allen Jahren zuſammen, und dividire ſie durch *die Summe aller Verbindungen*, das iſt, man dividire die Summe $S.m.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$ wo m nach und nach für jedes Jahr genommen wird, durch die Summe $S.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$, ſo kommt die mittlere *Länge der Dauer des Längſtlebenden heraus* für *Eine ganz ausgegangene Verbindung* zu n Perſonen.

Das

Das kann so eingekleidet werden. In *Fig. 5* sey A F eine *krumme Linie*, bey der A E, A P, die *Abscissen* sind, davon die gröste die *Altersergänzung* des jüngsten Lebens ist; die *Ordinaten*, *y* stellen die obigen Incremente der ganz ausgehenden Verbindungen vor, so ist $\frac{S.x^r dx}{S y dx}$ die Dauer des Längstlebenden aus der Verbindung der gegebenen Personen.

Dieß ist die allgemeine Auflösung des Hrn. *Fontana* *). Die Aehnlichkeit dieser Formel mit dem bekannten mechanischen Ausdruck für den *Abstand des Schwerpunkts einer Fläche von einer gegebenen Linie*, schien *Fontana* merkwürdig zu seyn. Aber so etwas kann auch in die einfache Lebensdauer gebracht werden, wenn man die Curve darnach nimmt. Uebrigens ist diese Auflösung weder kürzer noch einleuchtender als die vorhergegebene.

Bey der *Hypothese vom gleichförmigen Sterben* verhalten sich die Producte der *Todtenzahlen*, $\overset{m}{Z}. \overset{m}{Z'}. \overset{m}{Z''}$, wie x^r, wenn *r* die Zahl der verbundenen Personen ist; jedoch nur bis *x* der kleinsten Altersergänzung gleich wird. Denn von da an wird eine von den Zahlen Z, oder mehrere, und nach und nach alle, *beständig* Gröfsen.

Sind

*) *In Dottrina degli Azzardi di Abramo Moivre*, ins Italiänische übersetzt, und mit Zusätzen versehen von *Gregorius Fontana*. *Milano* 1776. p. 50. 51. in *Discorso Preliminare*.

Sind die verbundenen Perſonen am *Alter alle gleich*, ſo iſt ganz durch jenes Product in dem Verhältniſs wie x^r. Und dann iſt y in der vorigen Formel wie rx^{r-1}.

Alſo $\frac{S.xydx}{S.ydx} = \frac{S.x^r dx}{Sx^{r-1}.dx} = \frac{r}{r+1} \cdot x.$

Dieſe letzte Gleichung iſt blos eingeſchränkt auf die Gleichförmigkeit des Sterbens. Herr *Fontana* leitet ſie aus der Lehre von den *Combinationen* her; ohne zu erinnern, daſs ſie nicht allgemein ſey. Mich deucht aus der Hypotheſe folge ſie von ſelbſt ſehr leicht.

4.

Zu §. 233.

Beſtimmung der Zeiten, in denen mehrere Perſonen nach und nach abgehen.

Es ſollen *vier* Perſonen von beſtimmtem Alter, was *einerley* oder *verſchieden* ſeyn kann, gegeben ſeyn, A, B, C, D. Man ſetze, ſie leben alle vier beyſammen durch die Zeit A M (Fig. 4.), ſo iſt A M = B M′ = C M″ = D M‴, ſo groſs als die *Verbindungsdauer von allen vieren*. Hernach leben noch drey davon durch die Zeit M N = M′ N′ = M″ N″, an deren Ende wiederum Einer abgeht. So iſt A N die Zeit, bis wohin noch *Eine Verbindung von dreyen* übrig iſt, und M N iſt die Zeit, in der nur dieſe Eine Verbindung dreyer, C. III geweſen iſt. Von N bis O leben noch *zwey* Perſonen, von O bis P nur *Eine*; ſo iſt A O *die Dauer der längſtblei-*

benden Verbindung von zweyen; und NO die Zeit, während der nur Eine Verbindung zu zweyen [illegible]weſen iſt. OP iſt die *Dauer des Ueberlebens des Längſtlebenden* über alle übrigen, AP *die Dauer des Längſtlebenden ſelbſt.*

Nun iſt AM = C$\overline{abcd}$, oder hier unbeſtimmt, die Verbindungsdauer von vieren, C.IV.

AN wird ſo gefunden. Weil bey *vier* Perſonen vier Verbindungen zu dreyen da ſind, ſo haben durch die Zeit AM *vier Verbindungen zu dreyen* beſtanden. Laſs dieſe bezeichnet werden durch AM, BM′, CM″, DM‴. *Eine* davon hat noch fortgedauert durch MN.

Die Summe der Dauer der Verbindungen zu dreyen oder S.C$\overline{III}$ iſt alſo

= AN + BM′ + CM″ + DM‴.

= AN + 3. C.IV.

Folglich [illegible] III. — 3. C$\overline{IV}$.

Ferner iſt AO *die Dauer der längſtbeſtehenden Verbindung zu zweyen.* Es beſtehen aber durch die Zeit AM *ſechs* Verbindungen zu zweyen, denn ſo viele ſind in der Zahl von vier Perſonen enthalten. Von dieſen bleiben durch MN, noch *drey*, ſo viel nämlich als bey drey Perſonen ſtatt finden, durch NO aber iſt noch Eine davon übrig.

Daher iſt *die Summe der Dauer aller Verbindungen zu zweyen*, oder S.C$\overline{II}$. = 6. AM + 3. MN + NO.

= AO + 2. AN + 3. AM.

Alſo

Alſo $AO = S.C\overline{II} - 2\,AN - 3\,AM$
$= SC.\overline{II}. - 2.SC.\overline{III}. + 6\,C.\overline{IV}. - 3\,C.\overline{IV}.$
$= SC.\overline{II}. - 2\,S.C.\overline{III}. + 3\,C.\overline{IV}.$

Endlich iſt noch $AP = S.E\overline{I} - S.C\overline{II}. + S.C\overline{III} - C\,IV.$ (§. 1.)

Daraus bekommt man
$OP = AP - AO = S.E\overline{I} - 2\,S.C.\overline{II}. + 3\,S.C\overline{III} - 4\,C\overline{IV}.$
$NO = AO - AN = SC\overline{II}. - 3\,SC\overline{III} + 6.C\overline{IV}.$
$MN = AN - AM = S.C\overline{III} - 4\,C\overline{IV}.$
$AM = C\overline{IV}.$

Es zeiget ſich hieraus das Geſetz des Fortgangs in dieſen Formeln für mehrere Perſonen. Das Allgemeine in allen iſt, daſs *Plus* und *Minus* bey den Theilen abwechſeln.

Der Ausdruck für *das längſte Leben eines Einzelnen*, für AP, beſteht aus den Summen der Dauer der Verbindungen, die Lebensdauer der Einzelnen eingeſchloſſen. Die *Coefficienten* der Glieder ſind die Einheiten. Die Reihe fängt ſich an mit S.E I. oder mit der Summe der einzelnen Lebensdauer, und ihr *allgemeines Glied* iſt $\pm S.C\overline{I + N}$, wo das obere Zeichen (+) gilt, wenn N eine *gerade* Zahl iſt, das untere *negative*, wenn N ungerade iſt.

In dem Ausdruck für *die Dauer des Ueberlebens des Längſtlebenden*, oder für OP, ſind die *Coefficienten* der Glieder die *natürlichen Zahlen*. Uebrigens iſt dieſe

Reihe dieselbe wie vorher bey dem längsten Leben. Das allgemeine Glied der Reihe ist $\pm N^{\overline{+1}}$. S. $C^{\overline{1+N}}$. Wiederum gilt das *positive* Zeichen, wenn N *gerade*, das *negative*, wenn N *ungerade ist*.

5.

Für *die längste Dauer der Verbindungen zu zweyen*, aus einer gegebenen Zahl von *P* Personen, oder für AO, bekommt man eine Reihe, die sich mit S. $C.^{\overline{II}}$, das ist *der Summe der Verbindungen zu zweyen* anfängt, und in der die *Coefficienten* die natürlichen Zahlen sind. Der *Terminus generalis* ist $\pm^{\overline{N+1}}$ $SC^{\overline{II+N}}$.

Die Reihe geht fort bis II+N=P wird.

Und für *die Zeit des Ueberlebens der letztern Verbindung zu zweyen*, über die übrigen Verbindungen zu zweyen, die anfangs darinnen waren, das ist, für NO, *wird der Terminus generalis* $\pm S^{\overline{N+1}}$. $SC.^{\overline{II+N}}$, ebenfalls bis II+N=P wird. Die Summe $S^{\overline{N+1}}$ *ist* hier die *Summe der natürlichen Zahlen*, das ist, die *Trigonalzahl*. Für das erste Glied ist N=o. Sonst gilt das obere Zeichen, wenn N *gerade*, und das *untere*, wenn es *ungerade* ist.

6.

Noch für die *längste Dauer der Verbindung von dreyen*, A N, entsteht eine Reihe, die sich mit S.$C.^{\overline{III}}$ anfängt, und zum *Terminus generalis* hat

$$\pm S.^{\overline{N+1}}\ S.C.^{\overline{III+N}}$$

Für

Für die Dauer des Ueberlebens der letzt beſtehenden Verbindung zu dreyen, nach den vorher abgegangenen, oder für MN, erhält man das *allgemeine Glied der Reihe*

$$\pm S.S\overline{N+1}.S.C\overline{III+N}.$$

Hier iſt $SS.\overline{N+1}$ *die Summe der Trigonalzahlen*, das iſt, eine *Pyramidalzahl*, dafür man ſchreiben kann S^3. Auch ferner für die Summe von S^2, ſetze man S^3, und ſo fort.

7.

Alsdenn iſt im Allgemeinen für die *längſte Dauer der Verbindung von Q Perſonen*, das *erſte Glied der Reihe* $S.\overline{CQ}$, und das *allgemeine Glied*

$$\pm S^{Q-2}.\overline{N+1}.S.C.\overline{Q+N}.$$

Wiederum (+) wenn N *gerade*, und (—) wenn es *ungerade* iſt. Das letzte Glied iſt da, wo $Q+N=P$ der gegebenen Anzahl der Perſonen iſt.

Für die Dauer des Ueberlebens der längſtbeſtehenden Verbindung zu Q, über die vorher abgegangenen, iſt der *Terminus generalis* $\pm S^{Q-1}.\overline{N+1}.S.C.\overline{Q+N}$.

Da aber $S.^{Q-1}.\overline{N+1}$ und $S.^{Q-2}.\overline{N+1}$. *figurirte Zahlen* ſind, ſo ſetze man $\overline{N+1}=m$. Alsdenn iſt

$$S.\overline{N+1}=\frac{m(m+1)}{1.\ 2.};$$

$$S.^2\overline{N+1}=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3};\text{ und}$$

$$S.^{Q-2}.\overline{m}=\frac{m.(m+1)(m+2)\ldots(m+Q-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ Q-1}$$

einander gleich; so ist $S.C\overline{Q}$, aus P gegebenen Personen so grofs, als das Product aus dem eben vorher angeführten Factor durch die Verbindungsdauer von Q Personen gleichen Alters, multiplicirt, das ist

$$= \frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}\ldots\overline{P-(Q-1)}}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\quad Q}.\quad C.\overline{Q}$$

Ist aber das Alter der Personen verschieden, so giebt der vorige Factor doch die Anzahl der Verbindungen C. Q, welche in der gegebenen Zahl der Personen P enthalten sind.

9.

Sind die gegebenen Personen *alle* von gleichem Alter, so ist nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* $C.\overline{P} = \frac{1}{P+1}\alpha$, wenn α die Altersergänzung ist. Dieſs ist die Zeit, die sie alle beysammen leben. Die Zeit, in der noch $P-1$ beysammen bleiben, oder die Periode, in deren Ende die *zwote* abgeht, ist die Dauer des Ueberlebens von $P-1$ über das Zusammenleben aller.

Dieser Zeitraum ist

$= S.C.\overline{P-1} - P.C.\overline{P}$. nach §. 7.

Denn wenn man in dem dortigen Ausdruck für den Terminus generalis statt Q, setzet $P-1$; und P hier die höchste Anzahl von Personen ist, so hat die Reihe für die Dauer des Ueberlebens der letzten Verbindung $P-1$ nicht mehr als die angegebenen zwey Glieder.

Die Zahl der Verbindungen zu P — 1 aus P, ist

$$\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}\ldots\overline{P-(P-2)}}{1.\quad 2.\quad 3\quad\ldots\quad P-1} = P$$

Nun ist die Dauer in allen Verbindungen zu P — 1 gleich.

Folglich $S.C.\overline{P-1} - P.C.\overline{P} = P.C.\overline{P-1} - P.\overline{CP}.$

$$= P(C.\overline{P-1} - C.\overline{P}) = P.\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}\right)\alpha = \frac{1}{P+1}\cdot\alpha.$$

Also eben so groſs als die Zeit der Verbindungen von allen P.

Es geht demnach eine zwote Person ab, nach einer gleichen Zeit, in welcher die erste abgegangen ist.

Ferner ist die Zeit des *Ueberlebens* der Verbindung von P — 2 über die Verbindung von P — 1

$$= S.C.\overline{P-2} - (P-1)\ S.C.\overline{P-1} + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\quad 2}\cdot\ C.\overline{P}.$$

Die Zahl der Verbindungen $C.\overline{P-2}$. aus P Personen ist

$$= \frac{P.P-1\ldots\overline{P-(P-3)}}{1.\quad 2.\quad\ldots\quad P-2} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\quad 2}.$$

Also $S.C.\overline{P-2} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\quad 2}\cdot\ C.\overline{P-2}.$

Daher wird die Zeit des Ueberbestehens von $C.\overline{P-2}$ über die höhern Verbindungen, oder die Zeit, welche die Längstbestehende von den Verbindungen $C.\overline{P-2}$ noch dauret, nach dem Abgang der Uebrigen, die Anfangs in der Zahl P enthalten waren,

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\quad 2}C.\overline{P-2} - P.\overline{P-1}.C.\overline{P-1} + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\quad 2}.C.\overline{P}$$

=

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2.} \cdot \frac{1}{P-1}\alpha - \frac{P.\overline{P-1}}{P} \cdot \alpha + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{P+1}\alpha$$

$$= \frac{1}{P+1} \cdot \alpha.$$

So geht es weiter. Die Zeiten, in denen Einer aus dem gegebenen Alter abgeht, sind alle einander gleich, das ist, *auch bey einer bestimmten Zahl von Personen erfolgt das Absterben gleichförmig nach der Hypothese.*

Daraus folgt dann, dass die Zeit, während welcher von P Personen, deren Altersergänzung α gleich ist, N abgestorben sind, $= \frac{N}{P+1}\alpha$ sey.

10.

Nach jeder andern Hypothese ist

1) Die Zeit, in der aus P Personen *Eine* abgeht $= C\overline{P}$.

2) Die Zeit, in der eine *zweite* abgeht

$$= P.(C.\overline{P-1} - C.\overline{P})$$

3) Die Zeit, in der *die dritte* abgeht

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2} \cdot C\overline{P-2} - P.\overline{P-1}\,C.\overline{P-1} + \frac{P.P-1}{1.\ 2} \cdot C.\overline{P} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}(C.\overline{P-2} + C.\overline{P}) - P.\overline{P-1}.\ C.\overline{P-1}.$$

4) Die Zeit, während welcher die *vierte* abgeht

$$= S.\,C.\overline{P-3} - \overline{P-2}.\ S.C.\overline{P-2}$$

$$+\frac{P-2.\,P-1}{1.\ 2}\cdot S.C.\overline{P-1}-\frac{P-3.\,P-2.\,P-1}{1.\ 2.\ 3}\cdot S.C.\overline{P}. \quad \S.\ 7.$$

$$=\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2}\cdot C.\overline{P-3}-\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot C.\overline{P-2}$$

$$+\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2}\cdot C.\overline{P-1}-\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot C.\overline{P}$$

$$=\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot(C.\overline{P-3}-C.\overline{P})-\frac{P.\,P-1.\,P-2}{1.\ 2}\cdot$$

$$(C.\overline{P-2}-C.\overline{P-1}).$$

So läfst sich weiter gehen, da das Gesetz des Fortganges sich deutlich zeiget.

II.

Zu §. 245.

Ist das Ueberleben einer *bestimmten* Person aus den gegebenen A, B, C, über die andern zu bestimmen, so hat man für *die Wahrscheinlichkeit, dafs in dem nten Jahre A noch am Leben, B und C aber todt sind,*

$$\frac{{}^{n}\overline{A}}{A}\cdot\frac{(B-{}^{n}\overline{B})}{B}\cdot\frac{(C-{}^{n}\overline{C})}{C}=\frac{{}^{n}\overline{A}}{A}-\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B}}{A.\ B}$$

$$-\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{C}}{A\ \ C}+\frac{{}^{n}\overline{A}\,{}^{n}\overline{B}\,{}^{n}\overline{C}}{A\ \ B\ \ C}.$$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten aus *allen* Jahren ist

$$=E.a-(C.\overline{a\,b}+C.\overline{a\,c})+C.\overline{a\,b\,c}.$$

Wird

Wird noch die *vierte* Perſon D hinzugeſetzet, ſo hat man

$$\frac{{}^{n}A}{A} \cdot \frac{(B - {}^{n}B)}{B} \cdot \frac{(C - {}^{n}C)}{C} \cdot \frac{(D - {}^{n}D)}{D} \cdot$$

$$= \frac{{}^{n}A}{A}\left(\left(1 - \left(\frac{{}^{n}B}{B} + \frac{{}^{n}C}{C} + \frac{{}^{n}D}{D}\right)\right) + \frac{{}^{n}B}{B}\frac{{}^{n}C}{C}\right.$$

$$\left. + \frac{{}^{n}B}{B.}\frac{{}^{n}D}{D} + \frac{{}^{n}C}{C.}\frac{{}^{n}D}{D} - \frac{{}^{n}B}{B.}\frac{{}^{n}C}{C.}\frac{{}^{n}D}{D}\right);$$

und die Summe davon giebt

$$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad}) + C\overline{abc}$$

$$+ C\overline{abd} + C\overline{acd} - C\overline{abcd}.$$

Dieſe Formel iſt der obigen für die *Dauer des Längſtlebenden* ähnlich, nur daſs an ſtatt *der Summe aller* einfachen Lebensdauer hier bloſs die *Lebensdauer von A vorkommt*; *auch ſtatt* $S.C\overline{II}$, $S.C\overline{III}$, *nur die Summen ſolcher Verbindungen, worinn A begriffen iſt.*

12.

Bey Einer beſtimmten Perſon aus mehreren kann nur *das Ueberleben derſelben über die andern berechnet werden*, denn die Frage von der *Dauer der Längſtlebenden* fällt weg. Dieſe letzte müſste hier einerley ſeyn mit *der mittlern Lebensdauer*. In dieſem Sinn ſie genommen, iſt ſie ſo groſs als *die Dauer des Ueberlebens von A über die übrigen*, §. 11., *wenn dazu die längſte Dauer der Verbindungen zu zweyen, unter denen ſich A befindet, zugeſetzet wird.*

Allein

Allein wenn von der längsten Dauer der Verbindungen zu zwey die Rede ist, in denen nämlich A sich befindet, so kommen dafür Ausdrücke, die in Hinsicht der Coefficienten von den obigen unterschieden sind. Es sey AP (Fig. 4.) *die Dauer des Längstlebenden A* aus dreyen A, B, C; dann AO die Dauer der längstbestehenden Verbindung zu zwey, worinnen A mit einem der übrigen vorkommt; und AN, die Dauer der Verbindung aller dreyen, so ist

$AN = C\overline{abc}$; $AO = C\overline{ab} + C\overline{ac} - C\overline{abc}$.

Denn in den drey gegebenen Personen liegen zwey Verbindungen zu zwey, worin A vorkommt. Davon fällt Eine weg, wenn $C\overline{abc}$ aufhöret, und die zwote bleibet, weil vorausgesetzet wird, dass A am Leben bleibe, wenn dieß letztere geschieht.

Und $AP = AP - AO + AO = OP + AO = E\overline{a}$.

Folglich auch $OP = AP - AO$

$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac}) + C\overline{abc}$.

Und $NO = AO - AN = C\overline{ab} + C\overline{ac} - 2\,C\overline{abc}$.

Man nehme vier Personen A, B, C, D, und es sey wiederum AP, AO, AN, AM, die längste Dauer *von A allein*, von den *Verbindungen zu zwey*, zu *drey*, *vier*, aber jedesmal nur die gerechnet, in denen sich A befindet, so hat man

$AM = C\overline{abcd}$

$AN = C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - 2\,C\overline{abcd}$.

Denn

Denn es giebt drey Verbindungen $C.\overline{III}$, worinnen A vorkommt, davon aber zwey aufhören mit $C\overline{abcd}$. *Eine* von jenen $C\overline{III}$ dauert durch AN, zwo (die durch B M′, C M″ vorgeſtellet werden können) nicht länger als durch AM. Daraus folgt der angegebene Wehrt für AN.

Auch iſt $AO = C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad} - (C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - 2\,C\overline{abcd}) + C\overline{abcd}$.
$= C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad} - (C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd}) + C\overline{abcd}$.

Dieſes daher. Es ſind nur drey Verbindungen zu *zwey*, worin A iſt, unter den gegebenen vieren. Eine von dieſen dauert durch AO. Eine hört ſchon auf mit $C\overline{abcd}$, dauert alſo nur durch C M″ oder AM; und eine dauert durch BN′ oder AN, und hört alsdenn auf, wenn aus der noch übrigen Verbindung zu drey, worin A iſt, Einer abſtirbt, das iſt, wenn dieſe längſtdaurende Verbindung zu drey wegfällt. Daher iſt die Dauer der längſtbeſtehenden Verbindung zu zwey, worin A iſt, ſo groſs als die Summe aller ſolcher weniger AN, und weniger AM.

Endlich $AP = E\overline{a}$.

Daraus hat man für *die Dauer des Ueberlebens von A nach den übrigen*, oder OP, $= AP - AO$
$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad}) + C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - C\overline{abcd}$.

und

und $NO = AO - AN = C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad} - 2(C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd}) + 3\,C\overline{abcd}$.

Das ist die Fortdauer einer Verbindung *zu zwey*, worinnen A ist, nachdem die Verbindungen zu drey, worin A ist, schon aufgehört haben. Ferner

$MN = AN - AM = C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - 3\,C\overline{abcd}$,

für die Dauer der Verbindungen *zu drey* nach der Verbindung zu vier.

13.

Die Verbindungen, worin A vorkommt, können im allgemeinen bezeichnet werden durch $C\overline{a.\,I}$, A mit *Einem* andern; $C\overline{a.\,II}$, A mit *zwey* andern; $C\overline{a.\,III}$, A mit *drey* andern, unbestimmt welchen.

Dann bekommt man für die Dauer Ausdrücke, die das Gesetz des Fortgangs bey mehreren Personen kenntlich machen.

$AP = E\overline{a}$

$AO = S.C\overline{a.\,I} - S.C\overline{a.\,II} + S.C\overline{a.\,III}$

$AN = S.C\overline{a.\,II} - 2\,S.C\overline{a.\,III}$.

$AM = S.C\overline{a.\,III}$.

Und *für die Dauer des Ueberlebens*

$OP = E\overline{a} - S.C\overline{a\ I} + S.C\overline{a.\,II} - S.C\overline{a.\,III}$.

$NO = S.C\overline{a.\,I} - 2\,S.C\overline{a.\,II} + 3\,S.C\overline{a.\,III} - 4\,S.C\overline{a.\,III}$.

$MN = S.C\overline{a.\,III} - 3\,S.C\overline{a.\,IIII}$.

Diese Formeln mit den obigen verglichen, zeigen, dass die Coefficienten der Summen eben so wie vorher

zu den *figurirten* Zahlen gehören, und daſs diejenigen, die bey dem *Ueberleben* vorkommen, von einer höhern Ordnung ſind, als die zu *der Dauer* ſelbſt gehören, wie es auch oben war. Der Unterſchied iſt, daſs ſie für den gegenwärtigen Fall um eine Ordnung niedriger ſind, als ſie es dorten waren, in §. 4. z. B. Für das Ueberleben des Längſtlebenden ſind ſie im §. 4. die natürlichen Zahlen, auch ſo für die längſte Dauer der Verbindungen zu zwey: hier hingegen ſind ſie die Einheit. Für die längſte Dauer der Verbindung von drey, auch für das Ueberleben der Verbindung zu zwey, waren ſie dorten die Summen der natürlichen Zahlen; hier ſind ſie die natürlichen Zahlen ſelbſt.

Daher kann hier auch auf dieſelbige Art, wie vorher, der *Terminus generalis* der Reihe für die Dauer und für das Ueberleben angegeben werden. Der allgemeine Coefficient wird aus der nächſtniedrigen Ordnung der figurirten Zahlen genommen, das iſt, er richtet ſich nach der Zahl der verbundenen Perſonen, die auſser A in den Verbindungen ſind.

Wird alſo wiederum wie in §. 7. $N + 1 = m$ geſetzet, ſo iſt der *Terminus generalis für die längſte Dauer der Coexiſtenz*

$$C.\overline{a.Q} = \frac{+\overline{m.m+1.m+2\ldots(m+Q-2)}}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \ldots\quad Q-1} SCa^{(Q+m-1)}$$

Und für *die Dauer des Ueberlebens* derſelben über die höhern Coexiſtenzen

Alſo $S.C.\overline{a.(P-2)} - \overline{(P-1)}\ C.\overline{a.(P-1)}$

$= \overline{P-1}.\ (C.\overline{a(P-2)} - C.\overline{a(P-1)}).$

$= \overline{P-1}.\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}\right)\alpha = \frac{\overline{P-1}}{P(P+1)}\ \alpha.$

Geht man auf die nämliche Art weiter, ſo findet man für *die Zeit des Ueberlebens einer Verbindung zu* $\overline{P-2}$, *worin A iſt*, über die höhern,

$= S.C.\overline{a.(P-3)} - \overline{(P-2)}\ S.\ C.\overline{a.(P-2)}$

$+ \frac{\overline{P-2}.\ \overline{P-1}}{1.\quad 2}.\ C.\overline{a.(P-1)}.$

Dieſe Coefficienten findet man aus dem obigen allgemeinen Ausdruck. Nun ſind aber in der Zahl P ſo viele Verbindungen von P — 2, worunter A iſt, enthalten, das iſt ſo viele $C.\overline{a.(P-3)}$, als es überhaupt Verbindungen von P — 3 giebt aus der Zahl P — 1, nämlich $\frac{\overline{P-2}.\ \overline{P-1}}{1.\quad 2}$, A

Dazu iſt $C.\overline{a.(P-3)} = \frac{1}{P-1}\cdot\ \alpha.$

Daraus bekommt man für den geſuchten Wehrt

$= \frac{\overline{P-1}.\ \overline{P-2}}{1.\quad 2}\cdot\ \frac{1}{P-1}\cdot\ \alpha - \overline{P-2}\cdot\overline{P-1}.\ \frac{1}{P}\cdot\ \alpha$

$+ \frac{\overline{P-1}.\ \overline{P-2}}{1.\quad 2}\cdot\ \frac{1}{P+1}\cdot\ \alpha = \frac{\overline{P-2}}{P(P+1)}\cdot\ \alpha.$

Die folgenden Wehrte des Ueberlebens der Verbindungen von wenigern Perſonen, in denen aber A ſich befindet, ſind $\frac{P-3}{P(P+1)}\cdot\ \alpha$, $\frac{P-4}{P(P+1)}\cdot\ \alpha$, bis zuletzt ſolche für das Ueberleben von A allein nach allen jenen

Verbindungen $\frac{P-(P-1)}{P.(P+1)}\alpha = \frac{1}{P(P+1)}\cdot\alpha$. wird. *Dieſs ſind die auf einander folgende Theile der Altersergänzung von A, während welchen die Verbindungen von A mit andern nach und nach aufhören.* Die Summe aller dieſer Theile iſt alsdenn

$$= \frac{1}{P+1}\cdot\alpha\left(1+\frac{P-1}{P}+\frac{P-2}{P}+\ldots+\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{2}\cdot\alpha;$$

das iſt der *künftigen Lebensdauer von A* gleich.

15.

Zum 70ſten Satz §. 238.

Es iſt für ſich klar, daſs die nämlichen Schlüſſe, wodurch die Gröſsen der Dauer gefunden ſind, auch zu den *Renten* führen, die auf jene Dauer gegeben werden. Die Ausdrücke für die letzten ſind jenen für die Dauer ähnlich, auch in Hinſicht der Coefficienten; nur daſs ſtatt der *Dauer* dorten, hier jedesmal die zu derſelben gehörige *Rente* gebrauchet wird.

Iſt wiederum die Anzahl der gegebenen Perſonen P, ſo iſt (wie in §. 7.) *der Wehrt der Rente auf die längſte Dauer einer Verbindung von Q Perſonen, in einer Reihe enthalten, deren allgemeines Glied*

$$\frac{(m+1)\,(m+2)(m+3)\ldots(m+Q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad\quad (Q-1)}\cdot S.\lambda^{\overline{Q+m-1}}$$

iſt. Hier iſt $S.\lambda^{\overline{Q+m-1}}$ die Summe der Verbindungsrenten für alle Verbindungen zu $Q+m-1$ Perſonen, die aus einer gegebenen Zahl von Perſonen P gemacht werden können.

Die

Die Reihe ſelbſt hat folgende Form:

$$S.\lambda\overline{Q} - Q.\,S.\lambda\overline{Q+1} + \frac{Q.\overline{Q+1}}{1.\ 2.}.\,S.\lambda\overline{Q+2}$$

$$- \frac{Q.\overline{Q+1}.\overline{Q+2}}{1.\ 2.\ 3}\,S.\lambda\overline{Q+3} + \text{— bis } Q+m-1$$

der gegebenen Zahl von Perſonen P gleich wird. §. 7.

Der *Terminus generalis der Reihe, welche den Renten-Werth für das Ueberleben der längſtbeſtehenden Verbindung von Q Perſonen, nach dem Abgang der übrigen beſtimmt*, iſt

$$\frac{(m+1)(m+2)m+3)\ldots(m+Q-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ Q}\,S.\lambda\overline{Q+m-1}.$$

Die Reihe ſelbſt iſt dieſe

$$S.\lambda.\overline{Q} - (Q+1)\,S.\lambda.\overline{Q+1} + \frac{\overline{Q+1}.\overline{Q+2}}{1.\ 2.}.\,S.\lambda\overline{Q+2}$$

$$- \frac{(Q+1)(Q+2)(Q+2)}{1.\ 2.\ 3}.\,S.\lambda.\overline{Q+3} + \text{—}$$

bis Q+m— 1 ſo groſs wird als die gegebene Zahl der Perſonen P.

16.

Imgleichen hat man für *die Rente auf die Dauer einer beſtimmten Perſon A, und der Verbindungen, in denen dieſe ſich befindet*, in Gemäſsheit mit dem Ausdruck im §. 14. auch hier

$$\pm\frac{m.(m+1).(m+2)\ldots(m+Q-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ \ Q-1}\,S.\lambda\overline{(a+Q+m-1)}$$

als den *Terminus generalis* der Reihe durch den der gedachte Werth gegeben wird.

Für *die Rente des Ueberlebens* des A, *und der Verbindungen, worin A ist*, über die andern einzelnen Personen und Verbindungen, ist *der Terminus generalis der Reihe*

$$\pm \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots\overline{(m+Q-1)}}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \ldots\quad Q} . S\lambda\overline{a+Q+m}$$

17.

Zum 73sten Satz in §. 247.

Wenn P Personen von gegebenem gleichem Alter eine Rente 1 unter sich zu *gleichen* Theilen genieſsen, so lange sie beysammen leben, und dieselbige Rente ferner nach dem Absterben einer oder mehrerer unter die Nachbleibenden *gleichförmig* vertheilet wird, bis der Längstlebende sie endlich ganz erhält, so ist der *Wehrt der Erwartung einer bestimmten Person A*

$$= \lambda\overline{a} - \tfrac{1}{2} S\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{3} S\lambda\overline{a.II} + + \tfrac{1}{P}\ \lambda\overline{a.(P-1)}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von jeder besondern Hypothese der Sterblichkeit.

Beweis. Der gesuchte Wehrt ist so grofs als der Wehrt der Leibrente, wenn davon Folgendes abgezogen wird. So lange nämlich zwo zusammen leben, worunter A ist, muſs A jährlich $\frac{1}{2}$ zurück geben. Es sey wie vorher, A P (Fig. 4.) die Dauer von A; A Q die Dauer der längsten Verbindung von *zweyen*, worunter A ist; A N die von *dreyen;* A M von *vieren*, und so ferner. Nun muſs A zurückgeben $\frac{1}{2}$ des Wehrts durch A Q; ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

für

für AN. Denn ſo lange drey beyſammen ſind, genieſſet A nur $\frac{1}{3}$tel der Rente, giebt alſo auſser der ſchon abgerechneten Hälfte, noch $\frac{1}{6}$tel mehr zurück. Weiter für die Dauer AM muſs noch $\frac{1}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{12}$ zurück gegeben werden, weil während AM nur ein *Viertel* gehoben wird, alſo auſser dem ſchon abgerechneten noch $\frac{1}{12}$tel mehr zurück zu geben iſt. So weiter. Das folgende abzuziehende Stück für die Dauer der Coexiſtenzen von fünf Perſonen würde $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ ſeyn, bis das letzte $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n.(n-1)}$ wird.

Daraus wird der ganze Wehrt der Erwartung des A,

$$= \lambda\overline{a} - \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.II} - \tfrac{1}{6}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.IV} - +$$
$$- \tfrac{1}{6}\int\lambda\overline{a.II} + \tfrac{1}{6}\cdot 2.\int\lambda\overline{a.III} - \tfrac{3}{6}\int\lambda\overline{a.IV} + -$$
$$- \tfrac{1}{12}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{3}{12}\int\lambda\overline{a.IV} -$$
$$- \tfrac{1}{20}\int\lambda\overline{a.IV} +$$
$$= \lambda\overline{a} - \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{3}\int\lambda\overline{a.II} - \tfrac{1}{4}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{1}{5}\int\lambda\overline{a.IV} - \&$$

18.

Daſs dieſs Geſetz allgemein ſey, kann mittelſt des *Termini generalis für die Rente auf die längſte Dauer* in §. 16. gezeiget werden. Man ſuche den *Coefficienten des rten Termins* in der gegenwärtigen Reihe. Es iſt $\int\lambda\overline{a\,(r-1)}$, wozu ſelbiger gehört. Er beſteht aber aus einer Summe von Factoren, deren Zeichen abwechſeln, davon der letztere allemal verneinend iſt; der erſte aber abwechſelnd poſitiv und negativ. Dieſe Factores ſind einzeln für ſich betrachtet, zuſammen geſetzt aus zwey

andern, nämlich aus einer von den Zahlen $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{3.4}$; $\frac{1}{4.5}$ u. s. f. bis $\frac{1}{(r-1)r}$; und dann aus dem Coefficienten von $\int \lambda \overline{a.(r-1)}$ oder nach der Formel in §. 16. von $\int \lambda.a.\overline{(Q+m-1)}$ das ist aus

$$\pm \frac{m.(m+1)(m+2)\ldots\overline{m+Q-2}}{1.\quad 2.\quad 3.\quad\ldots\quad Q-1}.$$

Dieser letzte Coefficient verändert sich, nachdem Q und *m* anders werden. Nun ist jedesmal $r = Q+m$ wenn *r* der Numerus des Gliedes ist; allein Q, was in der ersten Reihe, die für zwo Personen gehört, $= 1$ ist, wird nachher 2, 3 u. s. f. bis $Q = r-1$. Dagegen nimmt *m*, was zuerst $r-1$ ist, ab, bis $m-1 = 0$ wird. Also ist zuerst $m = r-1$, und im letzten Gliede $m = 1$; überhaupt ist $m = r-Q$.

Wo $Q = 1$ ist, ist der zweyte Factor der Coefficienten $= 1$; der erste $= \frac{1}{2}$, damit fängt sich die Reihe der Factoren an, deren Summe den gesuchten Coefficienten ausmacht. Es wird also dieser letzte, man setze dafür $\pm C$, seyn

$$= \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}.\frac{\overline{r-2}}{1} + \frac{1}{3.4}.\frac{\overline{r-2}.\overline{r-3}}{1.\quad 2} - \frac{1}{4.5}\frac{\overline{r-2}.\overline{r-3}.\overline{r-4}}{1.\quad 2.\quad 3} + - + - \frac{1}{(r-1)r}\right)$$

Also $\pm(r-1)r.C = \pm\left(\frac{r.\overline{r-1}}{1.2} - \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{1.2.3}\right.$

$$\left. + \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}}{1.2.3.4} - \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}.\overline{r-4}}{1.2.3.4.5} + - 1\right)$$

$$= \pm(1-1)^r - (1 - \tfrac{r}{1}) = \pm(r-1).$$

Folglich $\pm rC = \pm 1$, und $C = \frac{1}{r}$.

19.

19.

Sind alle Personen gleichen Alters, und ihre Zahl n, so wird der Ausdruck für *den Werth der Erwartung einer einzelnen*, das ist $\lambda\overline{a} - \frac{1}{2}\int\lambda\overline{a^2} + \frac{1}{3}\int\lambda\overline{a^3} - +$ verändert in folgenden: $\lambda\overline{a} - \frac{n-1}{1.\ 2}\lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.\ 3}\cdot\lambda\overline{a^3} - \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.\ 3.\ 4}\cdot\lambda\overline{a^4} + -$. Denn es giebt so viele $\lambda\overline{a^2}$, als in der Zahl von Personen $n-1$ einzelne sind, das ist $n-1$. Ferner so viele $\lambda\overline{a^3}$, als aus der Zahl $n-1$, Verbindungen zu zweyen; so viele $\lambda\overline{a^4}$ als aus $n-1$, sich Verbindungen zu dreyen, und so ferner machen lassen, wie oben in §. 14.

Daher wird die *Erwartung*, sie sey W,

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\lambda\overline{a^3} - +$$

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{2}\lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.\ 3}\cdot\lambda\overline{a^3} - +$$

Dieß ist wiederum ein Ausdruck, der bey jedweder Ordnung des Sterbens statt findet.

20.

Zu §. 243.

Nimmt man an, daß $\lambda\overline{a} : \lambda\overline{a^2} = \lambda\overline{a^2} : \lambda\overline{a^3} = \lambda\overline{a^3} : \lambda\overline{a^n} : \lambda\overline{a^{n+1}}$ und setzet $\frac{\lambda\overline{a^2}}{\lambda\overline{a}} = t$, so erhält man W

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{2}\cdot t\,\lambda\overline{a} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.\ 3}\,t^2\lambda\overline{a} - \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.\ 3.\ 3}\cdot t^3\lambda\overline{a} + -,$$ Also t n W

$$= \lambda \overline{a} \left(nt - \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} \cdot t^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3} \cdot t^3 - + \right)$$

und $\lambda \overline{a} - tn\ W = (1-t)^n \lambda \overline{a}$.

Also $W = \frac{1}{nt} \cdot (1 - (1-t)^n)\ \lambda \overline{a}$.

$$= (1-(1-t)^n) \frac{(\lambda \overline{a})^2}{n.\ \lambda \overline{a^2}}.$$

Es ist t ein eigentlicher Bruch und ist dazu n sehr groß, so kann $W = \frac{(\lambda \overline{a})^2}{n.\ \lambda \overline{a^2}}$ genommen werden, weil $\frac{(1-t)^n}{n}$ als eine hohe Potenz eines eigentlichen Bruchs durch n dazu dividirt, unbeträchtlich wird.

Nach der Northamptoner Tabelle ist $\frac{\lambda \overline{a^3}}{\lambda \overline{a^2}}$ so nahe $= \frac{\lambda \overline{a^2}}{\lambda \overline{a}}$, daß die größte Abweichung in dem Wehrt von t nur 0, 1 beträgt. Nimmt man also $n = 3$, so kann der auf diese abgekürzte Art gesuchte Wehrt von dem wahren nur um $\frac{t.\lambda \overline{a}}{100}$, wo t ein eigentlicher *Bruch* ist, unterschieden seyn.

Tabelle

Tabelle I.

Wehrte, wozu ein Capital 1. nach Jahren durch Zinsen und Zinsen von Zinsen anw chst,
Oder, Wehrte von r^x.

Jahre	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.
1	1,02000	1,03000 00000	1,04000 00000	1,05000 00000
2	1,04040	1,06090 00000	1,08160 00000	1,10250 00000
3	1,06120	1,09272 70000	1,12486 40000	1,15762 50000
4	1,08243	1,12550 88100	1,16985 85600	1,21550 62500
5	1,10408	1,15927 40743	1,21665 29024	1,27628 15625
6	1,12616	1,19405 22965	1,26531 90185	1,34009 50406
7	1,14868	1,22987 38654	1,31593 17792	1,40710 04227
8	1,17165	1,26677 00814	1,36856 90504	1,47745 54438
9	1,19509	1,30477 31838	1,42331 18124	1,55132 82160
10	1,21899	1,34391 63793	1,48024 42849	1,62889 46268
11	1,24337	1,38423 38707	1,53945 40563	1,71033 93581
12	1,26824	1,42576 08868	1,60103 22186	1,79585 63260
13	1,29360	1,46853 37135	1,66507 35073	1,88564 91423
14	1,31947	1,51258 97249	1,73167 64476	1,97993 15994
15	1,34586	1,55796 74166	1,80094 35055	2,07892 81794
16	1,37278	1,60470 64391	1,87298 12457	2,18287 45884
17	1,40024	1,65284 76323	1,94790 04956	2,29201 83178
18	1,42824	1,70243 30612	2,02581 65154	2,40661 92337
19	1,45681	1,75350 60531	2,10684 91760	2,52695 01954
20	1,48594	1,80611 12347	2,19112 31430	2,65329 77051
21	1,51566	1,86029 45717	2,27876 80688	2,78596 25904
22	1,54597	1,91610 34089	2,36991 87915	2,92526 07199
23	1,57689	1,97358 65111	2,46471 55432	3,07152 37559
24	1,60843	2,03279 41065	2,56330 41649	3,22509 99437
25	1,64060	2,09377 79297	2,66583 63315	3,38635 49409
26	1,67341	2,15659 12675	2,77246 97847	3,55567 26879
27	1,70688	2,22128 90056	2,88336 85761	3,73345 63223
28	1,74102	2,28792 76757	2,99870 33192	3,92012 91385
29	1,77584	2,35656 55060	3,11865 14519	4,11613 55954
30	1,81136	2,42726 24712	3,23339 75100	4,32194 23751

Jahre	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C	5 pr. C.
31	1,84758	2,50008 03453	3,37313 34104	4,53803 94939
32	1,88454	2,57508 27557	3,50805 87468	4,76494 14686
33	1,92223	2,65233 52384	3,64838 10967	5,00318 85420
34	1,96067	2,73190 52955	3,79431 63406	5,25334 79691
35	1,99988	2,81386 24544	3,94608 89942	5,51601 53676
36	2,03988	2,89827 83280	4,10393 25540	5,79181 61360
37	2,08068	2,98522 66778	4,26808 98561	6,08140 69428
38	2,12229	3,07478 34782	4,43881 34504	6,38547 72899
39	2,16474	3,16702 69825	4,61636 59884	6,70475 11544
40	2,20803	3,26203 77920	4,80102 06279	7,03998 87121
41	2,25220	3,35989 89258	4,99306 14530	7,39198 81477
42	2,29724	3,46069 58935	5,19278 39112	7,76158 75551
43	2,34318	3,56451 67703	5,40049 52676	8,14966 69329
44	2,39005	3,67145 22734	5,61651 50783	8,55715 03795
45	2,43785	3,78159 58417	5,84117 56814	8,98500 77935
46	2,48661	3,89504 37169	6,07482 27087	9,43425 81832
47	2,53634	4,01189 50284	6,31781 56171	9,90597 10923
48	2,58707	4,13225 18793	6,57052 82417	10,40126 96469
49	2,63881	4,25621 94356	6,83334 93714	10,92133 31293
50	2,69158	4,38390 60187	7,10668 33463	11,46739 97858
51	2,74541	4,51542 31993	7,39095 06801	12,04076 97750
52	2,80032	4,65088 58925	7,68658 87073	12,64280 82638
53	2,85633	4,79041 24721	7,99405 22556	13,27494 86770
54	2,91346	4,93412 48463	8,31381 43458	13,93869 61108
55	2,97173	5,08214 85917	8,64636 69197	14,63563 09164
56	3,03116	5,23461 30494	8,99222 15965	15,36741 24622
57	3,09178	5,39165 14409	9,35191 04603	16,13578 30853
58	3,15362	5,55340 09841	9,72598 68787	16,94257 22396
59	3,21669	5,72000 30136	10,11502 63539	17,78970 08515
60	3,28105	5,89160 31040	10,51962 74080	18,67918 58941
61	3,34665	6,06835 11972	10,94741 25744	19,61314 51888
62	3,41358	6,25040 17331	11,37802 90045	20,59380 24483
63	3,48185	6,43791 37851	11,83315 01647	21,62349 25707
64	3,55149	6,63105 11986	12,30647 61713	22,70466 71992
65	3,62252	6,82998 27346	12,79873 52182	23,83990 05592
66	3,69497	7,03488 22166	13,31068 46269	25,03189 55871
67	3,76887	7,24592 86831	13,84311 20120	26,28349 03665
68	3,84425	7,46330 65436	14,39683 64924	27,59766 48848
69	3,92113	7,68720 57399	14,97270 99521	28,97754 81291
70	3,99955	7,91782 19121	15,57161 83502	30,42642 55355

re	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.
1	4,07954	8,15535 65695	16,19448 30842	31,94774 68123
2	4,16114	8,40001 72650	16,84226 24076	33,54513 41529
3	4,24436	8,65201 77846	17,51595 29039	35,22239 08605
4	4,32925	8,91157 83181	18,21659 10201	36,98351 04036
5	4,41583	9,17892 56675	18,94525 46609	38,83268 59238
6	4,50415	9,45429 34377	19,70306 48473	40,77432 02199
7	4,59423	9,73792 22408	20,49118 74412	42,81303 62309
8	4,68611	10,03005 99080	21,31083 49388	44,95368 80425
9	4,77984	10,33096 17053	22,16326 83364	47,20137 24446
10	4,87543	10,64089 05564	23,04979 90699	49,56144 10668
11	4,97294	10,96011 72731	23,97179 10326	52,03951 31202
12	5,07240	11,28892 07913	24,93066 26740	54,64148 87762
13	5,17385	11,62758 84151	25,92788 91809	57,37356 32150
14	5,27733	11,97641 60675	26,96500 44481	60,24224 13757
15	5,38287	12,33570 85495	28,04360 49381	63,25435 34445
16	5,49053	12,70577 98060	29,16534 91356	66,41707 11168
17	5,60034	13,08695 32002	30,33196 31010	69,73792 46726
18	5,71235	13,47956 17962	31,54524 16251	73,22482 09062
19	5,82660	13,88394 86501	32,80705 12901	76,88606 19515
20	5,94313	14,30046 71096	34,11933 33417	80,73036 50491
21	6,06199	14,72948 11229	35,48410 66753	84,76688 33016
22	6,18323	15,17136 55566	36,90347 09423	89,00522 74667
23	6,30690	15,62650 65233	38,37960 97800	93,45548 88400
24	6,43373	16,09530 17190	39,91479 41712	98,12826 32820
25	6,56169	16,57816 07705	41,51138 59381	103,03467 64461
26	6,69293	17,07550 55936	43,17184 13756	108,18641 02684
27	6,82679	17,58777 07615	44,89871 50306	113,59573 07818
28	6,96332	18,11540 38843	46,69466 36319	119,27551 73209
29	7,10259	18,65886 60008	48,56245 01771	125,23929 31869
100	7,24464	19,21863 19809	50,50494 81842	131,50125 78463

Tabelle II.

Baarer Wehrt einer nach Jahren zahlbaren Summe 1.

Oder Wehrte von $\frac{1}{r^x}$.

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
1	0,97087 37864	0,96153 84615	0,95238 09524	0,943396
2	0,94259 59091	0,92455 62130	0,90702 94785	0,889996
3	0,91514 16594	0,88899 63587	0,86383 75985	0,839619
4	0,88848 70479	0,85480 41910	0,82270 24748	0,792094
5	0,86260 87844	0,82192 71068	0,78352 61665	0,747258
6	0,83748 42567	0,79031 45257	0,74621 53966	0,704961
7	0,81309 15113	0,75991 78132	0,71068 13301	0,665057
8	0,78940 92343	0,73069 02050	0,67683 93620	0,627412
9	0,76641 67323	0,70258 67356	0,64460 89162	0,591898
10	0,74409 39149	0,67556 41688	0,61391 32535	0,558395
11	0,72242 12766	0,64958 09316	0,58467 92891	0,526788
12	0,70137 98802	0,62459 70496	0,55683 74182	0,496969
13	0,68095 13400	0,60057 40862	0,53032 13506	0,468839
14	0,66111 78058	0,57747 50828	0,50506 79530	0,442301
15	0,64186 19474	0,55526 45027	0,48101 70981	0,417265
16	0,62316 69392	0,53390 81757	0,45811 15220	0,393646
17	0,60501 64458	0,51337 32458	0,43629 66876	0,371364
18	0,58739 46076	0,49362 81210	0,41552 06549	0,350344
19	0,57028 60268	0,47464 24240	0,39573 39570	0,330513
20	0,55367 57542	0,45638 69462	0,37688 94829	0,311805
21	0,53754 92759	0,43883 36021	0,35894 23646	0,294155
22	0,52189 25009	0,42195 53866	0,34184 98711	0,277505
23	0,50669 17484	0,40572 63333	0,32557 13058	0,261797
24	0,49193 37363	0,39012 14743	0,31006 79103	0,246979
25	0,47760 55693	0,37511 68022	0,29530 27717	0,232999
26	0,46369 47274	0,36068 92329	0,28124 07349	0,219810
27	0,45018 90558	0,34681 65701	0,26784 83190	0,207368
28	0,43707 67532	0,33347 74713	0,25509 36371	0,195630
29	0,42434 63623	0,32065 14147	0,24294 63211	0,184557
30	0,41198 67595	0,30831 86680	0,23137 74487	0,174110

Jahre!	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
31	0,39998 71452	0,29646 02576	0,22035 94749	0,164255
32	0,38833 70341	0,28505 79400	0,20986 61666	0,154957
33	0,37702 62467	0,27409 41731	0,19987 25396	0,146186
34	0,36604 48997	0,26355 20895	0,19035 47996	0,137912
35	0,35538 33978	0,25341 54707	0,18129 02854	0,130105
36	0,34503 24251	0,24366 87218	0,17265 74146	0,122741
37	0,33498 29369	0,23429 68479	0,16443 56330	0,115793
38	0,32522 61524	0,22528 54307	0,15660 53647	0,109239
39	0,31575 35460	0,21662 06064	0,14914 79664	0,103056
40	0,30655 68408	0,20828 90446	0,14204 56823	0,097222
41	0,29762 80008	0,20027 79275	0,13528 16022	0,091719
42	0,28895 92240	0,19257 49303	0,12883 96211	0,086527
43	0,28054 29360	0,18516 82022	0,12270 44011	0,081630
44	0,27237 17825	0,17804 63483	0,11686 13344	0,077009
45	0,26443 86238	0,17119 84118	0,11129 65089	0,072650
46	0,25673 65279	0,16461 38575	0,10599 66752	0,068538
47	0,24925 87650	0,15828 25553	0,10094 92144	0,064658
48	0,24199 88009	0,15219 47647	0,09614 21090	0,060998
49	0,23495 02922	0,14634 11199	0,09156 39133	0,057546
50	0,22810 70798	0,14071 26153	0,08720 37270	0,054228
51	0,22146 31843	0,13530 05917	0,08305 11685	0,051215
52	0,21501 28003	0,13009 67228	0,07909 63510	0,048316
53	0,20875 02915	0,12509 30026	0,07532 98581	0,045582
54	0,20267 01859	0,12028 17333	0,07174 27220	0,043001
55	0,19676 71708	0,11565 55128	0,06832 64019	0,040567
56	0,19103 60882	0,11120 72238	0,06507 27637	0,038271
57	0,18547 19303	0,10693 00229	0,06197 40607	0,036105
58	0,18006 98352	0,10281 73297	0,05902 29149	0,034061
59	0,17482 50827	0,09886 28171	0,05621 22999	0,032133
60	0,16973 30900	0,09506 04010	0,05353 55237	0,030310
61	0,16478 94078	0,09140 42317	0,05098 62131	0,028598
62	0,15998 97163	0,08788 86844	0,04855 82982	0,026989
63	0,15532 98216	0,08450 83504	0,04624 59983	0,025453
64	0,15080 56521	0,08125 80292	0,04404 38079	0,024012
65	0,14641 32544	0,07813 27204	0,04194 64837	0,022653
66	0,14214 87907	0,07512 76157	0,03994 90321	0,021370
67	0,13800 85347	0,07223 80921	0,03804 66972	0,020161
68	0,13398 88686	0,06945 97039	0,03623 49497	0,019020
69	0,13008 62802	0,06678 81768	0,03450 94759	0,017943
70	0,12629 73594	0,06421 94008	0,03286 61676	0,016927

Tabelle III.

Baarer Wehrt einer Jahrrente 1. auf gewiſſe Jahre.

(*Wehrte von S.* $\frac{1}{r^x}$)

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
1	0,97087 37864	0,96153 84615	0,95238 09524	0,9433
2	1,91346 96955	1,88609 46745	1,85941 04309	1,8333
3	2,82861 13549	2,77509 10332	2,72324 80294	2,6730
4	3,71709 84028	3,62989 52242	3,54595 05042	3,4651
5	4,57970 71872	4,45182 23310	4,32947 66707	4,2123
6	5,41719 14439	5,24213 68567	5,07569 20073	4,9173
7	6,23028 29552	6,00205 46699	5,78637 33974	5,5823
8	7,01969 21895	6,73274 48749	6,46321 27594	6,2097
9	7,78610 89218	7,43533 16105	7,10782 16756	6,8016
10	8,53020 28367	8,11089 57793	7,72173 49291	7,3600
11	9,25262 41133	8,76047 67109	8,30641 42182	7,8868
12	9,95400 39935	9,38507 37605	8,86325 16364	8,3838
13	10,63495 53335	9,98564 78466	9,39357 29870	8,8526
14	11,29607 31393	10,56312 29294	9,89864 09400	9,2949
15	11,93793 50867	11,11838 74321	10,37965 80381	9,7122
16	12,56110 20259	11,65229 56078	10,83776 95601	10,1058
17	13,16611 84717	12,16566 88536	11,27406 62477	10,4772
18	13,75351 30793	12,65929 69746	11,68958 69026	10,8276
19	14,32379 91061	13,13393 93986	12,08532 08596	11,1581
20	14,87747 48603	13,59032 63448	12,46221 03425	11,4699
21	15,41502 41362	14,02915 99469	12,82115 27071	11,7640
22	15,93691 66371	14,45111 53336	13,16300 25782	12,0415
23	16,44360 83855	14,85684 16669	13,48857 38840	12,3033
24	16,93554 21218	15,24696 31413	13,79864 17943	12,5503
25	17,41314 76911	15,62207 99435	14,09394 45660	12,7833
26	17,87684 24185	15,98276 91765	14,37518 53009	13,0031
27	18,32703 14743	16,32958 57466	14,64303 36199	13,2105
28	18,76410 82275	16,66306 32179	14,89812 72570	13,4061
29	19,18845 45898	16,98371 46325	15,14107 35781	13,5907
30	19,60044 13493	17,29203 33005	15,37245 10268	13,7648

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
31	20,00042 84945	17,58849 35582	15,59281 05017	13,9290
32	20,38876 55286	17,87355 14982	15,80267 66683	14,0840
33	20,76579 17753	18,14764 56713	16,00254 92079	14,2302
34	21,13183 66750	18,41119 77609	16,19290 40075	14,3681
35	21,48722 00728	18,66461 32310	16,37419 42929	14,4982
36	21,83225 24979	18,90828 19534	16,54685 17075	14,6209
37	22,16723 54348	19,14257 88013	16,71128 73405	14,7367
38	22,49246 14872	19,36786 42320	16,86789 27052	14,8460
39	22,80821 51332	19,58448 48384	17,01704 06716	14,9490
40	23,11477 19740	19,79277 38831	17,15908 63539	15,0462
41	23,41239 99748	19,99305 18106	17,29436 79561	15,1380
42	23,70135 91988	20,18562 67410	17,42320 75772	15,2245
43	23,98190 21348	20,37079 49432	17,54591 19783	15,3061
44	24,25427 39173	20,54884 12916	17,66277 33127	15,3831
45	24,51871 25411	20,72003 97034	17,77406 98216	15,4558
46	24,77544 90690	20,88465 35610	17,88006 64968	15,5243
47	25,02470 78340	21,04293 61163	17,98101 57112	15,5890
48	25,26670 66349	21,19513 08810	18,07715 78202	15,6500
49	25,50165 69271	21,34147 20010	18,16872 17335	15,7075
50	25,72976 40069	21,48218 46163	18,25592 54605	15,7618
51	25,95122 71912	21,61748 52080	18,33897 66290	15,8130
52	26,16623 99915	21,74758 19308	18,41807 29800	15,8613
53	26,37499 02830	21,87267 49334	18,49340 28381	15,9069
54	26,57766 64689	21,99295 66667	18,56514 55601	15,9499
55	26,77443 76397	22,10861 21795	18,63347 19620	15,9905
56	26,96546 37279	22,21981 94033	18,69854 47257	16,0288
57	27,15093 56582	22,32674 94262	18,76051 87864	16,0649
58	27,33100 54934	22,42956 67559	18,81954 17013	16,0989
59	27,50583 05761	22,52842 95730	18,87575 40012	16,1311
60	27,67556 36661	22,62348 99740	18,92928 95249	16,1614
61	27,84035 30739	22,71489 42058	18,98027 57380	16,1900
62	28,00034 27902	22,80278 28902	19,02883 40362	16,2170
63	28,15567 26118	22,88729 12406	19,07508 00345	16,2424
64	28,30647 82639	22,96854 92698	19,11912 38424	16,2664
65	28,45289 15183	23,04668 19902	19,16107 03261	16,2891
66	28,59504 03090	23,12180 96059	19,20101 93582	16,3104
67	28,73304 88437	23,19404 76980	19,23906 60554	16,3306
68	28,86703 77123	23,26350 74019	19,27530 10051	16,3496
69	28,99712 39925	23,33029 55787	19,30981 04810	16,3676
70	29,12342 13519	23,39451 49795	19,34267 66486	16,3845

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
71	29,24604 01475	23,45626 44034	19,37397 77606	16,4005
72	29,36508 75218	23,51563 88494	19,40378 83434	16,4155
73	29,48066 74969	23,57272 96629	19,43217 93747	16,4297
74	29,59288 10649	23,62762 46759	19,45921 84521	16,4431
75	29,70182 62760	23,68040 83422	19,48496 99544	16,4558
76	29,80759 83268	23,73116 18676	19,50949 51947	16,4677
77	29,91028 96377	23,77996 33342	19,53285 25664	16,4790
78	30,00998 99395	23,82688 78213	19,55509 76823	16,4896
79	30,10678 63490	23,87200 75205	19,57628 35070	16,4996
80	30,20076 34456	23,91539 18465	19,59646 04829	16,5091
81	30,29200 33452	23,95710 75448	19,61567 66504	16,5180
82	30,38058 57720	23,99721 87931	19,63397 77623	16,5264
83	30,46658 81281	24,03578 73011	19,65140 73927	16,5343
84	30,55008 55613	24,07287 24049	19,66800 70407	16,5418
85	30,63115 10304	24,10853 11586	19,68381 62292	16,5489
86	30,70985 53693	24,14281 84217	19,69887 25992	16,5556
87	30,78626 73488	24,17578 69439	19,71321 19992	16,5618
88	30,86045 37367	24,20748 74461	19,72686 85707	16,5678
89	30,93247 93560	24,23796 86982	19,73987 48292	16,5734
90	31,00240 71417	24,26727 75944	19,75226 17421	16,5786
91	31,07029 81958	24,29545 92254	19,76405 88020	16,5836
92	31,13621 18406	24,32255 69475	19,77529 40971	16,5883
93	31,20020 56705	24,34861 24495	19,78599 43782	16,5928
94	31,26233 56024	24,37366 58168	19,79618 51221	16,5969
95	31,32265 59247	24,39775 55931	19,80589 05925	16,6009
96	31,38121 93444	24,42091 88395	19,81513 38976	16,6046
97	31,43807 70334	24,44319 11918	19,82393 70453	16,6081
98	31,49327 86732	24,46460 69152	19,83232 09955	16,6114
99	31,54687 24982	24,48519 89569	19,84030 57100	16,6145
100	31,59890 53381	24,50499 89970	19,84791 02000	16,6175

Tabelle IV.

Die Süßmilchische Sterblichkeits-Tafel, nach der Berichtigung des Hrn. Baumanns, in der vierten Ausgabe der göttl. Ordn. 1775.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0—1	1000	250	26—27	461	5
1—2	750	89	27—28	456	5
2—3	661	43	28—29	451	6
3—4	618	25	29—30	445	6
4—5	593	14	30—31	439	6
5—6	579	12			
6—7	567	11	31—32	433	6
7—8	556	9	32—33	427	6
8—9	547	8	33—34	421	6
9—10	539	7	34—35	415	6
10—11	532	5	35—36	409	7
11—12	527	4	36—37	402	7
12—13	523	4	37—38	395	7
13—14	519	4	38—39	388	7
14—15	515	4	39—40	381	7
15—16	511	4	40—41	374	7
16—17	507	4	41—42	367	7
17—18	503	4	42—43	360	7
18—19	499	4	43—44	353	7
19—20	495	4	44—45	346	7
20—21	491	5	45—46	339	7
21—22	486	5	46—47	332	8
22—23	481	5	47—48	324	8
23—24	476	5	48—49	316	8
24—25	471	5	49—50	308	8
25—26	466	5	50—51	300	9

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
51—52	291	9
52—53	282	9
53—54	273	9
54—55	264	9
55—56	255	9
56—57	246	9
57—58	237	9
58—59	228	9
59—60	219	9
60—61	210	9
61—62	201	9
62—63	192	10
63—64	182	10
64—65	172	10
65—66	162	10
66—67	152	10
67—68	142	10
68—69	132	10
69—70	122	10
70—71	112	9
71—72	103	9
72—73	94	9
73—74	85	8
74—75	77	8
75—76	69	7
76—77	62	7
77—78	55	6
78—79	49	6
79—80	43	6
80—81	37	5
81—82	32	4
82—83	28	4
83—84	24	4
84—85	20	3
85—86	17	3
86—87	14	2
87—88	12	2
88—89	10	2
89—90	8	2
90—91	6	1
91—92	5	1
92—93	4	1
93—94	3	1
94—95	2	1
95—96	1	1
96—97	0	

Tabelle V.

Die Northamptoner Sterblichkeits-Tafel. Aus Dr. Price vierten Ausgabe der Observations on reverſion. Paym. Vol. II.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0	11650	1340
3Monat	10310	554
6Monat	9756	553
9Monat	9203	553
1-2Jahr	8650	1367
2—3	7283	502
3—4	6781	335
4—5	6446	197
5—6	6249	184
6—7	6065	140
7—8	5925	110
8—9	5815	80
9—10	5735	60
10—11	5675	52
11—12	5623	50
12—13	5573	50
13—14	5523	50
14—15	5473	50
15—16	5423	50
16—17	5373	53
17—18	5320	58
18—19	5262	63
19—20	5199	67
20—21	5132	72
21—22	5060	75
22—23	4985	75
23—24	4910	75
24—25	4835	75
25—26	4760	75
26—27	4685	75
27—28	4610	75
28—29	4535	75
29—30	4460	75
30—31	4385	75
31—32	4310	75
32—33	4235	75
33—34	4160	75
34—35	4085	75
35—36	4010	75
36—37	3935	75
37—38	3860	75
38—39	3785	75
39—40	3710	75
40—41	3635	76
41—42	3559	77
42—43	3482	78
43—44	3404	78
44—45	3326	78
45—46	3248	78
46—47	3170	78
47—48	3092	78
48—49	3014	78
49—50	2936	79
50—51	2857	81
51—52	2776	82
52—53	2694	82
53—54	2612	82
54—55	2530	82
55—56	2448	82

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
56—57	2366	82
57—58	2284	82
58—59	2202	82
59—60	2120	82
60—61	2038	82
61—62	1956	82
62—63	1874	81
63—64	1793	81
64—65	1712	80
65—66	1632	80
66—67	1552	80
67—68	1472	80
68—69	1392	80
69—70	1312	80
70—71	1232	80
71—72	1152	80
72—73	1072	80
73—74	992	80
74—75	912	80
75—76	832	80

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
76—77	752	77
77—78	675	73
78—79	602	68
79—80	534	65
80—81	469	63
81—82	406	60
82—83	346	57
83—84	289	55
84—85	234	48
85—86	186	41
86—87	145	34
87—88	111	28
88—89	83	21
89—90	62	16
90—91	46	12
91—92	34	10
92—93	24	8
93—94	16	7
94—95	9	5
95—96	4	3
96—97	1	1

Tabelle VI.

Die Schwedische Sterblichkeits-Tafel von Wargentin. Aus Dr. Price vierten Ausgabe der Observations etc. Vol. II.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
	Gebohren 10249	
0—1	10000	2195
1—2	7805	509
2—3	7296	344
3—4	6952	245
4—5	6707	143
5—6	6564	122
6—7	6442	105
7—8	6337	87
8—9	6250	73
9—10	6177	62
10—11	6115	54
11—12	6061	45
12—13	6916	42
13—14	5974	38
14—15	5936	37
15—16	5899	37
16—17	5862	40
17—18	5822	40
18—19	5782	42
19—20	5740	43
20—21	5697	47
21—22	5650	47
22—23	5603	48
23—24	5555	48
24—25	5567	50
25—26	5457	50

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
	Todtgebohren 249	
26—27	5407	53
27—28	5355	54
28—29	5301	55
29—30	5246	55
30—31	5191	59
31—32	5132	60
32—33	5072	62
33—34	5010	63
34—35	4947	63
35—36	4884	59
36—37	4825	58
37—38	4767	58
38—39	4709	58
39—40	4651	60
40—41	4591	65
41—42	4526	73
42—43	4453	78
43—44	4375	78
44—45	4297	78
45—46	4219	76
46—47	4143	74
47—48	4069	72
48—49	3997	73
49—50	3924	78
50—51	3846	85

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
51—52	3761	87
52—53	3674	90
53—54	3584	90
54—55	3494	91
55—56	3403	91
56—57	3312	92
57—58	3220	95
58—59	3125	95
59—60	3030	100
60—61	2930	108
61—62	2822	114
62—63	2708	118
63—64	2590	118
64—65	2472	118
65—66	2354	118
66—67	2236	118
67—68	2118	121
68—69	1997	124
69—70	1873	124
70—71	1749	127
71—72	1622	133
72—73	1489	135
73—74	1354	140
74—75	1214	130
75—76	1084	121
76—77	963	115
77—78	848	105
78—79	743	95
79—80	648	90
80—81	558	90
81—82	468	84
82—83	384	75
83—84	309	65
84—85	244	55
85—86	189	45
86—87	144	35
87—88	109	27
88—89	82	20
89—90	62	15
90—91	47	14
91—92	33	12
92—93	21	10
93—94	11	6
94—95	5	3
95—96	2	1
96—97	1	1

Tabelle VII.

Die Sterbensordnung der Rentenirer, nach Deparcieux, wie Hr. Florencourt sie eingerichtet hat.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0—1	10000	2550
1—2	7450	362
2—3	7088	265
3—4	6823	205
4—5	6618	150
5—6	6468	123
6—7	6345	102
7—8	6243	91
8—9	6154	81
9—10	6073	69
10—11	6004	58
11—12	5946	49
12—13	5897	43
13—14	5854	39
14—15	5815	37
15—16	5778	38
16—17	5740	41
17—18	5699	44
18—19	5655	47
19—20	5608	50
20—21	5558	52
21—22	5506	53
22—23	5453	54
23—24	5399	55
24—25	5344	56
25—26	5288	57
26—27	5231	58
27—28	5173	57
28—29	5116	56
29—30	5060	55
30—31	5005	54
31—32	4951	54
32—33	4897	53
33—34	4844	52
34—35	4792	52
35—36	4740	52
36—37	4688	51
37—38	4637	50
38—39	4587	49
39—40	4538	48
40—41	4490	49
41—42	4441	49
42—43	4392	50
43—44	4342	51
44—45	4291	52
45—46	4239	53
46—47	4186	54
47—48	4132	55
48—49	4077	56
49—50	4021	57
50—51	3964	59
51—52	3905	62
52—53	3843	66
53—54	3777	70
54—55	3707	76
55—56	3631	81
56—57	3550	85
57—58	3465	88
58—59	3377	91
59—60	3286	95
60—61	3191	99

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61—62	3092	102
62—63	2990	105
63—64	2885	107
64—65	2778	109
65—66	2669	110
66—67	2559	111
67—68	2448	112
68—69	2336	113
69—70	2223	114
70—71	2109	116
71—72	1993	119
72—73	1874	125
73—74	1749	132
74—75	1616	138
75—76	1479	142
76—77	1337	139
77—78	1198	134
78—79	1064	128
79—80	936	122
80—81	812	115
81—82	697	107
82—83	590	98
83—84	492	88
84—85	404	77
85—86	327	66
86—87	261	55
87—88	206	47
88—89	159	42
89—90	117	37
90—91	80	30
91—92	50	22
92—93	28	14
93—94	14	8
94—95	6	3
95—96	3	2
96—97	1	1
97—98	0	0

Tabelle VIII.

Die Halleyſche Sterblichkeits-Tafel aus Breslau.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0	1000	145
1	855	57
2	798	38
3	760	28
4	732	22
5	710	18
6	692	12
7	680	10
8	670	9
9	661	8
10	653	7
11	646	6
12	640	6
13	634	6
14	628	6
15	622	6
16	616	6
17	610	6
18	604	6
19	598	6
20	592	6
21	586	7
22	579	6
23	573	6
24	567	7
25	560	7
26	553	7
27	546	7
28	539	8
29	531	8
30	523	8
31	515	8
32	507	8
33	499	9
34	490	9
35	481	9
36	472	9
37	463	9
38	454	9
39	445	9
40	436	9
41	427	10
42	417	10
43	407	10
44	397	10
45	387	10
46	377	10
47	367	10
48	357	11
49	346	11
50	335	11
51	324	11
52	313	11
53	302	10
54	292	10
55	282	10
56	272	10
57	262	10
58	252	10
59	242	10
60	232	10

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	222	10
62	212	10
63	202	10
64	192	10
65	182	10
66	172	10
67	162	10
68	152	10
69	142	11
70	131	11
71	120	11
72	109	11
73	98	10
74	88	10
75	78	10
76	68	10
77	58	9
78	49	8
79	41	7
80	34	6
81	28	5
82	23	4
83	19	4
84	15	4
85	11	3
86	8	3
87	5	2
88	3	2
89	1	1
90		

Tabelle IX.

Die Londoner Sterblichkeits-Tafel, nach Simpson.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs,	Jährlicher Abgang.
0	1000	320
1	680	133
2	547	51
3	496	27
4	469	17
5	452	12
6	440	10
7	430	8
8	422	7
9	415	5
10	410	5
11	405	5
12	400	5
13	395	5
14	390	5
15	385	5
16	380	5
17	375	5
18	370	5
19	365	5
20	360	5

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
21	355	5	51	153	6
22	350	5	52	147	6
23	345	6	53	141	6
24	339	6	54	135	6
25	333	6	55	129	6
26	327	6	56	123	6
27	321	6	57	117	5
28	315	7	58	112	5
29	308	7	59	107	5
30	301	7	60	102	5
31	294	7	61	97	5
32	287	7	62	92	5
33	280	7	63	87	5
34	273	7	64	82	5
35	266	7	65	77	5
36	259	7	66	72	5
37	252	7	67	67	5
38	245	8	68	62	4
39	237	8	69	58	4
40	229	7	70	54	4
41	222	8	71	50	4
42	214	8	72	46	4
43	206	7	73	42	3
44	199	7	74	39	3
45	192	7	75	36	3
46	185	7	76	33	3
47	178	7	77	30	3
48	171	6	78	27	2
49	165	6	79	25	
50	159	6			

Tabelle X.

Die Sterbensordnung nach Kerseboom aus Holland und Westfriesland.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahres.	Jährlicher Abgang.
0	1400	275
1	1125	50
2	1075	45
3	1030	37
4	993	29
5	964	17
6	947	17
7	930	17
8	913	9
9	904	9
10	895	9
11	886	8
12	878	8
13	870	7
14	863	7
15	856	7
16	849	7
17	842	7
18	835	9
19	826	9
20	817	9
21	808	8
22	800	8
23	792	9
24	783	11
25	772	12
26	760	13
27	747	12
28	735	12
29	723	12
30	711	12
31	699	12
32	687	12
33	675	10
34	665	10
35	655	10
36	645	10
37	635	10
38	625	10
39	615	10
40	605	9
41	596	9
42	587	9
43	578	9
44	569	9
45	560	10
46	550	10
47	540	10
48	530	12
49	518	11
50	507	12
51	495	13
52	482	12
53	470	12
54	458	12
55	446	12
56	434	13
57	421	13
58	408	13
59	395	13
60	382	13

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	369	13
62	356	13
63	343	14
64	329	14
65	315	14
66	301	14
67	287	14
68	273	14
69	259	14
70	245	14
71	231	14
72	217	14
73	203	14
74	189	14
75	175	15
76	160	15
77	145	15
78	130	15
79	115	15
80	100	13

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
81	87	12
82	75	11
83	64	9
84	55	10
85	45	9
86	36	8
87	28	7
88	21	6
89	15	5
90	10	3
91	7	2
92	5	2
93	3	1
94	2	1
95	1	1

Tabelle XI.

Die Sterbensordnung nach Hrn. Baumanns Tafel aus der Churmarck.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs	Jährlicher Abgang.
0	1000	241
1	759	70
2	689	38
3	651	26
4	625	22
5	603	19
6	584	14
7	570	10
8	560	8
9	552	5
10	547	4
11	543	4
12	539	4
13	535	4
14	531	4
15	527	4
16	523	4
17	519	4
18	515	4
19	511	4
20	507	5
21	502	5
22	497	5
23	492	5
24	487	5
25	482	6
26	476	6
27	470	6
28	464	6
29	458	6
30	452	6
31	446	6
32	440	6
33	434	6
34	428	6
35	422	7
36	415	7
37	408	7
38	401	7
39	394	7
40	387	7
41	380	7
42	373	7
43	366	7
44	359	7
45	352	7
46	345	7
47	338	7
48	331	7
49	324	7
50	317	8
51	309	8
52	301	8
53	293	9
54	284	9
55	275	10
56	265	10
57	255	10
58	245	11
59	234	11
60	223	11

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	212	11
62	201	11
63	190	11
64	179	11
65	168	11
66	157	11
67	146	11
68	135	11
69	124	11
70	113	10
71	103	10
72	93	10
73	83	10
74	73	9
75	64	8
76	56	7
77	49	6
78	43	6
79	37	5
80	32	5
81	27	4
82	23	4
83	19	3
84	16	3
85	13	2
86	11	2
87	9	2
88	7	1
89	6	1
90	5	1
91—93	4	1
93—95	3	1
95—99	2	1
100	1	1
	0	

Tabelle XII und XIII.

Die Ordnung des Sterbens für die beyden Geschlechter, jedes besonders, nach Wargentin, nebst der mittlern Lebensdauer.

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Fürs weibliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang	Mittlere Lebensdauer.
	Gebohren in allen 10,282, todt gebohren 282.			Gebohren in allen 10,277, todt gebohren 277.		
0	10000	2300	33,20	10000	2090	35,70
1	7700	500	42,45	7910	518	44,00
2	7200	337	43,83	7392	350	46,05
3	6863	240	44,96	7042	250	47,31
4	6623	150	45,57	6792	135	48,04
5	6473	125	45,62	6657	120	48,00
6	6348	105	45,50	6537	105	47,87
7	6243	90	45,26	6432	85	47,64
8	6153	75	44,91	6347	70	47,28
9	6078	65	44,46	6277	60	46,80
10	6013	55	43,94	6217	52	46,25
11	5958	45	43,26	6165	46	45,55
12	5913	45	42,58	6119	40	44,85
13	5868	40	41,91	6079	35	44,15
14	5828	40	41,24	6044	35	43,46
15	5788	39	40,56	6009	35	42,76
16	5749	39	39,83	5974	40	42,04
17	5710	39	39,11	5934	40	41,31
18	5671	44	38,39	5894	42	40,59
19	5627	44	37,67	5852	43	39,87
20	5583	50	36,95	5809	43	39,15
21	5533	50	36,28	5766	43	38,43
22	5483	50	35,62	5723	43	37,72
23	5433	55	34,96	5680	44	37,01
24	5378	55	34,30	5636	45	36,29
25	5323	55	33,63	5591	45	35,58

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Fürs weibliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
26	5268	55	32,98	5346	50	34,90
27	5213	55	32,38	5296	52	34,21
28	5158	55	31,66	5444	55	33,53
29	5103	56	31,00	5389	55	32,85
30	5049	59	30,34	5334	60	32,17
31	4988	60	29,69	5274	60	31,54
32	4928	60	29,04	5214	65	30,91
33	4868	60	28,39	5149	65	30,28
34	4808	60	27,74	5084	65	29,66
35	4748	60	27,09	5019	60	29,03
36	4688	60	26,43	4959	56	28,26
37	4628	60	25,76	4903	56	27,50
38	4568	60	25,09	4847	56	26,74
39	4508	60	24,42	4791	58	25,97
40	4448	65	23,75	4733	65	25,21
41	4383	72	23,15	4668	75	24,68
42	4311	80	22,54	4593	76	24,75
43	4231	80	21,93	4517	76	23,82
44	4151	80	21,32	4441	75	23,10
45	4071	80	20,71	4366	72	22,57
46	3991	80	20,12	4294	67	21,91
47	3911	80	19,52	4227	65	21,24
48	3831	80	18,92	4162	65	20,58
49	3751	85	18,32	4097	70	19,92
50	3666	95	17,72	4027	75	19,26
51	3571	95	17,17	3952	80	18,64
52	3476	95	16,63	3872	85	18,01
53	3381	95	16,08	3787	85	17,39
54	3286	95	15,53	3702	85	16,77
55	3191	95	14,98	3617	85	16,15
56	3096	95	14,43	3532	85	15,53
57	3001	100	13,87	3447	90	14,92
58	2901	100	13,33	3357	90	14,31
59	2801	100	12,79	3267	100	13,69
60	2701	105	12,24	3167	101	13,08

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Fürs weibliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
61	2586	110	11,72	3057	118	12,56
62	2486	115	11,21	2939	120	12,04
63	2371	115	10,73	2819	120	12,52
64	2256	115	10,26	2699	120	11,01
65	2141	115	9,78	2579	120	10,49
66	2026	115	9,30	2459	120	9,97
67	1911	120	8,84	2339	120	9,46
68	1791	125	8,40	2219	120	8,94
69	1666	125	7,99	2099	120	8,42
70	1541	125	7,60	1979	130	7,91
71	1416	125	7,22	1849	140	7,53
72	1291	120	6,87	1709	150	7,16
73	1171	120	6,53	1559	160	6,78
74	1051	110	6,22	1399	150	6,40
75	941	105	5,89	1249	140	6,03
76	836	100	6,56	1109	130	5,78
77	736	90	5,25	979	120	5,43
78	646	85	4,92	859	110	5,11
79	561	80	4,59	749	100	4,79
80	481	75	4,27	649	95	4,47
81	406	70	3,96	554	90	4,13
82	336	65	3,69	464	85	3,84
83	271	60	3,45	379	80	3,59
84	211	50	3,30	299	75	3,42
85	161	40	3,16	224	55	3,40
86	121	30	3,04	169	40	3,34
87	91	22	2,88	129	30	3,23
88	69	17	2,64	99	23	3,05
89	52	14	2,34	76	18	2,82
90	38	12	2,02	58	15	2,55
91	26	9		43	12	
92	17	7		31	10	
93	10	6		21	8	
94	4	3		13	6	
95	1	1		7	4	
96	0	0		3	2	
97	0	0		1	1	

Tabelle XIV.

Sterbensordnung für jedes der beyden Geſchlechter beſonders, nach Hrn. Kritter, mit der mittlern Lebensdauer.

(Dieſe Tabelle iſt aus einem von Hrn. Kritter bey der Adminiſtration der Calenbergiſchen Wittwen-Caſſe übergebenen Plan genommen.)

Alter.	*Für Ehemänner.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	*Für Ehefrauen und Wittwen.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
20	496	5	36	496	5	37,3
21	491	5	35,4	491	5	36,6
22	486	5	34,7	486	5	35,9
23	481	5	34,1	481	5	35,3
24	476	5	33,4	476	5	34,7
25	471	5	32,8	471	5	34,1
26	466	5	32,1	466	5	33,4
27	461	5	31,5	461	5	32,7
28	456	5	30,8	456	5	32,1
29	451	5	30,1	451	5	31,5
30	446	6	29,4	446	6	30,8
31	440	6	28,8	440	6	30,2
32	434	6	28,2	434	6	29,6
33	428	6	27,6	428	6	29
34	422	6	27	422	6	28,4
35	416	6	26,4	416	6	27,8
36	410	6	25,8	410	6	27,2
37	404	6	25,2	404	6	26,6
38	398	6	24,6	398	6	26
39	392	7	24	392	7	25,4
40	385	7	23,3	385	7	24,9
41	378	7	22,7	378	7	24,3
42	371	7	22,1	371	7	23,7
43	364	7	21,5	364	7	23,1
44	357	7	20,9	357	7	22,5
45	350	8	20,3	350	7	22

Alter.

Alter.	Für Ehemänner. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Für Ehefrauen und Wittwen. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
46	342	8	19,7	343	7	21,4
47	334	8	19,1	336	7	20,8
48	326	8	18,6	329	7	20,3
49	318	8	18	322	7	19,7
50	310	9	17,5	315	7	19,1
51	301	9	16,9	308	7	18,5
52	292	9	16,4	301	7	17,9
53	283	9	15,9	294	7	17,3
54	274	9	15,4	287	7	16,7
55	265	10	14,9	280	8	16,2
56	255	10	14,4	272	8	15,6
57	245	10	14	264	8	15
58	235	10	13,5	256	8	14,5
59	225	10	13,1	248	8	14
60	215	10	12,7	240	9	13,4
61	205	10	12,2	231	10	12,9
62	195	10	11,8	221	10	12,4
63	185	10	11,4	211	10	11,9
64	175	9	11	201	10	11,4
65	166	9	10,6	191	10	11
66	157	9	10,1	181	10	10,5
67	148	9	9,7	171	10	10,1
68	139	9	9,2	161	10	9,7
69	130	9	8,8	151	10	9,3
70	121	9	8,4	141	10	8,9
71	112	9	8	131	9	8,4
72	103	8	7,4	122	9	7,9
73	95	8	7	113	9	7,5
74	87	8	6,6	104	9	7,1
75	79	8	6,2	95	9	6,7
76	71	8	6	86	9	6,3
77	63	8	5,7	77	9	6
78	55	8	5,4	68	9	5,8
79	47	8	5,1	59	9	5,4
80	39	7	4,8	50	8	5

Alter.	Für Ehemänner. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Für Ehefrauen und Wittwen. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
81	32	6	4,7	42	8	5
82	26	5	4,5	34	7	5
83	21	4	4,3	27	6	5
84	17	3	4,2	21	5	5
85	14	3	3,9	16	4	5
86	11	2	3,6	12	3	5,3
87	9	2	3,2	9	2	6
88	7	2	2,9	7	1	6
89	5	2	2,6	6	1	6
90	3	1	2,6	5	0	6
91	2	1	2,5	5	0	5
92	1	0	5	5	0	4
93	1	0	2	5	1	3
94	1	1	1	4	1	2,5
95				3	1	2
96				2	1	1,5
97				1	1	1
98				0	0	

Tabelle XV.

Die mittlere Lebensdauer nach den vornehmsten Sterblichkeits-Tafeln.

(In der letzten Spalte dieser Tabelle ist, was nach dem Comma steht, die Zahl der Monate, z. B. 40,11 heißt 40 Jahr 11 Mon.)

Alter.	Süßmilch.	Northampton.	Wargentin.	Deparcieux.	Kerseboom.
0	28,49	25,18	34,42	34,79	34,6
1	36,72	32,74	42,95	45,52	41,9
2	40,71	37,79	44,92	46,82	42,8
3	42,50	39,55	46,11	47,62	43,6
4	43,28	40,58	46,78	48,09	44,2
5	43,31	40,84	46,79	48,19	44,5

Alter.	Süssmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerseb.
6	43,22	41,07	46,66	48,11	44,3
7	43,06	41,03	46,43		44,0
8	42,76	40,79	46,67		43,9
9	42,39	40,36	45,61		43,3
10	41,94	39,78	45,07	46,74	42,8
11	41,33	39,14	44,38	46,19	42,2
12	40,65	38,49	43,70		41,7
13	39,96	37,83	43,01		40,11
14	39,26	37,17	42,33		40,3
15	38,56	36,51	41,64	43,46	39,7
16	37,86	35,85	40,92	42,77	38,11
17	37,16	35,20	40,10		38,3
18	36,46	34,58	39,47		37,7
19	35,75	33,99	38,74		36,11
20	35,03	33,43	38,02	40,08	36,3
21	34,39	32,90	37,33	39,29	35,7
22	33,74	32,39	36,64		35,9
23	33,09	31,88	35,96		34,5
24	32,44	31,36	35,27		33,10
25	31,78	30,85	34,58	37,01	33,3
26	31,12	30,33	33,91	36,41	32,8
27	30,45	29,82	33,23		32,1
28	29,79	29,30	32,56		31,6
29	29,18	28,79	31,88		31,0
30	28,57	28,27	31,21	33,96	30,6
31	27,96	27,76	30,57	33,33	30,1
32	27,35	27,24	29,94		29,8
33	26,73	26,72	29,30		29,3
34	26,11	26,20	28,67		28,10
35	25,49	25,68	28,03	30,73	28,4
36	24,92	25,16	27,31	30,06	27,10
37	24,35	24,64	26,68		27,3
38	23,78	24,12	26,01		26,8
39	23,21	23,60	25,33		26,1
40	22,64	23,08	24,66	27,3	25,6
41	22,06	22,56	24,05	26,60	24,10
42	21,48	22,04	23,44		24,2
43	20,89	21,54	22,83		23,6
44	20,31	21,03	22,22		22,11
45	19,72	20,52	21,61	23,77	22,4

Alter.	Süssmileh.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerseb.
46	19,12	20,02	20,98	23,06	21,9
47	18,58	19,51	20,35		22,2
48	18,04	19,00	19,72		20,7
49	17,49	18,49	19,09		20,0
50	16,95	17,99	18,46	20,24	19,5
51	16,46	17,50	17,87	19,54	18,10
52	15,96	17,02	17,29		18,4
53	15,48	16,54	16,70		17,10
54	14,98	16,06	16,12		17,3
55	14,50	15,58	15,53	16,88	16,9
56	14,01	15,10	14,95	16,26	16,2
57	13,52	14,63	14,37		15,8
58	13,04	14,15	13,79		15,2
59	12,55	13,68	13,21		14,7
60	12,07	13,21	12,63	13,86	14,1
61	11,58	12,75	12,12	13,29	13,7
62	11,10	12,28	11,62		13,1
63	10,69	11,81	11,11		12,7
64	10,28	11,35	10,61		12,1
65	9,88	10,88	10,10	11,07	11,7
66	9,50	10,42	9,62	10,52	11,1
67	9,13	9,96	9,15		10,7
68	8,79	9,50	8,67		10,1
69	8,47	9,05	8,20		9,7
70	8,18	8,60	7,72	8,34	9,2
71	7,85	8,17	7,32	7,80	8,8
72	7,55	7,74	6,89		8,2
73	7,30	7,33	6,53		7,9
74	7,01	6,92	6,23		7,3
75	6,76	6,54	5,91	5,79	6,10
76	6,47	6,18	5,95	5,35	6,5
77	6,23	5,83	5,28		6,0
78	5,93	5,48	4,96		5,8
79	5,69	5,11	4,61		5,4
80	5,53	4,75	4,28	3,78	5,0
81	5,31	4,41	4,01	4,49	4,9
82	5,00	4,09	3,80		4,5
83	4,75	3,80	3,57		4,1
84	4,60	3,58	3,39		3,8
85	4,32	3,37	3,25	3,45	3,4

Alter.	Süfsmilch.	Northampt.	Wurgent.	Deparc.	Kerfeb.
86	4,14	3,19	3,09	3,2	3,1
87	3,75	3,01	3,92		2,10
88	3,40	2,86	2,71		2,7
89	3,12	2,66	2,43		2,5
90	3,00	2,41	2,65	1,79	2,2
91		2,09	1,71	1,54	2,0
92		1,75	1,40	1,36	1,9
93		1,37		1,21	1,6
94		1,05		1,16	1,0
95		0,75		0,83	0,6
96		0,50		0,5	

Tabelle XVI.

Leibrenten nach der Süfsmilchiſchen Tafel.

	3 Procentfuſs.		*4 Procentfuſs.*		*5 Procentfuſs.*	
Alter.	Leibrente.	In Procenten.	Leibrente.	In Procenten.	Leibrente.	In Procenten.
0	13,6601	7,32	11,4315	8,75	9,7823	10,22
1	17,7598	5,63	14,8517	6,73	12,6952	7,88
2	19,7556	5,06	16,5255	6,05	14,1247	7,08
3	20,7641	4,82	17,3823	5,75	14,8629	6,73
4	21,2887	4,70	17,8397	5,61	15,2640	6,55
5	21,4576	4,66	18,0017	5,56	15,4147	6,49
6	21,5690	4,64	18,1182	5,52	15,5280	6,44
7	21,6556	4,62	18,2157	5,49	15,6270	6,40
8	21,6723	4,61	18,2560	5,48	15,6783	6,38
9	21,6538	4,62	18,2681	5,47	15,7066	6,37
10	21,5969	4,63	18,2488	5,48	15,7089	6,37
11	21,4558	4,66	18,1588	5,51	15,6508	6,39
12	21,2685	4,70	18,0296	5,55	15,5590	6,43
13	21,0754	4,74	17,8953	5,59	15,4629	6,47
14	20,8763	4,79	17,7556	5,63	15,3622	6,51
15	20,6709	4,84	17,6104	5,68	15,2565	6,55

Alt.	3 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.	4 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.	5 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.
16	20,4590	4,89	17,4593	5,73	16,1457	6,60
17	20,2403	4,94	17,3020	5,78	15,0295	6,65
18	20,0146	5,00	17,1383	5,83	14,9075	6,71
19	19,7817	5,06	16,9681	5,89	14,7793	6,77
20	19,5411	5,12	16,7905	5,96	14,6447	6,83
21	19,3344	5,17	16,6417	6,01	14,5352	6,88
22	19,1214	5,23	16,4872	6,07	14,4206	6,93
23	18,9020	5,29	16,3268	6,12	14,3006	6,99
24	18,6757	5,35	16,1601	6,19	14,1751	7,05
25	18,4424	5,42	15,9870	6,26	14,0435	7,12
26	18,2017	5,49	15,8068	6,33	13,9056	7,19
27	17,9533	5,57	15,6193	6,40	13,7610	7,27
28	17,6969	5,65	15,4242	6,48	13,6092	7,35
29	17,4736	5,72	15,2575	6,55	13,4824	7,42
30	17,2438	5,80	15,0847	6,63	13,3500	7,49
31	17,0072	5,88	14,9055	6,71	13,2117	7,57
32	16,7636	5,97	14,7195	6,79	13,0672	7,65
33	16,5125	6,06	14,5265	6,88	12,9161	7,74
34	16,2538	6,15	14,3260	6,98	12,7580	7,84
35	15,9870	6,26	14,1175	7,08	12,5924	7,94
36	15,7534	6,35	13,9379	7,19	12,4523	8,03
37	15,5135	6,45	13,7523	7,27	12,3066	8,13
38	15,2672	6,55	13,5604	7,37	12,1551	8,23
39	15,0141	6,66	13,3619	7,48	11,9973	8,34
40	14,7540	6,78	13,1565	7,60	11,8330	8,45
41	14,4865	6,90	12,9437	7,73	11,6616	8,58
42	14,2112	7,04	12,7233	7,86	11,4827	8,71
43	13,9278	7,18	12,4946	8,00	11,2960	8,87
44	13,6359	7,33	12,2572	8,16	11,1007	9,01
45	13,3349	7,50	12,0108	8,33	10,8964	9,18
46	13,0246	7,68	11,7546	8,51	10,6825	9,36
47	12,7466	7,85	11,5266	8,68	10,4936	9,53
48	12,4613	8,02	11,2912	8,86	10,2972	9,71
49	12,1686	8,22	11,0478	9,05	10,0928	9,91
50	11,8679	8,43	10,7961	9,26	9,8802	10,12
51	11,6020	8,62	10,5752	9,46	9,6950	10,31
52	11,3314	8,83	10,3492	9,66	9,5047	10,52
53	11,0561	9,04	10,1180	9,88	9,3089	10,74
54	10,7760	9,28	9,8815	10,12	9,1076	10,98
55	10,4910	9,53	9,6394	10,37	8,9005	11,24

Alter.	Süssmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerseb.
6	43,22	41,07	46,66	48,11	44,3
7	43,06	41,03	46,43		44,0
8	42,76	40,79	46,67		43,9
9	42,39	40,36	45,61		43,3
10	41,94	39,78	45,07	46,74	42,8
11	41,33	39,14	44,38	46,19	42,2
12	40,65	38,49	43,70		41,7
13	39,96	37,83	43,01		40,11
14	39,26	37,17	42,33		40,3
15	38,56	36,51	41,64	43,46	39,7
16	37,86	35,85	40,92	42,77	38,11
17	37,16	35,20	40,10		38,3
18	36,46	34,58	39,47		37,7
19	35,75	33,99	38,74		36,11
20	35,03	33,43	38,02	40,08	36,3
21	34,39	32,90	37,33	39,29	35,7
22	33,74	32,39	36,64		35,9
23	33,09	31,88	35,96		34,5
24	32,44	31,36	35,27		33,10
25	31,78	30,85	34,58	37,01	33,3
26	31,12	30,33	33,91	36,41	32,8
27	30,45	29,82	33,23		32,1
28	29,79	29,30	32,56		31,6
29	29,18	28,79	31,88		31,0
30	28,57	28,27	31,21	33,96	30,6
31	27,96	27,76	30,57	33,33	30,1
32	27,35	27,24	29,94		29,8
33	26,73	26,72	29,30		29,3
34	26,11	26,20	28,67		28,10
35	25,49	25,68	28,03	30,73	28,4
36	24,92	25,16	27,31	30,06	27,10
37	24,35	24,64	26,68		27,3
38	23,78	24,12	26,01		26,8
39	23,21	23,60	25,33		26,1
40	22,64	23,08	24,66	27,3	25,6
41	22,06	22,56	24,05	26,60	24,10
42	21,48	22,04	23,44		24,2
43	20,89	21,54	22,83		23,6
44	20,31	21,03	22,22		22,11
45	19,72	20,52	21,61	23,77	22,4

Tabelle XVII.

Leibrenten nach der Northamptoner Tafel.

Alter.	3 Procentfuſs.	4 Procentfuſs.	5 Procentfuſs.
0		10,327	8,863
½		13,008	11,274
1	16,021	13,465	11,563
2	18,599	15,633	13,420
3	19,575	16,462	14,135
4	20,210	17,010	14,613
5	20,473	17,248	14,827
6	20,727	17,482	15,041
7	20,853	17,611	15,166
8	20,885	17,662	15,226
9	20,812	17,625	15,210
10	20,663	17,523	15,139
11	20,480	17,393	15,043
12	20,283	17,251	14,937
13	20,081	17,103	14,826
14	19,872	16,950	14,710
15	19,657	16,791	14,588
16	19,435	16,625	14,460
17	19,218	16,462	14,334
18	19,013	16,309	14,217
19	18,820	16,167	14,108
20	18,638	16,033	14,007
21	18,470	15,912	13,917
22	18,311	15,797	13,833
23	18,148	15,680	13,746
24	17,983	15,560	13,658
25	17,814	15,438	13,567
26	17,642	15,312	13,473
27	17,467	15,184	13,377
28	17,289	15,053	13,278
29	17,107	14,918	13,177
30	16,922	14,781	13,072

Alter.	Süssmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kersseb.
86	4,14	3,19	3,09	3,2	3,1
87	3,75	3,01	3,92		2,10
88	3,40	2,86	2,71		2,7
89	3,12	2,66	2,43		2,5
90	3,00	2,41	2,65	1,79	2,2
91		2,09	1,71	1,54	2,0
92		1,75	1,40	1,36	1,9
93		1,37		1,21	1,6
94		1,05		1,16	1,0
95		0,75		0,83	0,6
96		0,50		0,5	

Tabelle XVI.

Leibrenten nach der Süssmilchischen Tafel.

Alter.	3 Procentfuss. Leibrente.	3 Procentfuss. In Procenten.	4 Procentfuss. Leibrente.	4 Procentfuss. In Procenten.	5 Procentfuss. Leibrente.	5 Procentfuss. In Procenten.
0	13,6601	7,32	11,4315	8,75	9,7823	10,22
1	17,7598	5,63	14,8517	6,73	12,6952	7,88
2	19,7556	5,06	16,5255	6,05	14,1247	7,08
3	20,7641	4,82	17,3823	5,75	14,8629	6,73
4	21,2887	4,70	17,8397	5,61	15,2640	6,55
5	21,4576	4,66	18,0017	5,56	15,4147	6,49
6	21,5690	4,64	18,1182	5,52	15,5280	6,44
7	21,6556	4,62	18,2157	5,49	15,6270	6,40
8	21,6723	4,61	18,2560	5,48	15,6783	6,38
9	21,6538	4,62	18,2681	5,47	15,7066	6,37
10	21,5969	4,63	18,2488	5,48	15,7089	6,37
11	21,4558	4,66	18,1588	5,51	15,6508	6,39
12	21,2685	4,70	18,0296	5,55	15,5590	6,43
13	21,0754	4,74	17,8953	5,59	15,4629	6,47
14	20,8763	4,79	17,7556	5,63	15,3622	6,51
15	20,6709	4,84	17,6104	5,68	15,2565	6,55

Alter.	3 Procentfuſs.	4 Procentfuſs.	5 Procentfuſs.
71	6,418	6,075	5,764
72	6,103	5,790	5,504
73	5,794	5,507	5,245
74	5,491	5,230	4,990
75	5,199	4,963	4,744
76	4,925	4,710	4,511
77	4,652	4,457	4,277
78	4,372	4,197	4,035
79	4,077	3,921	3,776
80	3,781	3,643	3,515
81	3,499	3,377	3,263
82	3,229	3,122	3,020
83	2,982	2,887	2,797
84	2,792	2,708	2,627
85	2,620	2,543	2,471
86	2,461	2,393	2,328
87	2,312	2,251	2,193
88	2,185	2,131	2,080
89	2,015	1,967	1,924
90	1,794	1,758	1,723
91	1,501	1,474	1,447
92	1,190	1,171	1,153
93	0,839	0,827	0,816
94	0,536	0,530	0,524
95	0,242	0,240	0,238
96	0,000	0,000	0,000

Tabelle XVIII.

Leibrente nach der Wargentiniſchen Tafel.

Alter.	4 Procent.	5 Procent.	Alter.	4 Procent.	5 Procent.
1	16,661	14,161	11	18,820	16,128
2	17,537	14,906	12	18,721	16,062
3	18,139	15,425	13	18,609	15,986
4	18,554	15,787	14	18,476	15,891
5	18,715	15,937	15	18,336	15,792
6	18,833	16,052	16	18,191	15,686
7	18,912	16,134	17	18,046	15,582
8	18,943	16,178	18	17,897	15,473
9	18,933	16,186	19	17,752	15,369
10	18,891	16,169	20	17,603	15,260

Alt.	3 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.	4 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.	5 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.
56	10,2011	9,80	9,3918	10,65	8,6874	11,51
57	9,9061	10,09	9,1384	10,94	8,4682	11,81
58	9,6061	10,41	8,8790	11,26	8,2425	12,13
59	9,3009	10,75	8,6137	11,61	8,0104	12,48
60	8,9905	11,12	8,3422	11,99	7,7714	12,87
61	8,6748	11,53	8,0643	12,40	7,5253	13,29
62	8,3539	11,97	7,7800	12,85	7,2719	13,75
63	8,0773	12,38	7,5358	13,27	7,0551	14,17
64	7,8033	12,82	7,2929	13,71	6,8385	14,62
65	7,5335	13,27	7,0528	14,18	6,6237	15,10
66	7,2700	13,76	6,8175	14,67	6,4124	15,59
67	7,0155	14,25	6,5895	15,18	6,2072	16,11
68	6,7733	14,76	6,3722	15,69	6,0113	16,64
69	6,5484	15,27	6,1703	16,21	5,8292	17,16
70	6,3470	15,76	5,9901	16,69	5,6672	17,65
71	6,1687	16,37	5,7740	17,32	5,4705	18,28
72	5,8944	16,97	5,5799	17,92	5,2940	18,89
73	5,7140	17,50	5,4176	18,46	5,1472	19,43
74	5,4909	18,19	5,2197	19,16	4,9661	20,14
75	5,3183	18,80	5,0578	19,77	4,8192	20,75
76	5,0963	19,62	4,8541	20,60	4,6315	21,59
77	4,9173	20,34	4,6907	21,32	4,4821	22,31
78	4,6850	21,34	4,4757	22,34	4,2824	23,35
79	4,4989	22,23	4,3043	23,23	4,1239	24,25
80	4,3853	22,80	4,2023	23,80	4,0323	24,80
81	4,2226	23,68	4,0532	24,67	3,8955	25,67
82	3,9706	25,19	3,8175	26,20	3,6746	27,21
83	3,7713	26,52	3,6319	27,53	3,5014	28,56
84	3,6613	27,31	3,5326	28,31	3,4117	29,31
85	3,4367	29,10	3,3222	30,10	3,2145	31,11
86	3,2983	30,32	3,1957	31,29	3,0985	32,27
87	2,9634	33,75	2,8775	34,75	2,7956	35,77
88	2,6628	37,55	2,5911	38,59	2,5225	39,64
89	2,4284	41,18	2,3684	42,22	2,3108	43,27
90	2,3350	42,83	2,2841	43,78	2,2351	44,74

Tabelle XIX.

Leibrenten nach Deparcieux.

5 p. C.

Alter.	Leibrente.	Alter.	Leibrente.	Alter.	Leibrente.
1		36	14,19	71	6,10
2		37	14,07	72	5,84
3	15,57	38	13,94	73	5,58
4	15,82	39	13,79	74	5,32
5	16,00	40	13,62	75	5,06
6	16,13	41	13,44	76	4,80
7	16,20	42	13,24	77	4,55
8	16,24	43	13,04	78	4,31
9	16,27	44	12,84	79	4,08
10	16,25	45	12,64	80	3,86
11	16,22	46	12,43	81	3,65
12	16,17	47	12,22	82	3,45
13	16,10	48	12,01	83	3,24
14	16,02	49	11,80	84	3,01
15	15,94	50	11,58	85	2,78
16	15,86	51	11,36	86	2,56
17	15,78	52	11,14	87	2,34
18	15,71	53	10,91	88	1,10
19	15,65	54	10,68	89	1,84
20	15,58	55	10,45	90	1,58
21	15,51	56	10,22	91	1,32
22	15,44	57	9,99	92	1,05
23	15,37	58	9,75	93	0,71
24	15,30	59	9,50	94	0,47
25	15,23	60	9,24	95	
26	15,16	61	8,98		
27	15,08	62	8,71		
28	15,00	63	8,43		
29	14,92	64	8,14		
30	14,84	65	7,84		
31	14,75	66	7,52		
32	14,64	67	7,22		
33	14,51	68	6,93		
34	14,42	69	6,64		
35	14,31	70	6,36		

Alter.	3 Procentfuſs.	4 Procentfuſs.	5 Procentfuſs.
31	16,732	14,639	12,965
32	16,540	14,495	12,854
33	16,343	14,347	12,740
34	16,142	14,195	12,623
35	15,938	14,639	12,502
36	15,729	13,880	12,377
37	15,515	13,716	12,249
38	15,298	13,548	12,116
39	15,075	13,375	11,979
40	14,848	13,197	11,835
41	14,620	13,018	11,695
42	14,391	12,838	11,551
43	14,162	12,657	11,407
44	13,929	12,472	11,258
45	13,692	12,283	11,105
46	13,450	12,089	10,947
47	13,203	11,890	10,784
48	12,951	11,685	10,616
49	12,693	11,475	10,445
50	12,436	11,264	10,269
51	12,183	11,057	10,097
52	11,930	10,849	9,925
53	11,674	10,637	9,748
54	11,414	10,421	9,567
55	11,150	10,201	9,382
56	10,826	9,977	9,139
57	10,611	9,749	8,999
58	10,337	9,516	8,801
59	10,058	9,280	8,599
60	9,777	9,039	8,392
61	9,493	8,795	8,181
62	9,205	8,547	7,966
63	8,910	8,291	7,742
64	8,611	8,030	7,514
65	8,304	7,761	7,276
66	7,994	7,488	7,034
67	7,682	7,211	6,787
68	7,367	6,930	6,536
69	7,051	6,647	6,281
70	6,734	6,361	6,023

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.	Fürs weibliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.
31	15,575	13,756	16,104	14,156
32	15,395	13,619	15,941	14,035
33	15,208	13,477	15,787	13,923
34	15,014	13,327	15,629	13,806
35	14,812	13,170	15,465	13,684
36	14,601	13,006	15,278	13,542
37	14,382	12,833	15,070	13,382
38	14,154	12,652	14,854	13,213
39	13,916	12,462	14,629	13,036
40	13,668	12,261	14,401	12,856
41	13,426	12,065	14,158	12,687
42	13,196	11,880	13,994	12,538
43	12,984	11,710	13,798	12,387
44	12,763	11,532	13,596	12,229
45	12,535	11,347	13,383	12,061
46	12,297	11,153	13,151	11,876
47	12,051	10,951	12,894	11,668
48	11,795	10,738	12,620	11,443
49	11,528	10,516	12,333	11,205
50	11,267	10,298	12,049	10,970
51	11,030	10,100	11,769	10,737
52	10,785	9,895	11,492	10,507
53	10,531	9,682	11,220	10,280
54	10,269	9,460	10,937	10,042
55	9,998	9,229	10,642	9,792
56	9,717	8,988	10,334	9,529
57	9,425	8,736	10,012	9,253
58	9,140	8,489	9,692	8,976
59	8,845	8,232	9,358	8,684
60	8,540	7,963	9,039	8,406
61	8,241	7,700	8,739	8,144
62	7,950	7,442	8,453	7,895
63	7,669	7,193	8,166	7,643
64	7,382	6,938	7,870	7,382
65	7,009	6,676	7,566	7,111
66	6,792	6,408	7,252	6,831
67	6,489	6,134	6,930	6,541
68	6,201	5,872	6,596	6,239
69	5,933	5,628	6,253	5,926
70	5,670	5,389	5,897	5,599

Alter.	4 Procent.	5 Procent.	Alter.	4 Procent.	5 Procent.
21	17,458	15,153	61	8,490	7,922
22	17,307	15,045	62	8,201	7,668
23	17,150	14,930	63	7,917	7,418
24	16,997	14,818	64	7,626	7,160
25	16,839	14,701	65	7,328	6,893
26	16,675	14,579	66	7,022	6,619
27	16,512	14,459	67	6,709	6,337
28	16,346	14,335	68	6,398	6,055
29	16,178	14,210	69	6,093	5,777
30	16,006	14,080	70	5,783	5,494
31	15,839	13,956	71	5,491	5,225
32	15,668	13,827	72	5,220	4,976
33	15,497	13,700	73	4,969	4,744
34	15,321	13,566	74	4,758	4,551
35	15,138	13,427	75	4,534	4,345
36	14,939	13,274	76	4,310	4,136
37	14,726	13,107	77	4,084	3,927
38	14,504	12,932	78	3,846	3,699
39	14,272	12,749	79	3,590	3,463
40	14,034	12,558	80	3,331	3,218
41	13,805	12,376	81	3,081	2,981
42	13,595	12,209	82	2,848	2,759
43	13,391	12,048	83	2,649	2,569
44	13,179	11,880	84	2,576	2,441
45	12,959	11,704	85	2,461	2,391
46	12,724	11,514	86	2,399	2,334
47	12,472	11,309	87	2,292	2,238
48	12,217	11,096	88	2,124	2,074
49	11,930	10,860	89	1,903	1,864
50	11,658	10,654	90	1,645	1,612
51	11,399	10,418	91	1,391	1,366
52	11,138	10,201	92	1,092	1,074
53	10,875	9,981	93	0,774	0,762
54	10,603	9,751	94	0,519	0,517
55	10,320	9,510			
56	10,025	9,258			
57	9,718	8,994			
58	9,416	8,732			
59	9,101	8,458			
60	8,789	8,184			

Tabelle XXI.

Wehrt der beym Tode einer Perſon zahlbaren Summe 1.

Zinſen zu 4 pr. Cent.

Alter.	Wehrte.	Alter.	Wehrte.	Alter.	Wehrte.
0	0,5427	31	0,4038	61	0,6774
1	0,4059	32	0,4112	62	0,6888
2	0,3390	33	0,4189	63	0,6986
3	0,3047	34	0,4270	64	0,7083
4	0,2864	35	0,4353	65	0,7179
5	0,2799	36	0,4425	66	0,7273
6	0,2753	37	0,4499	67	0,7364
7	0,2714	38	0,4576	68	0,7451
8	0,2698	39	0,4655	69	0,7532
9	0,2693	40	0,4737	70	0,7604
10	0,2700	41	0,4823	71	0,7690
11	0,2736	42	0,4911	72	0,7768
12	0,2788	43	0,5002	73	0,7833
13	0,2842	44	0,5097	74	0,7912
14	0,2898	45	0,5196	75	0,7977
15	0,2956	46	0,5298	76	0,8058
16	0,3016	47	0,5389	77	0,8124
17	0,3079	48	0,5484	78	0,8210
18	0,3145	49	0,5581	79	0,8278
19	0,3213	50	0,5682	80	0,8319
20	0,3284	51	0,5770	81	0,8379
21	0,3343	52	0,5860	82	0,8473
22	0,3400	53	0,5953	83	0,8547
23	0,3469	54	0,6047	84	0,8587
24	0,3536	55	0,6145	85	0,8671
25	0,3605	56	0,6243	86	0,8722
26	0,3677	57	0,6345	87	0,8849
27	0,3752	58	0,6449	88	0,8964
28	0,3830	59	0,6555	89	0,9053
29	0,3897	60	0,6663	90	0,9086
30	0,3966				

Tabelle XX.

Leibrente für die verſchiedenen Geſchlechter nach Wargentin.

Alter.	Für männliche Geſchlecht. 4 p. C.	5 p. C.	Für weibliche Geſchlecht. 4 p. C.	5 p. C.
1	16,503	14,051	16,820	14,271
2	17,355	14,178	17,719	15,034
3	17,935	15,279	18,344	15,571
4	18,328	15,624	18,780	15,951
5	18,503	15,786	18,927	16,088
6	18,622	15,901	19,045	16,203
7	18,693	15,977	19,131	16,291
8	18,725	16,021	19,162	16,335
9	17,715	16,030	19,151	16,343
10	18,674	16,014	19,109	16,325
11	18,600	15,976	19,041	16,286
12	18,491	15,896	18,952	16,229
13	18,378	15,819	18,840	16,153
14	18,246	15,724	18,707	16,059
15	18,105	15,624	18,568	15,966
16	17,958	15,517	18,424	15,856
17	17,803	15,404	18,290	15,761
18	17,643	15,285	18,151	15,662
19	17,492	15,175	18,013	15,563
20	17,335	15,059	17,872	15,462
21	17,192	14,955	17,725	15,356
22	17,042	14,846	17,573	15,245
23	16,887	14,732	17,414	15,129
24	16,742	14,627	17,252	15,069
25	16,592	14,517	17,087	14,886
26	16,436	14,402	16,915	14,757
27	16,274	14,282	16,751	14,636
28	16,105	14,156	16,588	14,515
29	15,930	14,024	16,427	14,390
30	15,751	13,889	16,261	14,272

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Personen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
40	40	15,27	7,37
	45	14,05	8,59
	50	12,70	9,94
	55	11,38	11,26
	60	9,87	12,77
	65	8,37	14,27
	70	7,13	15,51
	75	6,05	16,59
	80	5,06	17,58
45	15	17,07	2,65
	20	16,59	3,13
	25	16,11	3,61
	30	15,51	4,21
	35	14,80	4,92
	40	14,05	5,67
	45	13,05	6,67
	50	11,90	7,82
	55	10,76	8,96
	60	9,41	10,31
	65	8,04	11,68
	70	6,89	12,83
	75	5,89	13,83
	80	4,9	14,76
	85	4,00	15,72
50	15	15,00	1,95
	20	14,63	2,32
	25	14,28	2,67
	30	13,82	3,13
	35	13,28	3,67
	40	12,70	4,25
	45	11,90	5,05
	50	10,97	5,98
	55	10,01	6,94
	60	8,85	8,10
	65	7,63	9,32
	70	6,60	10,35
	75	5,67	11,28
50	80	4,80	12,15
	85	3,90	13,05
	90	2,82	14,13
55	15	13,09	1,41
	20	12,81	1,69
	25	12,55	1,95
	30	12,21	2,29
	35	11,80	2,70
	40	11,38	3,12
	45	10,76	3,74
	50	10,01	5,49
	55	9,24	5,26
	60	8,26	6,24
	65	7,20	7,30
	70	6,29	8,21
	75	5,46	9,04
	80	4,66	9,84
	85	3,82	10,68
	90	2,79	11,71
60	20	10,88	1,19
	25	10,70	1,37
	30	10,45	1,62
	35	10,16	1,91
	40	9,87	2,20
	45	9,41	2,66
	50	8,85	3,22
	55	8,26	3,81
	60	7,48	4,59
	65	6,60	5,47
	70	5,83	6,24
	75	5,12	6,95
	80	4,43	7,64
	85	3,68	8,39
	90	2,74	9,33
65	25	8,94	0,94
	30	8,77	1,11

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.	Fürs weibliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.
71	5,418	5,158	5,54	5,293
72	5,180	4,940	5,261	5,013
73	4,940	4,719	4,998	4,770
74	4,724	4,521	4,792	4,581
75	4,487	4,302	4,582	4,388
76	4,253	4,084	4,367	4,189
77	4,024	3,871	4,145	3,983
78	3,768	3,631	3,913	3,707
79	3,512	3,390	3,668	3,536
80	3,260	3,152	3,402	3,285
81	3,017	2,921	3,145	3,041
82	2,792	2,706	2,905	2,812
83	2,600	2,523	2,699	2,615
84	2,473	2,403	2,559	2,480
85	2,371	2,306	2,552	2,476
86	2,281	2,222	2,518	2,446
87	2,154	2,103	2,431	2,365
88	1,955	1,912	2,294	2,236
89	1,698	1,664	2,108	2,059
90	1,417	1,392	1,873	1,833
91	1,154	1,136	1,628	1,596
92	0,835	0,824	1,349	1,325
93	0,477	0,471	1,071	1,054
94	0,240	0,238	0,799	0,788
95	0,000	0,000	0,544	0,537
96	0,000	0,000	0,320	0,317

Tabelle XXIV.

Werth der Verbindungsrenten bey zwo Personen.

Nach Süssmilchs Tafel und dem 4 pr. C. Fuss.

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
15	15	14,6304
	20	14,1329
	25	13,6365
	30	13,0376
	35	12,3645
	40	11,6761
	45	10,7988
	50	9,8279
	55	8,8805
20	20	13,6778
	25	13,2836
	30	12,6711
	35	12,0420
	40	11,3972
	45	10,5645
	50	9,6355
	55	8,7251
	60	7,6517
25	25	12,8127
	30	12,3063
	35	11,7272
	40	11,1269
	45	10,3416
	50	9,4564
	55	8,5844
	60	7,5464
	65	6,4681
30	30	11,8512
	35	11,3253
	40	10,7816
30	45	10,0500
	50	9,2181
	55	8,3929
	60	7,3987
	65	6,3571
	70	5,4762
35	35	10,8576
	40	10,3722
	45	9,7091
	50	8,9353
	55	8,1658
	60	7,2234
	65	6,2250
	70	5,3764
	75	4,6101
40	40	9,9484
	45	9,3524
	50	8,6531
	55	7,9396
	60	7,0559
	65	6,1048
	70	5,2907
	75	4,5513
	80	3,8485
45	45	8,8363
	50	8,2175
	55	7,5934
	60	6,7804
	65	5,8976
	70	5,1355

Al-

Tabelle XXII und XXIII.

Die mittlere Dauer der Verbindung zwoer Personen, ingleichen die mittlere Dauer des Ueberlebens einer Person über eine andere. Nach Süssmilchs Sterblichkeits-Tafel.

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Personen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
15	15	27,68	10,88
	20	26,12	12,44
	25	24,55	14,01
	30	22,80	15,76
	35	20,95	17,61
	40	19,12	19,44
	45	17,07	21,49
	50	15,00	23,56
	55	13,09	25,47
20	15	26,12	8,91
	20	24,78	10,25
	25	23,41	11,62
	30	21,85	13,18
	35	20,18	14,85
	40	18,51	16,52
	45	16,59	18,44
	50	14,63	20,40
	55	12,81	22,22
	60	10,88	24,15
25	15	24,55	7,23
	20	23,41	8,37
	25	22,23	9,55
	30	20,88	10,90
	35	19,39	12,39
	40	17,88	13,90
	45	16,11	15,67
	50	14,28	17,50
	55	12,55	19,23
	60	10,70	21,08
	65	8,94	22,84
30	15	22,80	5,77
	20	21,85	6,72
	25	20,88	7,69
	30	19,73	8,84
	35	18,44	10,13
	40	17,11	11,46
	45	15,51	13,06
	50	13,82	14,75
	55	12,21	16,36
	60	10,45	18,12
	65	8,77	19,80
	70	7,41	21,16
35	15	20,95	4,54
	20	20,18	5,31
	25	19,39	6,10
	30	18,44	7,05
	35	17,35	8,14
	40	16,21	9,28
	45	14,80	10,69
	50	13,28	12,21
	55	11,80	13,69
	60	10,16	15,33
	65	8,57	16,92
	70	7,26	18,23
	75	6,13	19,36
40	15	19,12	3,52
	20	18,51	4,13
	25	17,88	4,76
	30	17,11	5,53
	35	16,21	6,43

Tabelle XXIV.

Werth der Verbindungsrenten bey zwey Personen.

Nach Süssmilchs Tafel und dem 4 pr. C. Fuss.

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
15	15	14,6304
	20	14,1329
	25	13,6365
	30	13,0376
	35	12,3645
	40	11,6761
	45	10,7988
	50	9,8279
	55	8,8805
20	20	13,6778
	25	13,2236
	30	12,6711
	35	12,0420
	40	11,3972
	45	10,5645
	50	9,6355
	55	8,7251
	60	7,6517
25	25	12,8127
	30	12,3063
	35	11,7272
	40	11,1269
	45	10,3416
	50	9,4564
	55	8,5844
	60	7,5464
	65	6,4681
30	30	11,8512
	35	11,3253
	40	10,7816
	45	10,0509
	50	9,2181
	55	8,3929
	60	7,3987
	65	6,3571
	70	5,4762
35	35	10,8576
	40	10,3722
	45	9,7091
	50	8,9353
	55	8,1658
	60	7,2234
	65	6,2250
	70	5,3764
	75	4,6101
40	40	9,9484
	45	9,3524
	50	8,6531
	55	7,9396
	60	7,0559
	65	6,1048
	70	5,2907
	75	4,5513
	80	3,8485
45	45	8,8363
	50	8,2175
	55	7,5934
	60	6,7804
	65	5,8976
	70	5,1355

Alter der Le-benden.	Alter der ver-bunde-nen Perso-nen.	Verbin-dungs-dauer.	Dauer des Ue-berle-bens.
55	35	8,57	1,31
	40	8,37	1,91
	45	8,04	1,84
	50	7,63	2,25
	55	7,20	2,68
	60	6,60	3,28
	65	5,90	3,98
	70	5,27	4,61
	75	4,68	5,20
	80	4,10	5,78
	85	3,47	6,41
	90	2,64	7,24
60	30	7,41	0,77
	35	7,26	0,92
	40	7,13	1,05
	45	6,89	1,29
	50	6,60	1,58
	55	6,29	1,89
	60	5,83	2,35
	65	5,27	2,91
	70	4,77	3,41
	75	4,28	3,90
	80	3,80	4,38
	85	3,26	4,92
	90	2,54	5,64
65	35	6,13	0,63
	40	6,05	0,71
	45	5,89	0,87
	50	5,67	1,09
	55	5,46	1,30
	60	5,12	1,64
	65	4,68	2,08
	70	4,28	2,48
	75	3,89	2,87
75	80	3,49	3,27
	85	3,04	3,72
	90	2,43	4,33
80	40	5,06	0,47
	45	4,96	0,57
	50	4,80	0,73
	55	4,66	0,87
	60	4,43	1,10
	65	4,10	1,43
	70	3,80	1,73
	75	3,49	2,04
	80	3,18	2,35
	85	2,81	2,72
	90	2,31	3,22
85	45	4,00	0,32
	50	3,90	0,42
	55	3,82	0,50
	60	3,68	0,64
	65	3,47	0,85
	70	3,26	1,06
	75	3,04	1,28
	80	2,81	1,51
	85	2,56	1,76
	90	2,17	2,15
90	50	0,82	0,18
	55	2,79	0,21
	60	2,74	0,26
	65	2,64	0,36
	70	2,54	0,46
	75	2,43	0,57
	80	2,31	0,69
	85	2,17	0,83
	90	2,03	0,97

Tabelle XXV.

Verbindungsrenten für zwo Personen, nach der Northamptoner Sterblichkeits-Tafel.

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
5	5	15,638	13,591	11,984
	10	15,974	13,933	12,315
	15	15,381	13,479	11,954
	20	14,775	12,993	11,561
	25	14,301	12,633	11,281
	30	13,762	12,220	10,959
	35	13,136	11,732	10,572
	40	12,405	11,150	10,102
	45	11,597	10,500	9,571
10	10	16,339	14,277	12,665
	15	15,762	13,841	12,302
	20	15,151	13,355	11,906
	25	14,683	12,998	11,627
	30	14,150	12,586	11,304
	35	13,595	12,098	10,916
	40	12,791	11,513	10,442
	45	11,976	10,851	9,900
	50	11,044	10,085	9,260
15	15	15,229	13,411	11,960
	20	14,660	12,961	11,585
	25	14,230	12,630	11,324
	30	13,734	12,246	11,021
	35	13,151	11,787	10,655
	40	12,459	11,234	10,205
	45	11,687	10,607	9,690
	50	10,798	9,872	9,076
	55	9,850	9,077	8,403
20	20	14,133	12,535	11,232
	25	13,741	12,229	10,989
	30	13,286	11,873	10,707
	35	12,744	11,445	10,363

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
45	75	4,4374
	80	3,7696
	85	3,0543
50	50	7,6865
	55	7,1437
	60	6,4273
	65	5,6241
	70	4,9247
	75	4,2776
	80	3,6520
	85	2,9774
	90	2,1283
55	55	6,6900
	60	6,0685
	65	5,3508
	70	4,7180
	75	4,1262
	80	3,5470
	85	2,9135
	90	2,1008
60	60	5,5575
	65	4,9459
	70	4,3993
	75	3,8814
	80	3,3686
	85	2,8008
	90	2,0547

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
65	65	4,4434
	70	3,9875
	75	3,5508
	80	3,1110
	85	2,6199
	90	1,9635
70	70	3,6100
	75	3,2427
	80	2,8678
	85	2,4456
	90	1,8718
75	75	2,9401
	80	2,6248
	85	2,2684
	90	1,7781
80	80	2,3684
	85	2,0738
	90	1,6648
85	85	1,8573
	90	1,5390
90	90	1,4187

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
40	75	4,656	4,457	4,272
	80	3,469	3,349	3,236
45	45	9,776	8,990	8,312
	50	9,204	8,503	7,891
	55	8,557	7,948	7,411
	60	7,781	7,274	6,822
	65	6,850	6,453	6,094
	70	5,749	5,460	5,195
	75	4,580	4,386	4,206
	80	3,426	3,308	3,197
	85	2,424	2,356	2,291
50	50	8,714	8,081	7,522
	55	8,151	7,593	7,098
	60	7,460	6,989	6,568
	65	6,611	6,236	5,897
	70	5,582	5,306	5,054
	75	4,472	4,285	4,112
	80	3,362	3,247	3,140
	85	2,388	2,322	2,258
	90	1,685	1,651	1,619
55	55	7,681	7,179	6,735
	60	7,088	6,659	6,272
	65	6,334	5,986	5,671
	70	5,391	5,132	4,893
	75	4,350	4,171	4,006
	80	3,291	3,180	3,076
	85	2,349	2,284	2,222
	90	1,666	1,633	1,601
60	60	6,606	6,226	5,888
	65	5,970	5,658	5,372
	70	5,139	4,900	4,680
	75	4,189	4,021	3,866
	80	3,197	3,092	2,992
	85	2,297	2,234	2,174
	90	1,641	1,608	1,577
65	65	5,471	5,201	4,960
	70	4,782	4,573	4,378
	75	3,958	3,806	3,665
	80	3,063	2,965	2,873

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
65	85	2,223	2,163	2,107
	90	1,606	1,575	1,544
70	70	4,261	4,087	3,930
	75	3,599	3,471	3,347
	80	2,843	2,757	2,675
	85	2,096	2,042	1,991
	90	1,545	1,515	1,486
75	75	3,114	3,015	2,917
	80	2,526	2,448	2,381
	85	1,902	1,856	1,811
	90	1,440	1,413	1,387
80	80	2,122	2,068	2,018
	85	1,645	1,608	1,573
	90	1,302	1,278	1,255
85	85	1,309	1,339	1,256
	90	1,074	1,054	1,038
90	90	0,938	0,922	0,909

Tabelle XXVI.

Verbindungsrenten nach der Wargentinischen Tafel.

Zinsen 4 pr. C.

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
1	1	12,252
	7	13,989
	13	13,894
	19	13,389
	25	12,832
	31	12,196
	37	11,465
	43	10,546
7	7	16,003
	13	15,914
	19	15,351
	25	15,727
7	31	14,006
	37	13,176
	43	12,112
	49	10,919
13	13	15,855
	19	15,327
	25	14,736
	31	14,045
	37	13,234
	43	12,190
	49	11,011
	55	9,644

Alter

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
19	19	14,854
	25	14,320
	31	13,687
	37	12,934
	43	11,951
	49	10,819
	55	9,500
	61	7,928
25	25	13,849
	31	13,284
	37	12,599
	43	11,683
	49	10,612
	55	9,347
	61	7,823
	67	6,275
31	31	12,795
	37	12,192
	43	11,359
	49	10,365
	55	9,167
	61	7,702
	67	6,197
	73	4,646
37	37	11,683
	43	10,953
	49	10,059
	55	8,951
	61	7,561
	67	6,115
	73	4,603
	79	3,352
43	43	10,346
	49	9,581
	55	8,597
	61	7,318
	67	5,957
	73	4,507
	79	3,295
	85	2,305

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
49	49	8,966
	55	8,139
	61	7,008
	67	5,764
	73	4,398
	79	3,238
	85	2,277
	91	1,090
55	55	7,495
	61	6,555
	67	5,474
	73	4,231
	79	3,150
	85	2,232
	91	1,078
61	61	5,844
	67	4,984
	73	3,927
	79	2,974
	85	2,135
	91	1,050
67	67	4,362
	73	3,527
	79	2,743
	85	2,010
	91	1,017
73	73	2,935
	79	2,355
	85	1,768
	91	0,937
79	79	1,967
	85	1,524
	91	0,863
85	85	1,212
	91	0,725
91	91	0,516

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
65	85	2,223	2,163	2,107
	90	1,606	1,575	1,544
70	70	4,261	4,087	3,930
	75	3,599	3,471	3,347
	80	2,843	2,757	2,675
	85	2,096	2,042	1,991
	90	1,545	1,515	1,486
75	75	3,114	3,015	2,917
	80	2,526	2,448	2,381
	85	1,902	1,856	1,811
	90	1,440	1,413	1,387
80	80	2,122	2,068	2,018
	85	1,645	1,608	1,573
	90	1,302	1,278	1,255
85	85	1,309	1,339	1,256
	90	1,074	1,054	1,038
90	90	0,938	0,922	0,909

Tabelle XXVI.

Verbindungsrenten nach der Wargentinischen Tafel.

Zinsen 4 pr. C.

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
1	1	12,252
	7	13,989
	13	13,894
	19	13,389
	25	12,832
	31	12,196
	37	11,465
	43	10,546
7	7	16,003
	13	15,914
	19	15,351
	25	15,727
7	31	14,006
	37	13,178
	43	12,112
	49	10,919
13	13	15,855
	19	15,327
	25	14,786
	31	14,245
	37	13,234
	43	12,190
	49	11,011
	55	9,644

Alter

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
20	40	5,3933	0,4350	18,5498	7,1520
	45	6,2260	0,5384	18,2368	7,6723
	50	7,1550	0,6727	17,9511	8,3156
	55	8,0654	0,8293	17,7048	8,9797
	60	9,1388	1,0563	17,4810	9,8293
25	15	2,3505	0,1606		
	20	2,7634	0,1943		
	25	3,1743	0,2298	19,1613	6,3486
	30	3,6807	0,2766	18,7654	6,4591
	35	4,2598	0,3347	18,3773	6,6501
	40	4,8601	0,4008	18,0166	6,8897
	45	5,6454	0,4978	17,6562	7,3146
	50	6,5306	0,6246	17,3267	7,8703
	55	7,4026	0,7724	17,0420	8,4576
	60	8,4406	0,9876	16,7828	9,2364
	65	9,5189	1,2746	16,5717	10,1035
30	15	2,0471	0,1458		
	20	2,4136	0,1765		
	25	2,7784	0,2088		
	30	3,2335	0,2516	18,3182	6,4670
	35	3,7594	0,3050	17,8769	6,5516
	40	4,3031	0,3652	17,4596	6,6780
	45	5,0347	0,4556	17,0455	6,9955
	50	5,8666	0,5741	16,6627	7,4446
	55	6,6918	0,7124	16,3312	7,9383
	60	7,6860	0,9151	16,0282	8,6295
	65	8,7276	1,1863	15,7804	9,4232
	70	9,6085	1,4837	15,5986	10,1224
35	15	1,7536	0,1312		
	20	2,0755	0,1591		
	25	2,3903	0,1878		
	30	2,7922	0,2265		
	35	3,2599	0,2749	17,3774	6,5198

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des längstlebenden.
35	40	3,7453	0,3293	16,9018	6,5296
	45	4,4604	0,4110	16,4192	6,7101
	50	5,1822	0,5216	15,9783	7,0430
	55	5,9517	0,6493	15,5911	7,4253
	60	6,8941	0,8584	15,2363	8,0129
	65	7,8925	1,0924	14,9453	8,7202
	70	8,7411	1,3709	14,7312	9,3548
	75	9,5074	1,6947	14,5652	9,9551
40	15	1,4804	0,1168		
	20	1,7593	0,1419		
	25	2,0296	0,1674		
	30	2,3749	0,2016		
	35	2,7843	0,2448		
	40	3,2081	0,2930	16,3646	6,4162
	45	3,8041	0,3675	15,8149	6,4625
	50	4,5034	0,4665	15,2995	6,6464
	55	5,2169	0,5836	14,8563	6,9167
	60	6,1006	0,7573	14,4428	7,3869
	65	7,0517	0,9925	14,1045	7,9996
	70	7,8658	1,2504	13,8559	8,5052
	75	8,6052	1,5501	13,6630	9,1117
	80	9,3080	1,9198	13,5103	9,6616
45	15	1,2120	0,1027		
	20	1,4463	0,1251		
	25	1,6692	0,1472		
	30	1,9608	0,1774		
	35	2,3017	0,2149		
	40	2,6584	0,2568		
	45	3,1745	0,3227	15,1853	6,3490
	50	3,7933	0,4115	14,5894	6,3719
	55	4,4174	0,5140	14,0568	6,4634
	60	5,2304	0,6723	13,5726	6,7922
	65	6,1132	0,8863	13,1660	7,2683
	70	6,8753	1,1206	12,8654	7,7299

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
45	75	7,5734	1,3928	12,6312	8,1938
	80	8,2412	1,7279	12,4435	8,6737
	85	8,9565	2,2091	12,2787	9,2246
50	15	0,9682	0,0894		
	20	1,1606	0,1091		
	25	1,3397	0,1281		
	30	1,5780	0,1544		
	35	1,8608	0,1873		
	40	2,1430	0,2220		
	45	2,5786	0,2798		
	50	3,1096	0,3580	13,9058	6,2192
	55	3,6524	0,4485	13,2918	6,1481
	60	4,3688	0,5882	12,7110	6,2837
	65	5,1720	0,7808	12,2248	6,6006
	70	5,8714	0,9910	11,8615	6,9368
	75	6,5185	1,2351	11,5763	7,2987
	80	7,1441	1,5357	11,3464	7,6942
	85	7,8187	1,9658	11,1409	8,1637
	90	8,6678	2,7708	10,9519	8,8235
55	15	0,7589	0,0768		
	20	0,9143	0,0940		
	25	1,0550	0,1101		
	30	1,2465	0,1327		
	35	1,4736	0,1608		
	40	1,6998	0,1901		
	45	2,0460	0,2381		
	50	2,4957	0,3065		
	55	2,9494	0,3835	12,5888	5,8988
	60	3,5709	0,5052	11,9131	5,8446
	65	4,2886	0,6753	11,3414	5,9905
	70	4,9214	0,8607	10,9115	6,1935
	75	5,5132	1,0755	10,5710	6,4448
	80	6,0924	1,3399	10,2947	6,7475
	85	6,7259	1,7187	10,0481	7,1348
	90	7,5386	2,4312	9,8227	7,7218

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
60	20	0,6905	0,0798		
	25	0,7958	0,0931		
	30	0,9435	0,1123		
	35	1,1188	0,1361		
	40	1,2863	0,1597		
	45	1,5618	0,2007		
	50	1,9149	0,2578		
	55	2,2737	0,3217		
	60	2,7847	0,4247	11,1269	5,5694
	65	3,3963	0,5712	10,4491	5,5033
	70	3,9429	0,7303	9,9330	5,5335
	75	4,4608	0,9138	9,5186	5,6372
	80	4,9736	1,1385	9,1759	5,8071
	85	5,5414	1,4579	8,8636	6,0630
	90	6,2875	2,0583	8,5716	6,5168
65	25	0,5846	0,0783		
	30	0,6956	0,0945		
	35	0,8277	0,1146		
	40	0,9479	0,1334		
	45	1,1551	0,1675		
	50	1,4286	0,2157		
	55	1,7019	0,2680		
	60	2,1068	0,3543		
	65	2,6093	0,4794	9,6621	5,2186
	70	3,0652	0,6146	9,0553	5,0678
	75	3,5019	0,7695	8,5597	5,0089
	80	3,9417	0,9588	8,1440	5,0328
	85	4,4328	1,2246	7,7550	5,1353
	90	5,0892	1,7173	7,3733	5,4097
70	30	0,5139	0,0794		
	35	0,6137	0,0962		
	40	0,6994	0,1112		
	45	0,8546	0,1393		
	50	1,0654	0,1798		

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Überlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Überleben des Längstlebenden.
70	55	1,2721	0,2225		
	60	1,5906	0,2946		
	65	2,0026	0,4015		
	70	2,3801	0,5163	8,3702	4,7602
	75	2,7474	0,6476	7,8052	4,5625
	80	3,1223	0,8073	7,3246	4,4566
	85	3,5445	1,0287	6,8667	4,4213
	90	4,1183	1,4340	6,4024	4,5305
75	35	0,4477	0,0798		
	40	0,5065	0,0912		
	45	0,6204	0,1141		
	50	0,7802	0,1478		
	55	0,9316	0,1817		
	60	1,1764	0,2409		
	65	1,5070	0,3312		
	70	1,8151	0,4278		
	75	2,1177	0,5375	7,1755	4,2354
	80	2,4330	0,6712	6,6353	4,0103
	85	2,7894	0,8534	6,1116	3,8434
	90	3,2797	1,1806	5,5638	3,7859
80	40	0,3536	0,0729		
	45	0,4325	0,0907		
	50	0,5501	0,1183		
	55	0,6551	0,1441		
	60	0,8335	0,1908		
	65	1,0911	0,2654		
	70	1,3343	0,3450		
	75	1,5773	0,4347		
	80	1,8337	0,5444	6,0360	3,6674
	85	2,1283	0,6924	5,4505	3,3769
	90	2,5373	0,9522	4,8214	3,1565
85	45	0,2681	0,0661		
	50	0,3450	0,0867		

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
85	55	0,4089	0,1045		
	60	0,5216	0,1372		
	65	0,7025	0,1941		
	70	0,8768	0,2545		
	75	1,0546	0,3225		
	80	1,2486	0,4062		
	85	1,4651	0,5128	4,7873	2,9302
	90	1,7834	0,7024	4,0675	2,5284
90	50	0,1557	0,0498		
	55	0,1832	0,0591		
	60	0,2293	0,0751		
	65	0,3205	0,1081		
	70	0,4122	0,1435		
	75	0,5059	0,1821		
	80	0,6192	0,2324		
	85	0,7450	0,2934		
	90	0,8653	0,3578	3,1494	1,7366

Tabelle XXVIII.

Renten auf das Ueberleben einer Person vom weiblichen Geschlecht, über eine verbundene vom männlichen Geschlecht.

Nach *Wargentins* Tafel (oben Tab. XII und XIII.)

Zinsfuß zu 4 pr. Cent.

Alter der Ueberlebenden.	*Alter der Verbundenen.*	*Renten. Auf einmal*	*Wehrt. Die jährl. Beyträge während der Verbindung.*
16	16	3,063	0,187
	22	3,592	0,226
	28	4,208	0,276
	34	4,904	0,338
	40	5,854	0,431
	46	6,862	0,546
	52	8,160	0,724
	58	9,625	0,982
20	20	3,190	0,203
	26	3,728	0,246
	32	4,360	0,300
	38	5,152	0,380
	44	6,121	0,480
	50	7,305	0,631
	56	8,644	0,836
	62	10,214	1,179
24	24	3,232	0,215
	30	3,797	0,262
	36	4,451	0,322
	42	5,379	0,418
	48	6,390	0,538
	54	7,650	0,721
	60	9,155	1,006
28	28	3,264	0,228
	34	3,825	0,277
	40	4,635	0,358
	46	5,516	0,457

Renten-Wahrt.

Alter der Ueberlebenden.	Alter der Verbundenen.	Auf einmal.	Die jährl. Beyträge während der Verbindung.
28	52	6,694	0,614
	58	8,054	0,845
	64	9,556	1,190
32	32	3,316	0,243
	38	3,952	0,304
	44	4,771	0,392
	50	5,813	0,522
	56	7,029	0,709
	62	8,495	1,005
	68	10,024	1,449
36	36	3,374	0,261
	42	4,181	0,386
	48	4,964	0,438
	54	6,171	0,604
	60	7,444	0,843
	66	8,876	1,200
42	42	3,462	0,300
	48	4,181	0,386
	54	5,163	0,525
	60	6,435	0,749
	66	7,760	1,075
	72	9,263	1,616
46	46	3,415	0,318
	52	4,254	0,429
	58	5,310	0,600
	64	6,565	0,865
	70	7,997	1,299
50	50	3,342	0,344
	56	4,175	0,470
	62	5,300	0,683
	68	6,862	1,011
54	54	3,189	0,363
	60	4,123	0,527
	66	5,194	0,770
	72	6,482	1,188
58	58	3,014	0,392
	64	3,904	0,575
	79	5,028	0,887

Tabelle XXIX.

Verbindungsrenten für drey Personen, nach der Northamptoner Tafel.

Zinsen 4 pr. C.

Gemeinschaftliches Alter.	Rentenwehrt.	Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.			Rentenwehrt.
1	5,309	1	11	21	8,627
2	8,251	2	12	22	9,914
3	9,632	3	13	23	10,344
4	10,661	4	14	24	10,598
5	11,170	5	15	25	10,655
6	11,707	6	16	26	10,708
7	12,058	7	17	27	10,700
8	12,266	8	18	28	10,654
9	12,298	9	19	29	10,562
10	12,200	10	20	30	10,438
11	12,043	11	21	31	10,305
12	11,865	12	22	32	10,170
13	11,678	13	23	33	10,031
14	11,481	14	24	34	9,887
15	11,274	15	25	35	9,738
16	11,056	16	26	36	9,584
17	10,845	17	27	37	9,429
18	10,656	18	28	38	9,278
19	10,490	19	29	39	9,131
20	10,342	20	30	40	8,986
21	10,222	21	31	41	8,850
22	10,118	22	32	42	8,718
23	10,012	23	33	43	8,586
24	9,905	24	34	44	8,451
25	9,769	25	35	45	8,313
26	9,685	26	36	46	8,171
27	9,572	27	37	47	8,027
28	9,457	28	38	48	7,878
29	9,340	29	39	49	7,725
30	9,221	30	40	50	7,571

Gemeinschaftliches Alter.	Rentenwehrt.	Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.			Rentenwehrt.
31	9,099	31	41	51	7,420
32	8,975	32	42	52	7,272
33	8,848	33	43	53	7,123
34	8,718	34	44	54	6,971
35	8,585	35	45	55	6,816
36	8,448	36	46	56	6,658
37	8,309	37	47	57	6,497
38	8,165	38	48	58	6,332
39	8,015	39	49	59	6,164
40	7,865	40	50	60	5,994
41	7,714	41	51	61	5,827
42	7,567	42	52	62	5,662
43	7,423	43	53	63	5,494
44	7,276	44	54	64	5,322
45	7,126	45	55	65	5,145
46	6,972	46	56	66	4,965
47	6,813	47	57	67	4,782
48	6,650	48	58	68	4,597
49	6,482	49	59	69	4,408
50	6,317	50	60	70	4,219
51	6,161	51	61	71	4,032
52	6,011	52	62	72	3,847
53	5,859	53	63	73	3,660
54	5,705	54	64	74	3,477
55	5,550	55	65	75	3,298
56	5,393	56	66	76	3,298
57	5,235	57	67	77	2,959
58	5,076	58	68	78	2,785
59	4,916	59	69	79	2,598
60	4,755	60	70	80	2,408
61	4,593	61	71	81	2,224
62	4,432	62	72	82	2,044
63	4,263	63	73	83	1,875
64	4,039	64	74	84	1,743
65	3,914	65	75	85	1,623

Gemeinschaftliches Alter.	Rentenwehrt.	Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.			Rentenwehrt.
66	3,733	66	76	86	1,519
67	3,550	67	77	87	1,425
68	3,366	68	78	88	1,350
69	3,181	69	79	89	1,248
70	2,995	70	80	90	1,122
71	2,810	71	81	91	0,951
72	2,627	72	82	92	0,767
73	2,448	73	83	93	0,548
74	2,277	74	84	94	0,362
75	2,119	75	85	95	0,169
76	1,985				
77	1,855				
78	1,720				
79	1,563				
80	1,400				
81	1,245				
82	1,097				
83	0,949				
84	0,860				
85	0,782				
86	0,716				
87	0,662				
88	0,646				
89	0,614				
90	0,563				
91	0,452				
92	0,337				
93	0,185				
94	0,085				
95	0,015				

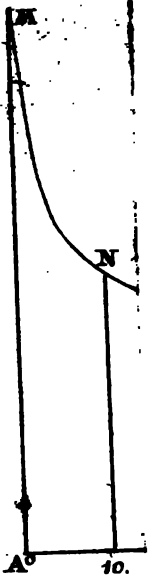
Tabelle XXX.

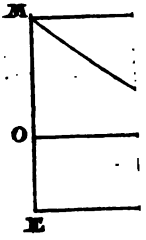
Leibrenten nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben aus der mittlern Lebensdauer berechnet, Süſsmilchs Tafel gemäſs.

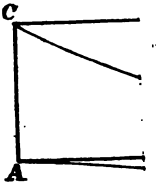
Alter.	Leibrente. 4 p. C.	5 p. C.
0	14,8133	13,0863
1	16,6460	14,4400
2	17,3445	14,9387
3	17,6257	15,1370
4	17,7427	15,2189
5	17,7471	15,2221
6	17,7338	15,2127
7	17,7100	15,1960
8	17,6651	15,1645
9	17,6089	15,1252
10	17,5396	15,0764
11	17,4439	15,0090
12	17,3347	14,9318
13	17,2209	14,8512
14	17,1026	14,7671
15	16,9810	14,6804
16	16,8563	14,5912
17	16,7283	14,4993
18	16,5967	14,4044
19	16,4556	14,3053
20	16,3168	14,2016
21	16,1863	14,1067
22	16,0505	14,0073
23	15,9111	13,9051
24	15,7743	13,7997
25	15,6191	13,6895
26	15,4659	13,5759
27	15,3063	13,4568
28	15,1448	13,3360
29	14,9916	13,2240
30	14,8343	13,1021

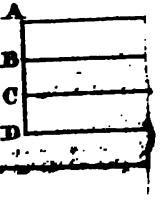
Alter.	Leibrente. 4 p. C.	5 p. C.
31	14,6730	12,9800
32	14,5209	12,8542
33	14,3354	12,7226
34	14,1583	12,5866
35	13,9764	12,4464
36	13,7317	12,3138
37	13,6385	12,1773
38	13,4498	12,0367
39	13,2653	11,8920
40	13,0760	11,7429
41	12,8785	11,5866
42	12,6758	11,4255
43	12,4648	11,2568
44	12,2516	11,0856
45	12,0289	10,9044
46	11,7961	10,7172
47	11,5812	10,5419
48	11,3608	10,3672
49	11,1308	10,1720
50	10,8996	9,9808
51	10,6844	9,8021
52	10,4599	9,6146
53	10,2394	9,4293
54	10,0044	9,2314
55	9,7733	9,0358
56	9,5322	8,8307
57	9,2857	8,6199
58	9,0386	8,4077
59	8,7804	8,1846
60	8,5218	7,9603

Alter.	Leibrente. 4 p. C.	5 p. C.	Alter.	Leibrente. 4 p. C.	5 p. C.
61	8,2511	7,7245	76	5,0085	4,8069
62	7,9803	7,4869	77	4,8400	4,6511
63	7,7443	7,2791	78	4,6171	4,4443
64	7,5029	7,0658	79	4,4429	4,2814
65	7,2610	6,8519	80	4,3175	4,1650
66	7,0273	6,6425	81	4,1566	4,0143
67	6,7990	6,4380	82	3,9117	3,7844
68	6,5841	6,2448	83	3,7263	3,6096
69	6,3751	6,0563	84	3,6054	3,4954
70	6,1880	5,8868	85	3,3863	3,2882
71	5,9685	5,6873	86	3,2413	3,1500
72	5,7647	5,5010	87	2,9263	2,8506
73	5,5957	5,3470	88	2,6323	2,5691
74	5,3909	5,1589	89	2,3979	2,3441
75	5,2194	5,0015	90	2,2842	2,2350

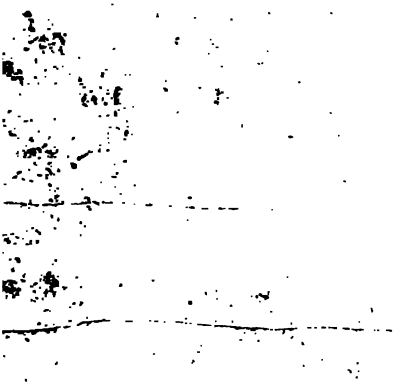

M
N
A
10.


M
O
E


C
A


A
B
C
D

Alt
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75



HG
8793
.T4

HG 8793 .T4
Einleitung zur Berechnung der
C.1
Stanford University Libraries
3 6105 036 522 881

CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(650) 723-1493
grncirc@sulmail.stanford.edu
All books are subject to recall.

DATE DUE

JUN 3 1 2004
JUN 3 0 2004